ECOULEMENT MONODIMENSIONNEL STATIONNAIRE

G. MEAUZÉ

On ne considère que le cas d'un gaz parfait $\left(\frac{P}{\rho} = rT\right)$ et thermiquement parfait (Cp, Cv, γ ... constant).

L'équation de l'énergie => $d(\rho VAHi) = d(\overset{\circ}{m}\,Hi) = d\Theta$, or $\overset{\circ}{m} = \rho VA$ est constant et $dHi = \frac{d\Theta}{\overset{\circ}{m}}$.

Hi est l'enthalpie totale $= h + \frac{V^2}{2}$

$d\Theta$ est l'échange de chaleur.

Si l'évolution du gaz est adiabatique $d\Theta = 0$.

Il en résulte $\boxed{Hi = h + \frac{V^2}{2} = c^t}$

Or $Hi = CpTi$ $\quad h = CpT \quad a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S=C^t} = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma rT$

avec $Cp = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$ on a $CpTi = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_i^2}{\gamma - 1}$

a est la vitesse du son locale et a_i est la vitesse du son quand l'écoulement est à vitesse nulle.

et $\left(\frac{a_i}{a}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{V}{a}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$ (1)

en introduisant le nombre de Mach $M = \frac{V}{a}$

(1) => $\frac{Ti}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$ soit $\boxed{\frac{T}{Ti} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{-1}}$

On peut également écrire $\frac{V}{a_i} = \frac{V}{a}\frac{a}{a_i} = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2}$

$$\boxed{\frac{V}{a_i} = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2}}$$

Dans une section donnée où l'écoulement a une vitesse V, une température T et une pression P (et donc une masse spécifique $\rho = \frac{P}{rT}$), on peut toujours imaginer que cet écoulement est obtenu par une détente réversible (et donc isentropique) à partir d'un état générateur à vitesse nulle de pression Pi et température Ti (et donc $\rho i = \frac{Pi}{rTi}$).

On aura ainsi $\frac{P}{\rho^\gamma} = c^t = \frac{P_i}{\rho_i^\gamma}$

et également $\frac{\rho^{\gamma-1}}{T} = c^t = \frac{\rho_i^{\gamma-1}}{T_i}$ et $\frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = \frac{P_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_i}$

soit $\boxed{\frac{\rho}{\rho_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}}$ et $\boxed{\frac{P}{P_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \varpi(M)$

Si l'on considère l'évolution d'un écoulement le long d'un tube de courant, on a en général :

$$dS = Cp\frac{dT}{T} - r\frac{dP}{P}$$

Par définition de l'état générateur local, il vient $dS = Cp\frac{dT_i}{T_i} - r\frac{dP_i}{P_i}$.

Dans le cas d'une évolution adiabatique : $dT_i = 0$ et $dS = -r\frac{dP_i}{P_i}$.

On voit ainsi que la notion de pression d'arrêt locale Pi est très importante car elle est directement liée à l'entropie.

Si l'évolution du tube de courant est, de plus, réversible (et donc isentropique) dS = 0 => dPi = 0. La pression d'arrêt reste constante.

La conservation du débit permet d'écrire $\overset{\circ}{m} = \rho VA = \rho_c V_c A_c$ où A_c désigne la section du tube de courant où la vitesse serait sonique ; on a $\frac{A}{A_c} = \frac{\rho_c}{\rho}.\frac{V_c}{V}$.

Si l'on considère que l'évolution de A à A_c est isentropique et adiabatique, on voit que T_i, P_i (et donc ρ_i) sont conservés.

On peut alors écrire $\frac{A}{A_c} = \frac{\rho_c}{\rho_i}.\frac{\rho_i}{\rho}.\frac{V_c}{a_i}.\frac{a_i}{V}$.

$\frac{\rho_c}{\rho_i}$ et $\frac{V_c}{a_i}$ ne dépendent que de γ car c'est la valeur que prennent les fonctions $\frac{\rho}{\rho_i}$ et $\frac{V}{a_i}$ quand M = 1.

On obtient alors la relation $\frac{A}{A_c} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \sum(M)$

où A_c représente la section critique (sonique) fictive locale : c'est la section sonique du tube de courant idéal (adiabatique, réversible) passant de A à A_c de façon isentropique.

<u>Expression du débit</u>

$$\overset{\circ}{m} = \rho VA = \rho_c V_c A_c = \frac{\rho_c}{\rho_{i_{local}}}.\frac{V_c}{a_{i_{local}}}.A_c.\rho_{i_{local}}.a_{i_{local}}$$

or $\rho_{i_{local}} = \frac{P_{i_{local}}}{rT_{i_{local}}}$ et $a_{i_{local}} = \sqrt{\gamma r T_{i_{local}}}$

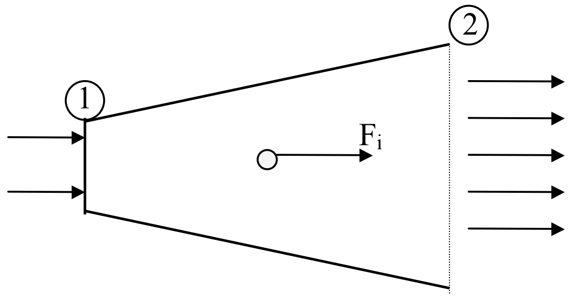
D'où $\overset{\circ}{m} = \frac{K(\gamma)}{\sqrt{C_p}}.\left(\frac{P_i A_c}{\sqrt{T_i}}\right)_{local}$

avec $K(\gamma) = \gamma(\gamma-1)^{-1/2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 1{,}281$ pour $\gamma = 1{,}4$

avec r = 287.04 c_p = 1004,64 $\frac{K(\gamma)}{\sqrt{C_p}} = 0{,}040415$

<u>Théorème de la dynalpie</u>

L'équation de quantité de mouvement $\frac{d(A(P+\rho V^2)}{dx} = P\frac{dA}{dx} + \frac{F_{inter}}{l}$ entraîne que « entre deux sections 1 et 2 d'un tube de courant, la résultante axiale de toutes les forces internes qui s'appliquent sur le fluide est égale à la variation de la dynalpie $(A(P+\rho V^2))$ entre l'entrée et la sortie ».



$$F_i = D_2 - D_1 \quad \text{avec } D = A(P+\rho V^2)$$

Autre expression de D : $D = AP(1+\gamma M^2)$

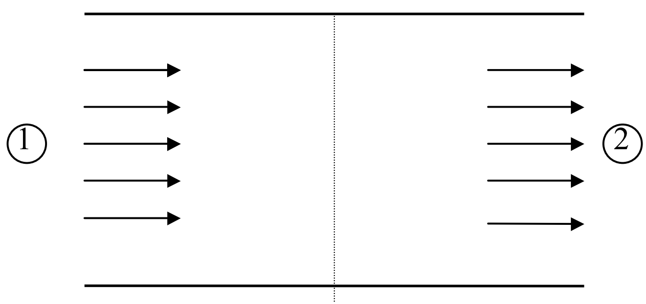
$$D = \frac{P}{P_i}\frac{A}{A_c}(1+\gamma M^2)P_iA_c = \underbrace{\varpi(M)\sum(M)(1+\gamma M^2)}_{f(M)}P_iA_c$$

$$D = P_iA_c.f(M)$$

Pour un écoulement adiabatique $P_iA_c = c^t$ et $F_i = P_iA_c\left[f(M_2) - f(M_1)\right]$

La théorie du choc droit se déduit immédiatement du théorème de la dynalpie :

Considérons un tube de courant à section constante (sans frottement)



La résultante axiale des forces internes est nulle et donc $D_2 - D_1 = 0$. Il en résulte $f(M_2) = f(M_1)$.

On peut voir que l'équation $f(M)$ est bicarrée en M. Il existe donc a priori deux solutions en M^2 qui sont réelles : l'une est subsonique, l'autre supersonique : pour M_1 donné en ① on obtient

$M_2 = M_1$ pour la première solution et $M_2 < M_1$ pour la seconde (voir annexe) ; pour chaque solution on peut déterminer $A_{c_2} = \frac{A_2}{\sum(M_2)} = \frac{A_1}{\sum(M_2)} = A_{c_1} \frac{\sum(M_1)}{\sum(M_2)}$.

D'après la conservation du débit $P_i A_c = c^t$ et d'après le 2ème principe (S ne peut que croître) il résulte que A_{c_2} est nécessairement > A_{c_1} ; cela permet de vérifier si la solution est physique ou non :

Si $M_1 < 1$	seule la solution $M_2 = M_1$ est physique (pas de choc)	
Si $M_1 > 1$	on a les deux solutions et	$M_2 = M_1$ $M_2 < 1 < M_1$