CALCUL DE L'ECOULEMENT DANS UNE CONDUITE ADIABATIQUE A SECTION CONSTANTE EN REGIME PERMANENT

G. MEAUZÉ

En écoulement stationnaire, l'équation monodimensionnelle de quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left(A(p+\rho V^2)\right) = p\frac{dA}{dx} + \frac{Fx}{1} \qquad (1)$$

A = section

P = pression (statique)

ρ = masse volumique

V = vitesse

où Fx représente une force volumique (par exemple la gravitation) et qui est utilisée ici pour modéliser les effets de la viscosité du fluide : $Fx = -\frac{1}{2}\rho V^2 Cf.S$, Cf est un coefficient de frottement classique qui dépend du nombre de Reynolds, de la rugosité des parois, …S représente l'élément de surface.

La section étant considérée comme constante, la relation ci-dessus s'écrit :

$$d\left[A(p+\rho V^2)\right] = -\frac{1}{2}\rho V^2 Cf.\frac{\Pi D.1}{1}dx \qquad dA = 0 \qquad (2)$$

or $\quad A(p+\rho V^2) = A.p(1+\gamma M^2) = P_i A_c.\frac{P}{P_i}.\frac{A}{A_c}(1+\gamma M^2)$

En utilisant les notations $\quad \varpi(M) = \frac{P}{P_i} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\sum(M) = \frac{A}{A_c} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.\frac{1}{M}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

et $\quad \oint(M) = \varpi(M).\sum(M).(1+\gamma M^2)$

on a $\quad A(p+\rho V^2) = P_i A_c \oint(M)$

Rappelons que le débit, constant en régime permanent, peut s'écrire :

$$\dot{m} = K(\gamma, R)\frac{P_i A_c}{\sqrt{T_i}}$$

L'écoulement étant considéré comme adiabatique, l'enthalpie d'arrêt est constante et par conséquent la température d'arrêt aussi si $Cp = C^t$.

Dans ce cas, la conservation du débit impose $P_i\,A_c = C^t$.

(2) devient alors $P_i A_c d\oint \;= -\frac{1}{2}\gamma p M^2 \Pi D dx . C_f$

soit $$d\oint \;= -\frac{1}{2}\gamma M^2 \frac{P}{P_i}.\frac{4}{D}\frac{\Pi D^2}{4}\times\frac{1}{A_c} = -2\gamma M^2 C_f \varpi(M).\sum(M)\frac{dx}{d} \qquad (3)$$

On démontre facilement que $d\oint \;= \varpi\sum\frac{d\sum}{\sum} = \varpi\sum\;\frac{M^2-1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}\frac{dM}{M}$

et (3) devient $C_f\frac{dx}{D} = -\frac{M^2-1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{2\gamma M^3}$

d'où $$\int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} C_f\frac{dx}{D} = \underset{\text{entrée}}{L(M)} - \underset{\text{sortie}}{L(M)} \qquad (4)$$

avec $$L(M) = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{2M^2} - \frac{\gamma+1}{4}\mathrm{Log}\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{M^2}\right]$$

Cette fonction L(M) est implicite et ne peut être résolue que :

- soit par un calcul itératif,
- soit à l'aide des tables.

Un exemple de tables pour (γ = 1,4 est joint en annexe ainsi que le programme Fortran permettant d'éditer ce type de table.

Dans le cas où le coefficient de frottement peut être considéré comme constant, le diamètre D étant lui aussi constant, (4) devient :

$$C_f\frac{1}{D} = -L(M_{\text{sortie}}) + L(M_{\text{entrée}}) \qquad (5)$$

où L est la longueur de la conduite.

(5) permet ainsi de déterminer le nombre de Mach de sortie pour une conduite donnée, avec un C_f donné en fonction du nombre de Mach à l'entrée.

$$L(M_{sortie}) = L(M_{entrée}) - C_f \frac{1}{D}$$

De même, (5) permet le calcul du Mach d'entrée maxi (et donc le débit maximum) pour une conduite donnée qui correspond à une sortie sonique :

$$L(M_{entrée}) = +L(M = 1) + C_f \frac{1}{D}$$

Calcul de la perte de charge en pression d'arrêt

On affecte l'indice 0 à l'entrée
et 1 à la sortie.

$$\frac{\Delta P_i}{P_{i_0}} = \frac{P_{i_0} - P_{i_1}}{P_{i_0}} = 1 - \frac{P_{i_1}}{P_{i_0}}$$

où la conservation du débit implique $P_{i_1} A_{c_1} = P_{i_0} A_{c_0}$

soit $P_{i_1} / P_{i_0} = \dfrac{A_{c_0}}{A_{c_1}} = \dfrac{\sum(M_1)}{\sum(M_0)}$ puisque la section est constante

donc $\dfrac{\Delta P_i}{P_{i_0}} = 1 - \dfrac{\sum_1}{\sum_0}$

Si la perte de charge est exprimée sous la forme $\dfrac{\Delta P_i}{\frac{1}{2}\rho_0 V_0^2}$, on écrit $\dfrac{P_{i_0} - P_{i_1}}{\frac{1}{2}\gamma P_0 M_0^2}$

soit $\dfrac{1 - \sum_1 / \sum_0}{\frac{1}{2}\gamma \varpi_0 M_0^2}$

Calcul de la perte de charge en pression statique

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 V_0^2} = \frac{P_0 - P_1}{\frac{1}{2}\gamma P_0 M_0^2} = \frac{\varpi_0 - \varpi_1 \times \dfrac{\sum_1}{\sum_2}}{\frac{1}{2}\gamma \varpi_0 M_0^2}$$

Rappelons que la vitesse est reliée au nombre de Mach par la relation :

$$\frac{V}{a_i} = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2} \quad \text{avec } a_i = \sqrt{\gamma R T_i}$$

T_i est constant : $T_{i_{\text{entrée}}}$

<u>Pour l'air</u> : (= 1,4 et R = 287,04 ; le coefficient $K\left(\text{débit} = K\dfrac{P_i A}{\sum(M)\sqrt{T_i}}\right)$ valant 0,040415.

si P_i est exprimé en Pascal, A en m^2 et T_i en degré K.

<u>Cas particulier en incompressible ($\rho = C^t$)</u>

$$Ad(p+\rho V^2) = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_f \Pi D dx \qquad \left.\begin{array}{l}\rho = C^t\\ \rho V A = C^t\\ A = C^t\end{array}\right\} \Rightarrow V = C^t$$

$$\text{et} \quad \rho V^2 = C^t$$

$$Adp = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_f \Pi D dx$$

$$\frac{\Pi D^2}{4}\Delta p = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_f \Pi D \Delta x$$

$$D\Delta p = -2\rho V^2 C_f \Delta x \quad \text{soit} \quad \Delta p = -2\frac{\rho V^2}{D}C_f \Delta x$$

$$\Delta p = -2\frac{\rho V A V C_f}{AD}\Delta x$$

$$\text{et} \quad \boxed{\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = -4\frac{C_f}{D}\Delta x}$$

$$\Delta p = -8\frac{Q V C_f}{\Pi D^3}\Delta x$$