

MODELISATION MONODIMENSIONNELLE DES PERTES PAR DIFFUSION

G. MEAUZÉ

La modélisation proposée ci-après est très rudimentaire ; elle ne vise qu'une formulation recoupant approximativement la synthèse des résultats expérimentaux relatifs à des diffuseurs coniques.

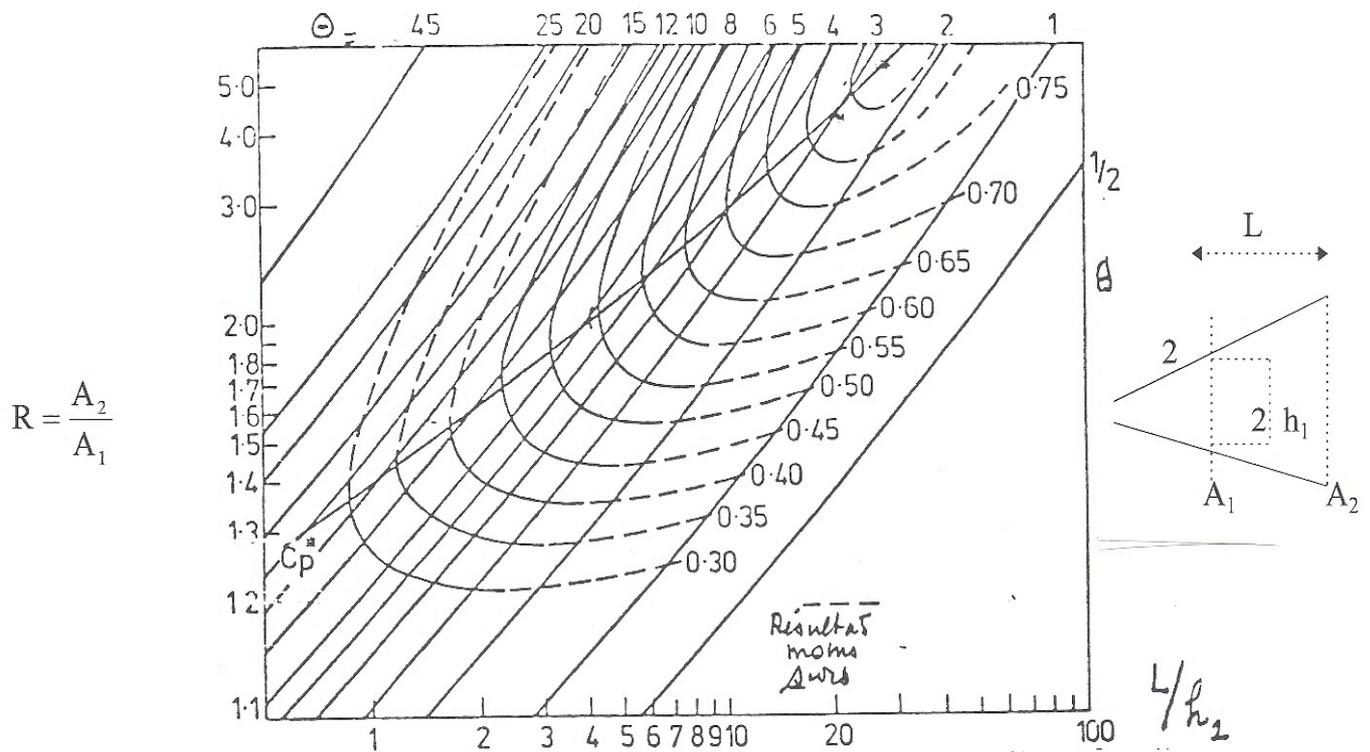


Fig. 1 : Diffuseurs coniques

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{q_1} = f\left(\frac{A_2}{A_1}, \frac{L}{h_1}\right)$$

Le diagramme de la figure 1 représente en coordonnées logarithmiques cette synthèse relative à des diffuseurs coniques alimentés à l'entrée de hauteur h_1 par un écoulement turbulent pleinement développé (c'est-à-dire placés à l'extrémité d'une conduite de plus de 30 diamètres de long) et débouchant dans une atmosphère de pression p_2 .

Les courbes iso-C_p sont tracées en fonction de la longueur L, rapportée à h₁ et du paramètre d'ouverture R. Les droites * = cte représentent bien entendu la relation géométrique.

$$R = \frac{A_2}{A_1} = \left(1 + \frac{L}{h_1} \operatorname{tg} \ominus\right)^2$$

(noter que l'angle total d'ouverture est 2 * et non *)

La modélisation est obtenue à partir des hypothèses décrites ci-après :

on part de l'équation de quantité de mouvement monodimensionnelle, écrite sous la forme :

$$dp + d(\rho v^2) + \rho v^2 \frac{dA}{A} = -\frac{\Delta F}{A} \quad (1)$$

où ΔF représente une force volumique qui est souvent utilisée pour simuler l'effet de la viscosité grâce à un frottement (par exemple $\Delta F = -\frac{1}{2}\rho v^2 \cdot C_f \cdot l \cdot dx$).

Mais dans le cas d'un diffuseur, il est bien connu que les pertes par frottements restent faibles. Pour modéliser les pertes dans un diffuseur, nous admettons que cette force ΔF est proportionnelle à Adp : soit $\frac{\Delta F}{A} = C_d dp$ où C_d est un coefficient ne dépendant que de la géométrie du diffuseur.

L'approximation $\frac{\Delta F}{A} = C_d dp$ a été choisie par analogie avec la relation, exacte dans un élément adiabatique à section constante, $\frac{\Delta F}{pA} = \frac{\Delta P_i}{P_i}$.

On obtient ainsi :
$$\boxed{dp(1 + C_d) + d(\rho v^2) + \rho v^2 \frac{dA}{A} = 0} \quad (2)$$

Si l'on admet de pouvoir négliger les variations de la masse volumique ρ, les vitesses étant faibles dans un diffuseur surtout en sortie, la conservation du débit permet d'écrire :

$$d(\rho v^2) = -2\rho v^2 \frac{dA}{A} \quad \text{avec } A = \Pi R^2$$

d'où
$$dp(1 + C_p) = \rho v^2 \frac{dA}{A} = \rho_0 V_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4 \times 2 \frac{dR}{R}$$

soit
$$\frac{dp}{dx} (1 + C_d) = 2 \frac{\rho_0 V_0^2 R_0^4}{R^5} \frac{dR}{dx} \quad (3)$$

Si l'on distingue par α le demi-angle du diffuseur conique considéré, on a $R = R_0 + x \operatorname{tg} \alpha$
 et $\frac{dR}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$.

(3) devient
$$\frac{dp}{dx} (1 + C_d) = 2 \frac{\rho_0 V_0^2 R_0^4}{(R_0 + x \operatorname{tg} \alpha)^5} \operatorname{tg} \alpha$$

soit
$$\frac{dp}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 + C_d} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{R_0}\right)}{\left(1 + \frac{x}{R_0} \operatorname{tg} \alpha\right)^5} \quad (4)$$

L'intégration donne :
$$\frac{P}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} = -\frac{1}{1 + C_d} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0} \operatorname{tg} \alpha\right)^4} + C^t$$

La constante est déterminée par
$$\frac{P_0}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} = -\frac{1}{1 + C_d} + C^t$$

On obtient finalement :
$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} = \frac{1}{(1 + C_d)} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R_0} \operatorname{tg} \alpha\right)^4} \right] \quad (5)$$

On pourra constater que l'évolution du C_p en fonction de la longueur du diffuseur donnée par (5), pour un angle α constant, recoupe de façon remarquable les résultats expérimentaux correspondant au graphique (figure 1).

Il est bien entendu nécessaire d'ajuster la valeur de C_D pour chaque valeur de α .

La relation suivante est proposée : $C_d = 0.18 + 10.2 (\operatorname{tg}\alpha - 0.04)^{1.4}$.

Sans justification rigoureuse, la modélisation ci-dessus sera appliquée dans le cas d'un diffuseur dont la variation de section peut être quelconque (même dans le cas d'un écoulement compressible, et le cas échéant en instationnaire) en utilisant pour chaque section la valeur locale de C_D donnée par $C_d = 0,18 + 10,2 \left(\frac{dR}{dx} - 0.04 \right)^{1.4}$.

D'une façon très générale, la simulation des pertes autres que celles par onde de choc, est introduite dans l'équation de quantité de mouvement de la façon suivante :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho V^2)}{\partial x} + \rho V^2 \frac{dA}{Adx} = -\rho V^2 \frac{C_f}{R} \varepsilon - C_d \frac{dp}{dx} (1 - \varepsilon)$$

avec $\varepsilon = 1$ si l'écoulement est accéléré (avec $dA \leq 0$)

$\varepsilon = 0$ si l'écoulement est décéléré ($dA/dx > 0$ et $M < 1$, $dA/dx < 0$ et $M > 1$)