



# Projet modélisation Assimilation de données sur un modèle d'ondes de crues

Delplanque Alain, Guth Jonathan, Raynaud Damien

Encadré par Sophie Ricci (CERFACS) et Olivier Pannekoucke (CNRM/GAME)

23 Février 2011

# Introduction

→ Cadre : simulation  
hauteur d'eau d'une rivière  
+ crues

→ mise en place d'une  
assimilation de données



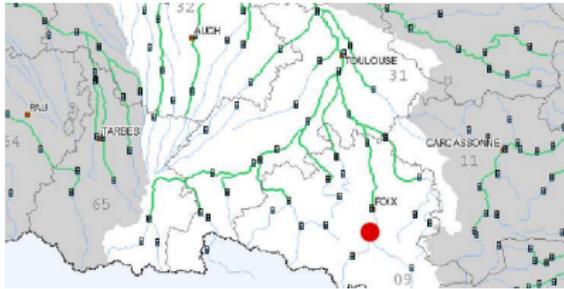
Exemple carte de vigilance

→ Propagation des fonctions de covariance d'erreur d'ébauche

# Plan

- 1 Introduction à l'assimilation de données
- 2 Modèle numérique du modèle d'ondes de crues
- 3 Dynamique des covariances et résultats sans assimilation
- 4 Expériences numériques d'assimilation

# Assimilation de données pour un cours d'eau

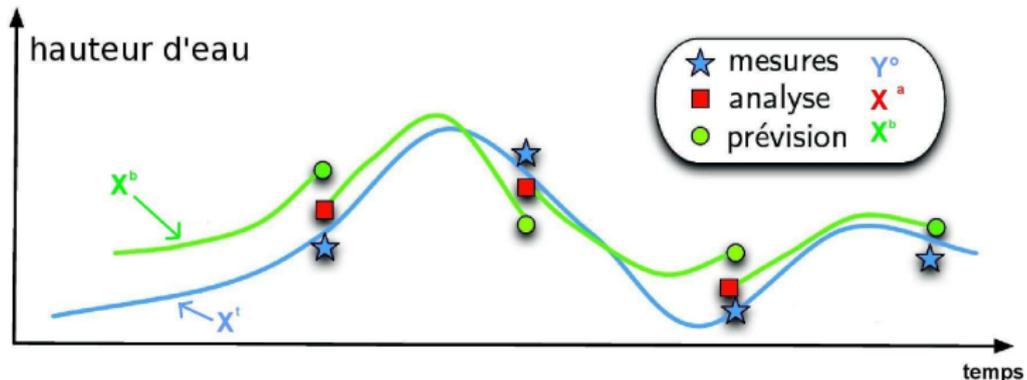


Bassin versant Garonne  
et stations de mesures



Mesure de hauteurs d'eau  
Station de Bompas (09)

# Correction schématique de hauteurs d'eau



Erreurs d'ébauche :  $\mathbf{X}^t - \mathbf{X}^b = \varepsilon^b$

Erreurs d'observation :  $\mathbf{Y}^o - \mathbf{H}\mathbf{X}^t = \varepsilon^o$

Avec  $\mathbf{H}$ , opérateur d'observation

# Matrices de covariance d'erreur

$$\mathbf{X}^t - \mathbf{X}^b = \boldsymbol{\varepsilon}^b$$

En tout point d'espace



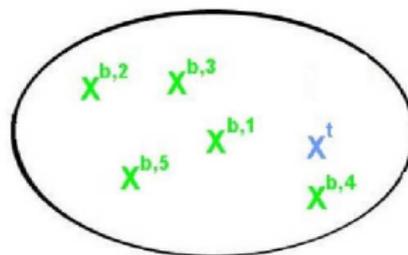
$$\boldsymbol{\varepsilon}^b$$



Matrice de covariance  
d'erreur d'ébauche

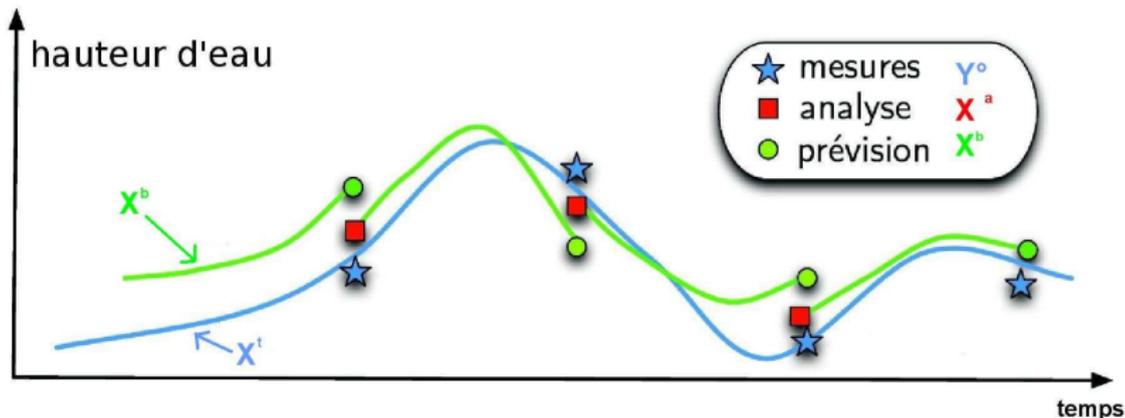
$$\mathbf{B} = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^b(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T]$$

Détermination  
par méthode ensembliste



On définit de même la matrice de covariance d'erreur  
d'observations  $\mathbf{R} = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^o(\boldsymbol{\varepsilon}^o)^T]$

# Formulation du BLUE



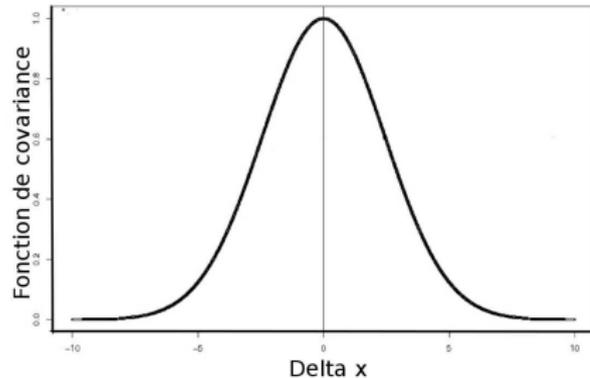
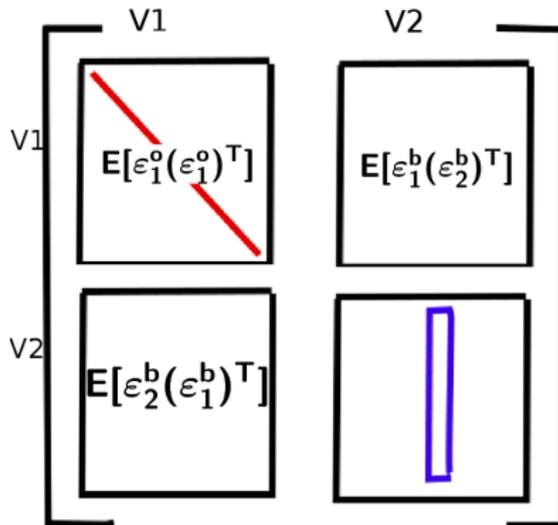
Meilleur estimateur linéaire non biaisé

$$\mathbf{X}^a = \mathbf{X}^b + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}}_{\mathbf{K}}(\mathbf{Y}^o - \mathbf{H}\mathbf{X}^b)$$

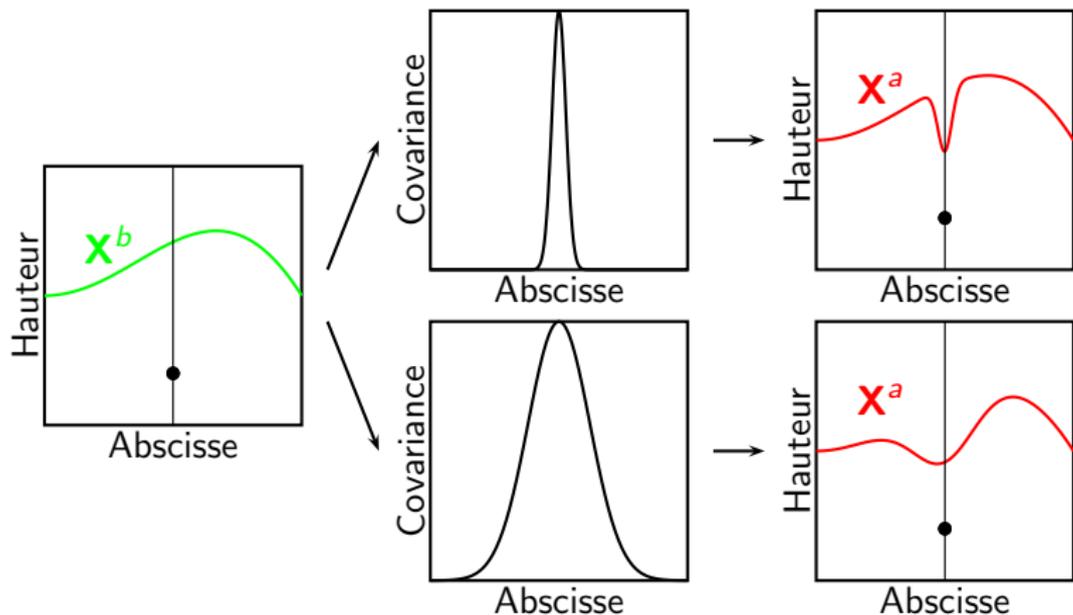
# Importance de B

Autre formulation du BLUE :

$$\mathbf{X}^a - \mathbf{X}^b = \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}}_{\delta\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{Y}^o - \mathbf{H}\mathbf{X}^b).$$



# Influence des fonctions de covariance



Ébauche (courbe)    Fonction de covariance  
 Observation (point)    au point d'observation

# Filtre de Kalman

Phase d'analyse :

$$\mathbf{X}_i^a = \mathbf{X}_i^b + \mathbf{K}_i(\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{H}_i\mathbf{X}_i^b) \quad \Rightarrow \text{BLUE}$$

$$\mathbf{A}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i) \mathbf{B}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{E}(\varepsilon_i^a(\varepsilon_i^a)^T)$$

Phase de prévision :

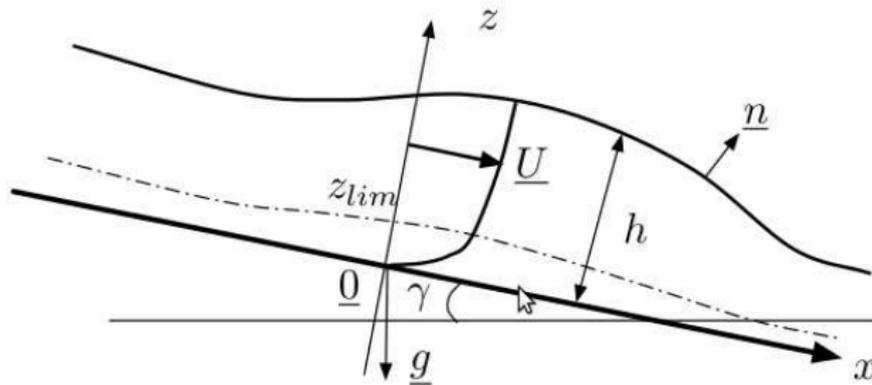
$$\mathbf{X}_{i+1}^b = \mathbf{M}\mathbf{X}_i^a \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} \text{ la matrice du modèle}$$

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{A}_i\mathbf{M}^T \quad \mathbf{B} \text{ suit la dynamique du problème}$$

# Plan

- 1 Introduction à l'assimilation de données
- 2 **Modèle numérique du modèle d'ondes de crues**
- 3 Dynamique des covariances et résultats sans assimilation
- 4 Expériences numériques d'assimilation

# Physique du problème



Canal incliné à fond plat

# Les équations de Saint-Venant et d'ondes de crues

Equations de Saint-venant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \cos \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \gamma - \frac{Cf U|U|}{2h} \end{cases}$$

Equation d'ondes de crues :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2}$$

avec  $\tilde{h}$  l'anomalie de hauteur d'eau.

# Schéma numérique

L'équation à discrétiser est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

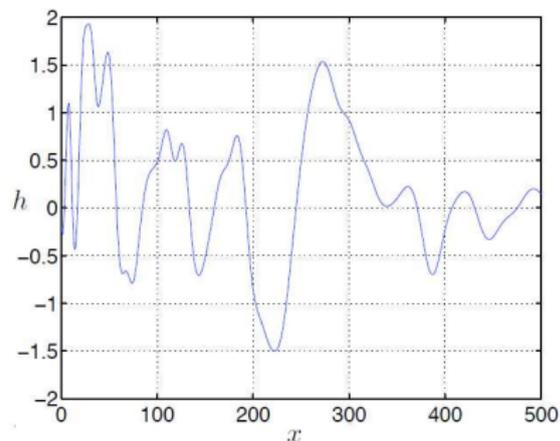
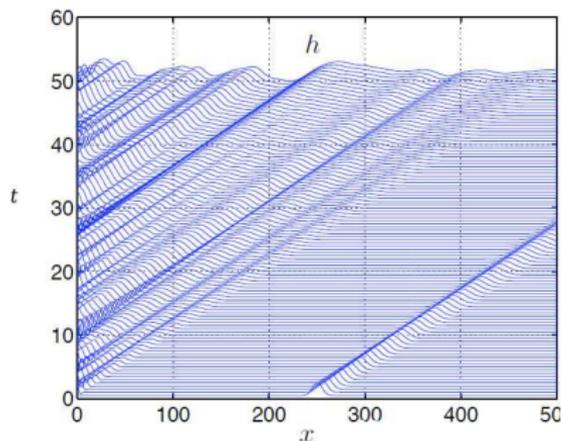
La discrétisation utilisée :

$$\frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta t} + c \frac{h_i^{j+1} - h_i^{j-1}}{2\Delta x} = \kappa \frac{h_i^{j+1} - 2h_i^j + h_i^{j-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation équivalente est :

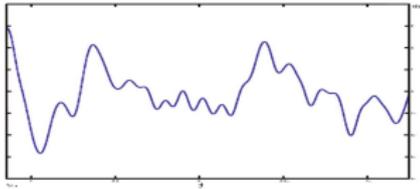
$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - \underbrace{\left( \frac{c\Delta x^2}{6} + c\kappa\Delta t \right)}_{\text{dispersion}} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \underbrace{\left( \kappa - \frac{c^2\Delta t}{2} \right)}_{\kappa'} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \underbrace{\left( \frac{\kappa^2\Delta t}{2} - \frac{\kappa\Delta x^2}{12} \right)}_{\text{dissipation}} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

# Exemple de propagation par le modèle

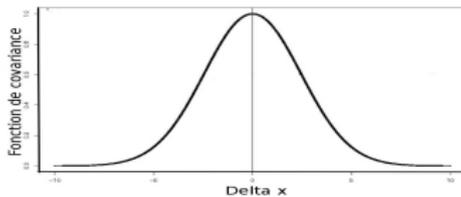
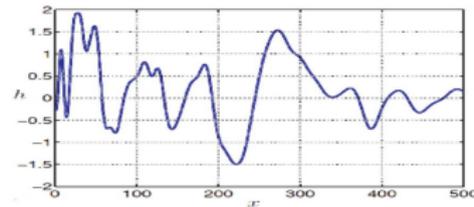


Exemple de propagation par le modèle d'ondes de crues

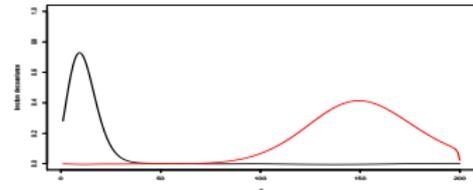
# Construction du forçage amont



Condition  
à la limite



Information

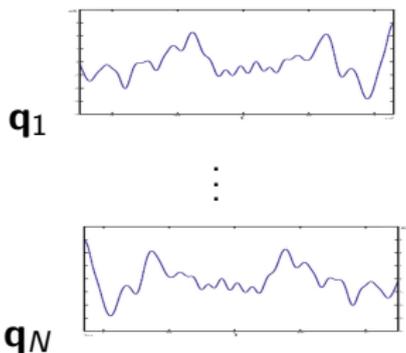


# Plan

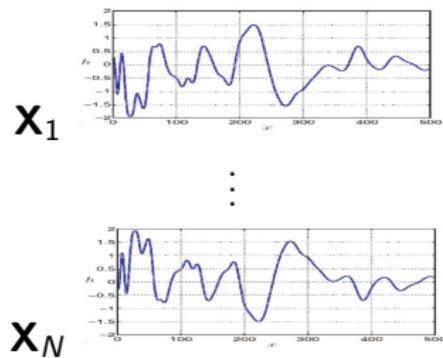
- 1 Introduction à l'assimilation de données
- 2 Modèle numérique du modèle d'ondes de crues
- 3 Dynamique des covariances et résultats sans assimilation
- 4 Expériences numériques d'assimilation

# Estimation de $\mathbf{B}_e$

Conditions à la limite



Propagation  
par le modèle

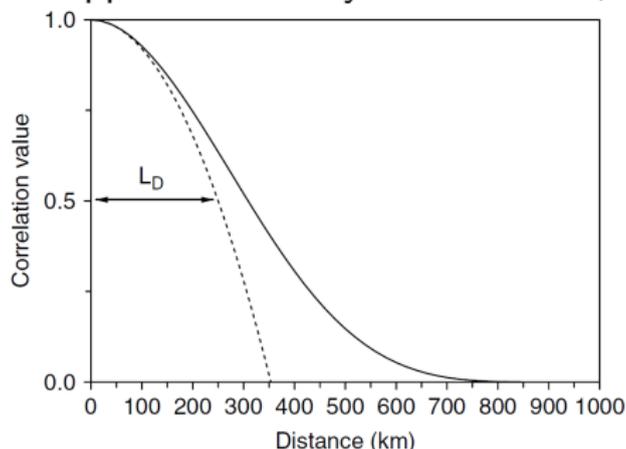


Estimation de  $\mathbf{B} \approx$

$$\mathbf{B}_e = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ((\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}})^T)$$

# Notion de longueur de portée

En considérant une fonction de corrélation  $\rho$ , et son développement de Taylor à l'ordre 2, il vient :

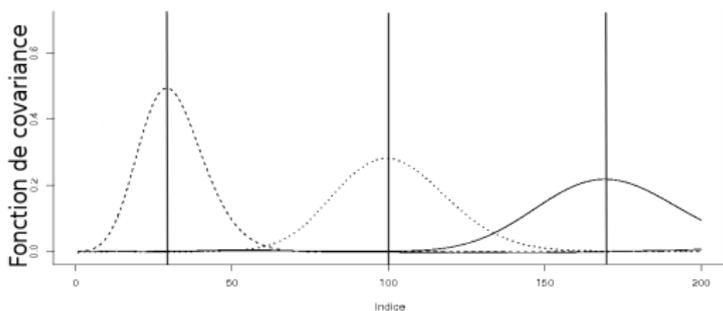
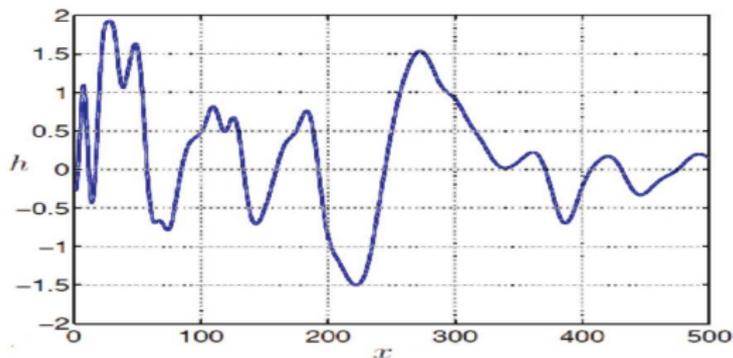


$$\rho(\delta x) \approx \rho(0) + \frac{\delta x^2}{2} \frac{d^2 \rho(0)}{dx^2}$$

$$\rho(\delta x) \approx 1 - \frac{\delta x^2}{2L_p^2}$$

$$L_p = \frac{\delta x}{\sqrt{2(1 - \rho(\delta x))}}$$

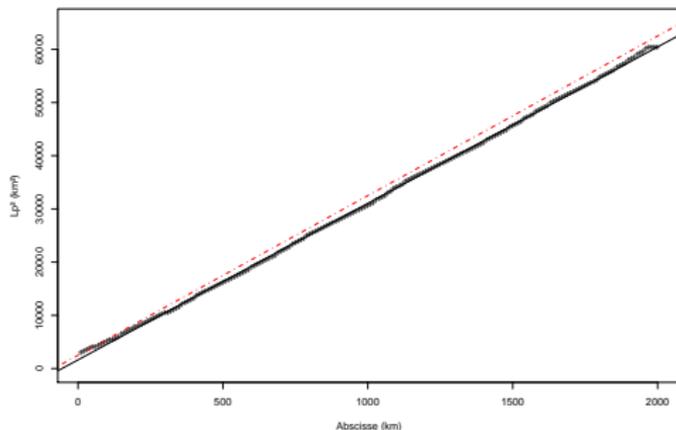
## Résultats théorique et numérique



Représentation de colonnes de la matrice  $\mathbf{B}_e$

## Résultats théoriques et numériques

Théoriquement :  $Lp_x^2 = c^2(\tau^2 + 4\kappa x/c^3) = Lp_0^2 + 4\kappa x/c$



Estimation des longueurs de portée à partir de la matrice  $\mathbf{B}_e$

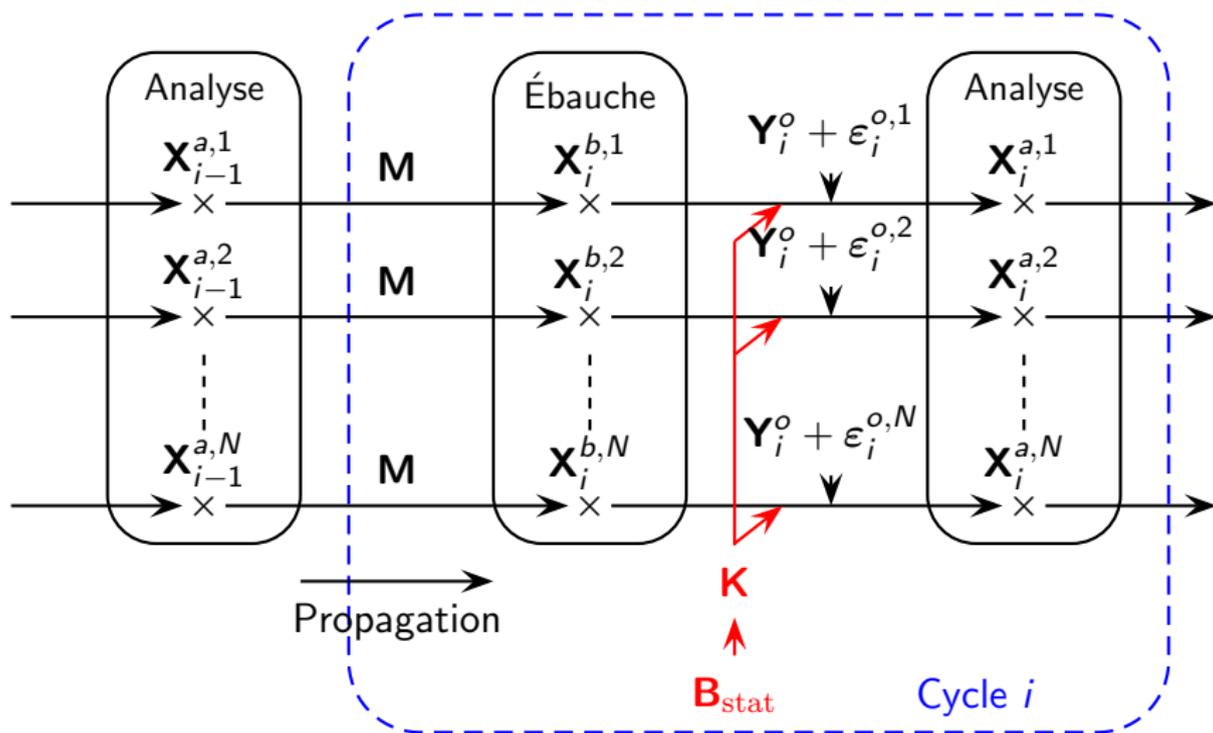
# Plan

- 1 Introduction à l'assimilation de données
- 2 Modèle numérique du modèle d'ondes de crues
- 3 Dynamique des covariances et résultats sans assimilation
- 4 Expériences numériques d'assimilation

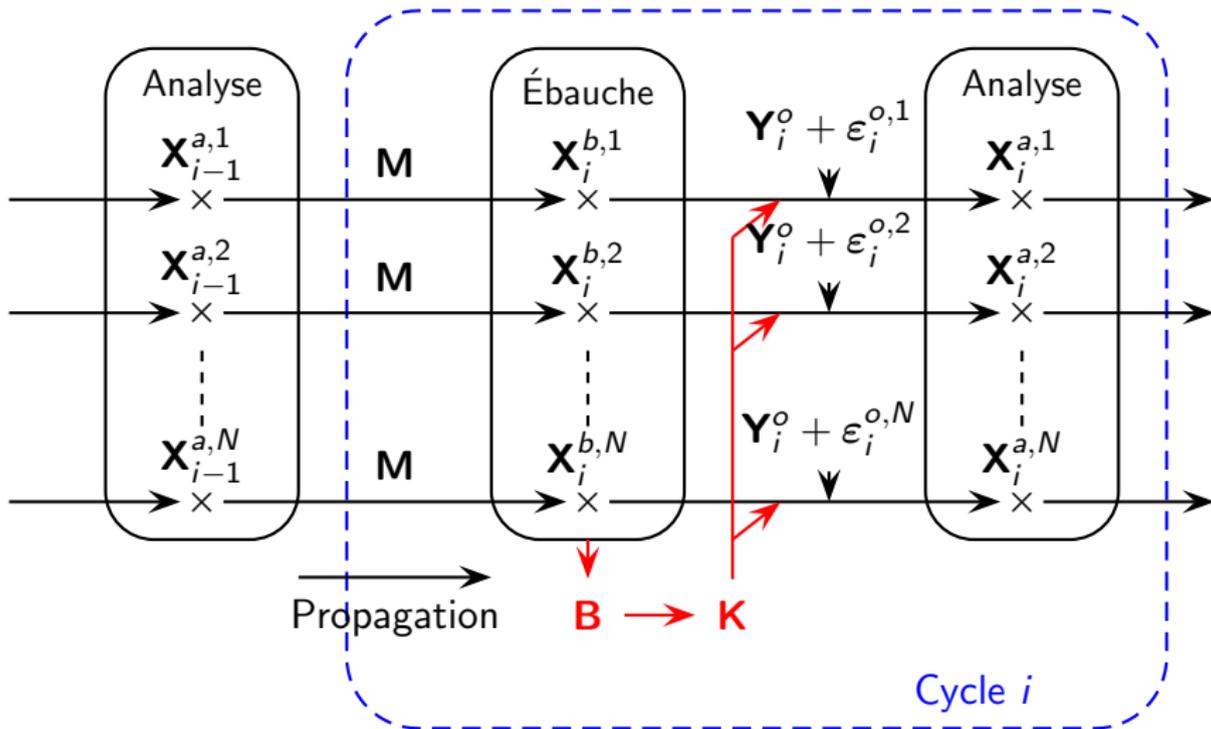
# Les différentes méthodes d'assimilation envisagées

- Sans prise en compte de la dynamique :  
Série d'assimilation selon la méthode du BLUE.
- Avec prise en compte de la dynamique : Calcul de  $\mathbf{B}$  à chaque cycle.
  - Filtre de Kalman d'ensemble, calcul ensembliste de  $\mathbf{B}$  ;
  - Filtre de Kalman,  $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^T$ .

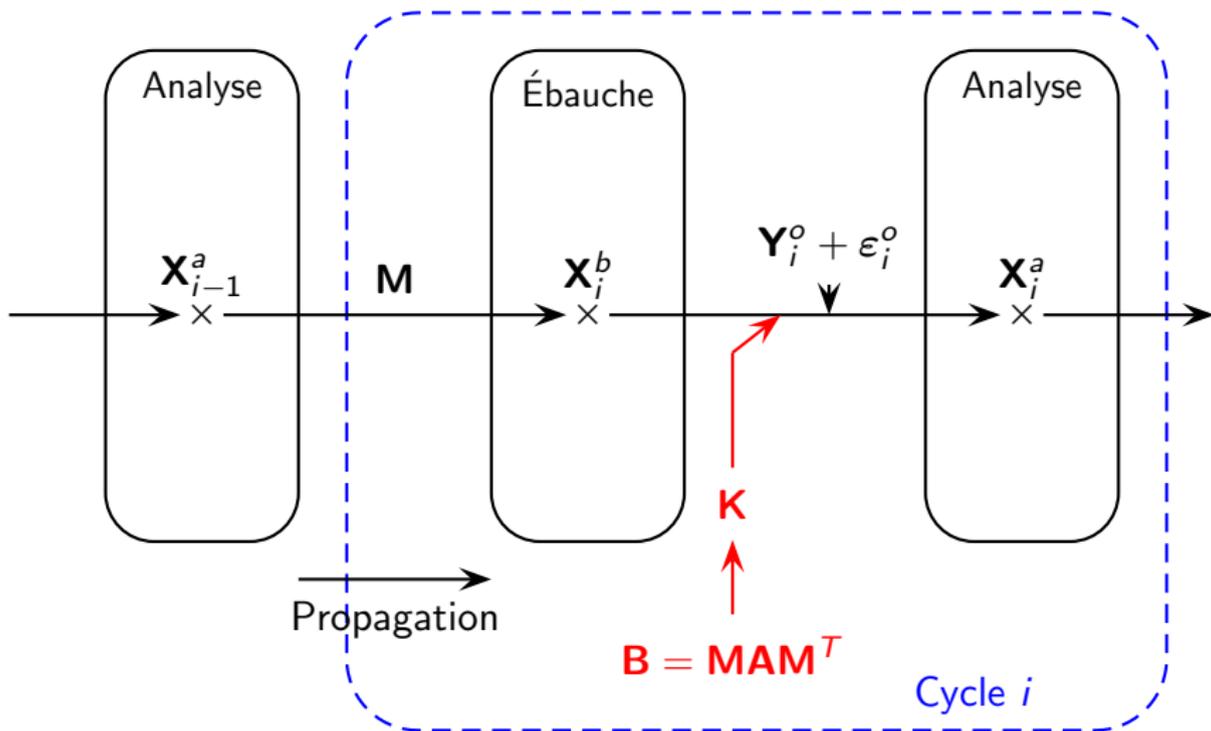
# BLUE cyclé



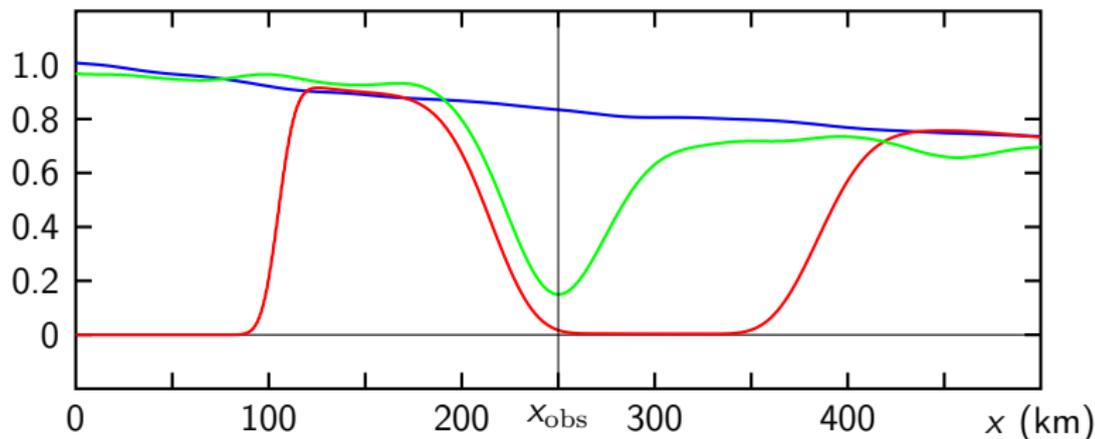
## Filtre de Kalman d'ensemble



# Filtre de Kalman

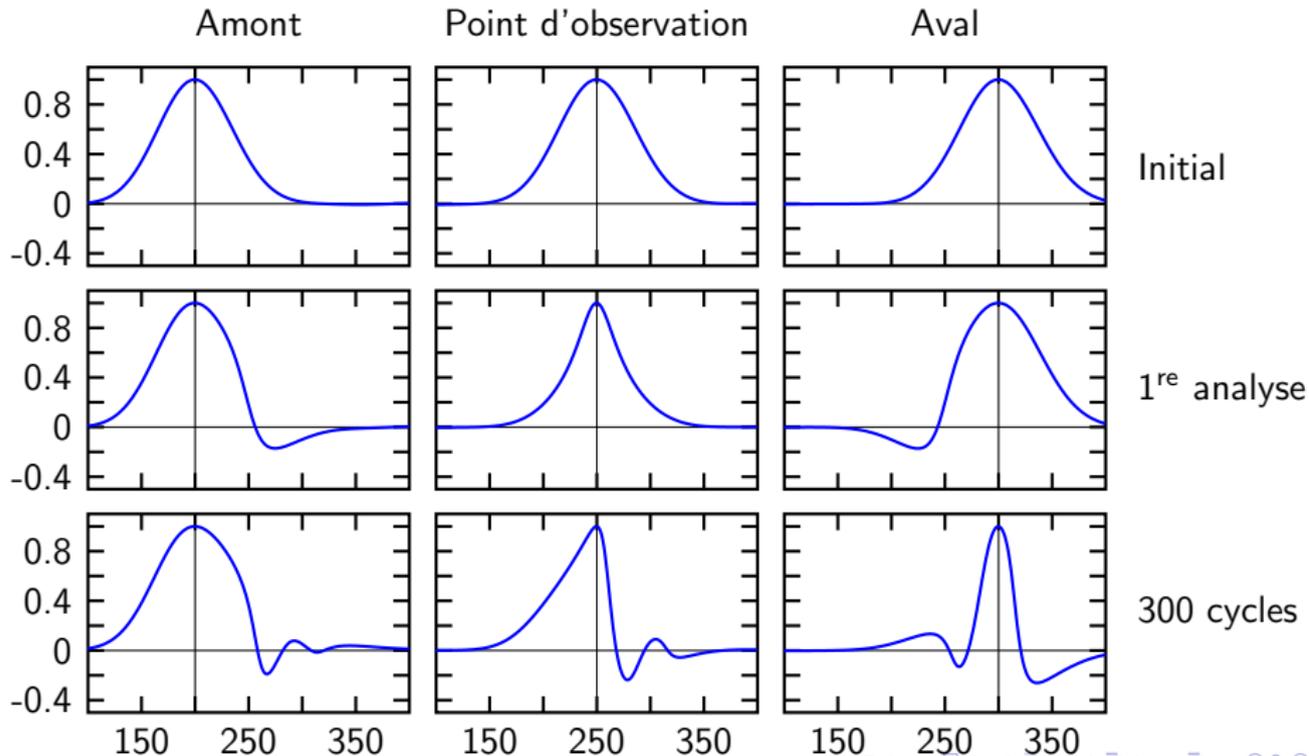


# Évolution des variances d'erreur d'ébauche

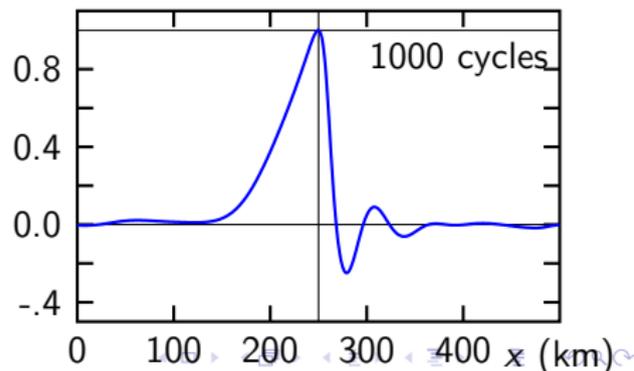
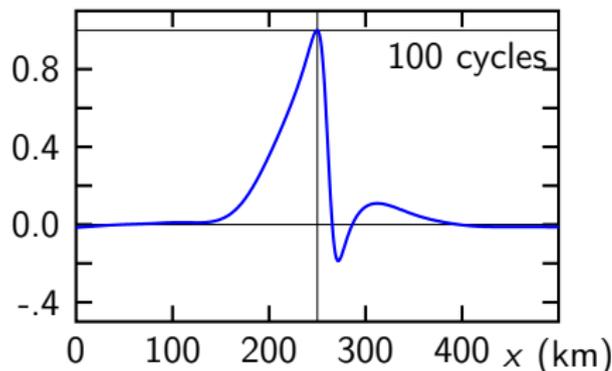
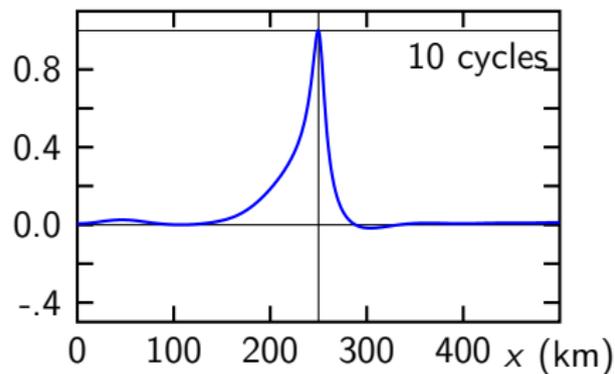
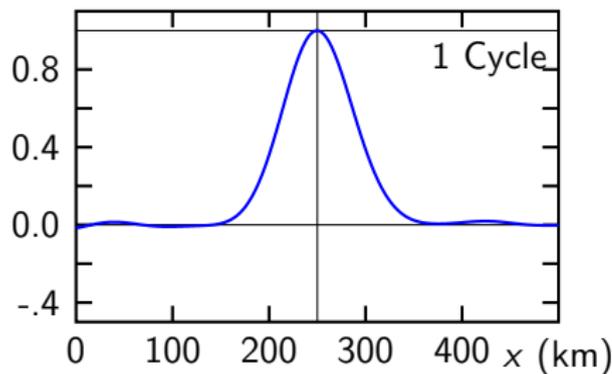


- État initial ;
- Filtre de Kalman (400 cycles)  $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^T$  ;
- BLUE cyclé (1950 cycles – advection sur l'intégralité du bief).

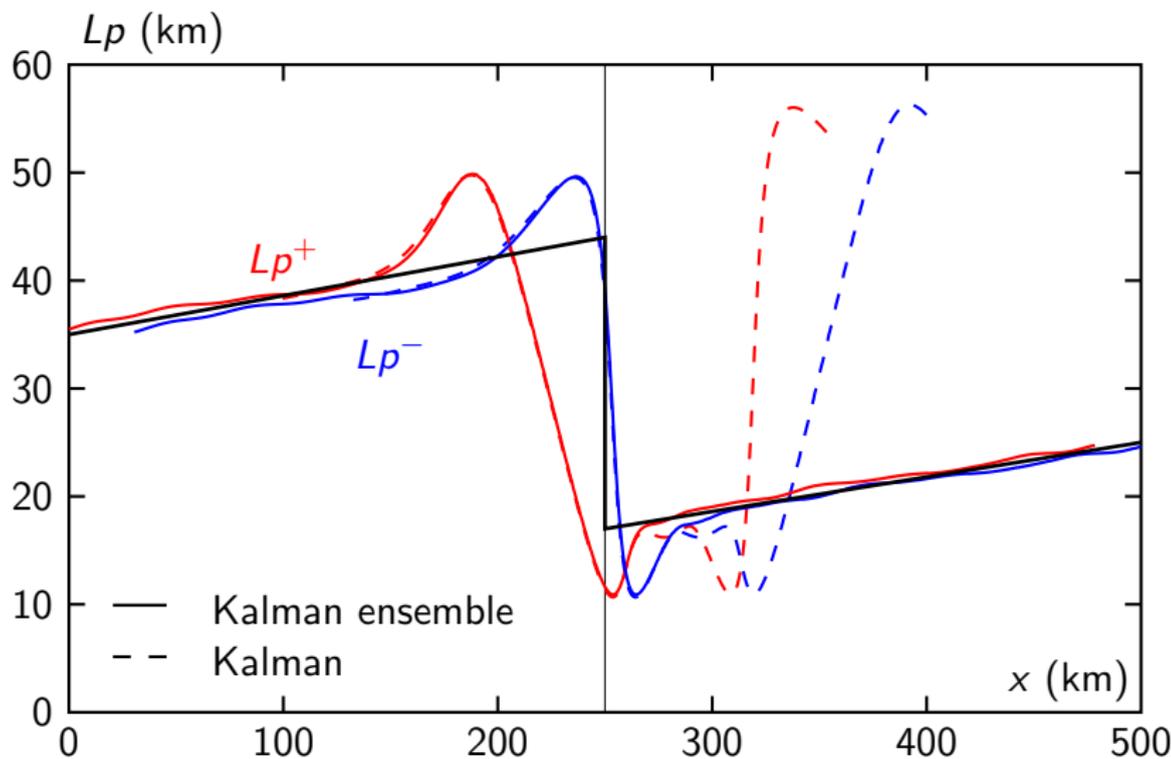
# Fonctions d'autocorrélation



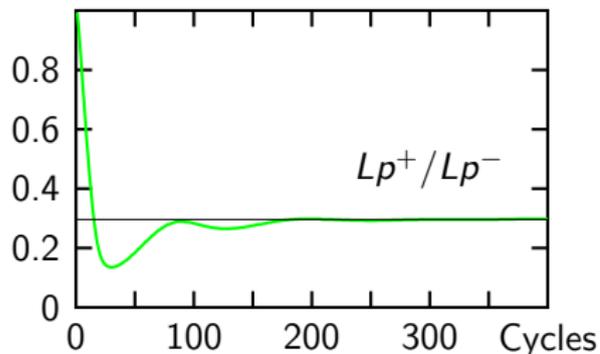
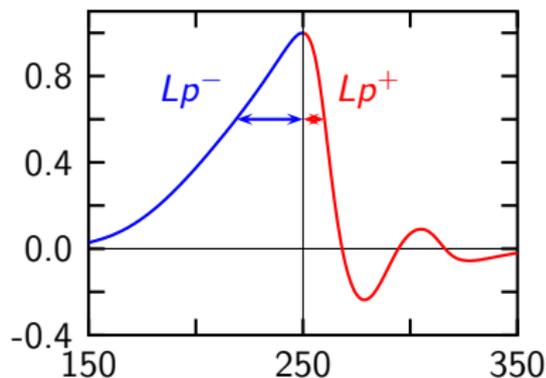
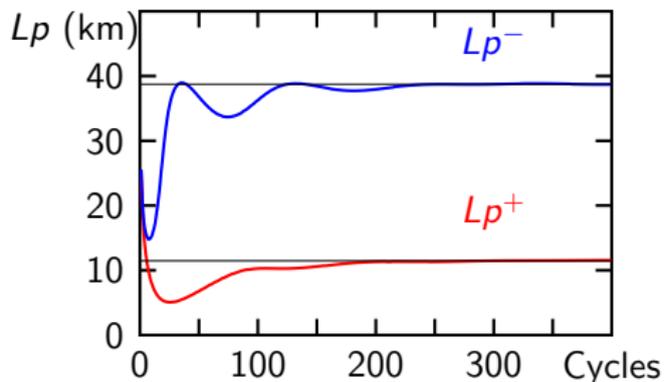
# Fonction d'autocorrélation – Filtre de Kalman d'ensemble



# Évolution des longueurs de portée sur le domaine



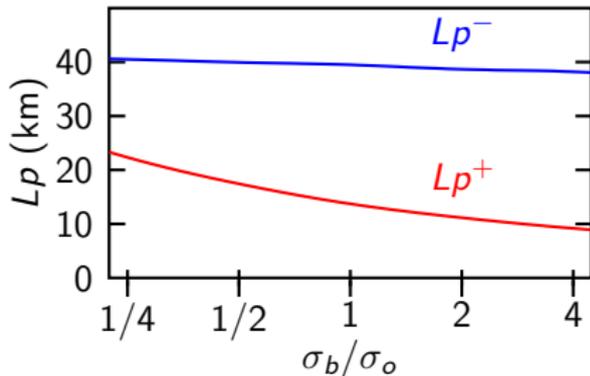
# Évolution des longueurs de portée dans le temps



Longueurs de portée au point d'observation selon le nombre de cycles :

- Convergence après 150 cycles ;
- Forte anisotropie.

# Quotient $Lp^+ / Lp^-$ en fonction de $\sigma_b / \sigma_o$



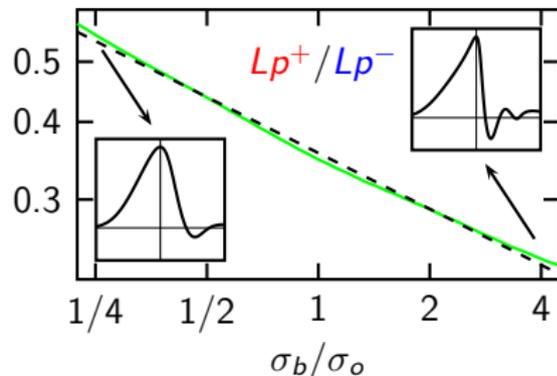
Augmentation précision de l'observation

⇒ diminution  $Lp^+$

⇒ diminution du quotient

$Lp^+ / Lp^-$ .

- Faible influence amont  $Lp^-$  ;
- Forte influence aval  $Lp^+$  ;



# conclusion

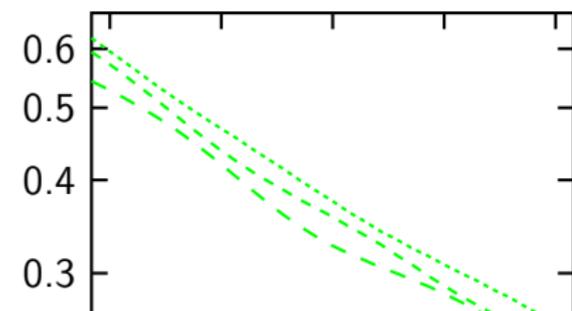
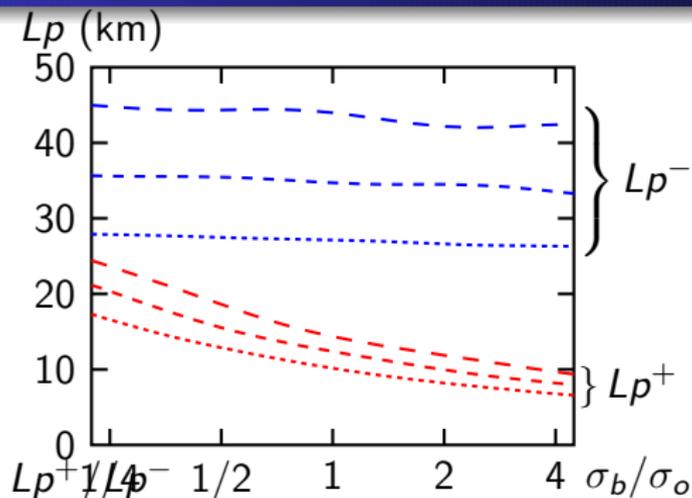
Ce qui a été fait :

- Etude du schéma numérique du modèle
- Création d'un forçage d'entrée convenable
- Contournement du problème d'absence d'incertitude en entrée
- Etude de la dynamique des covariances

Perspectives :

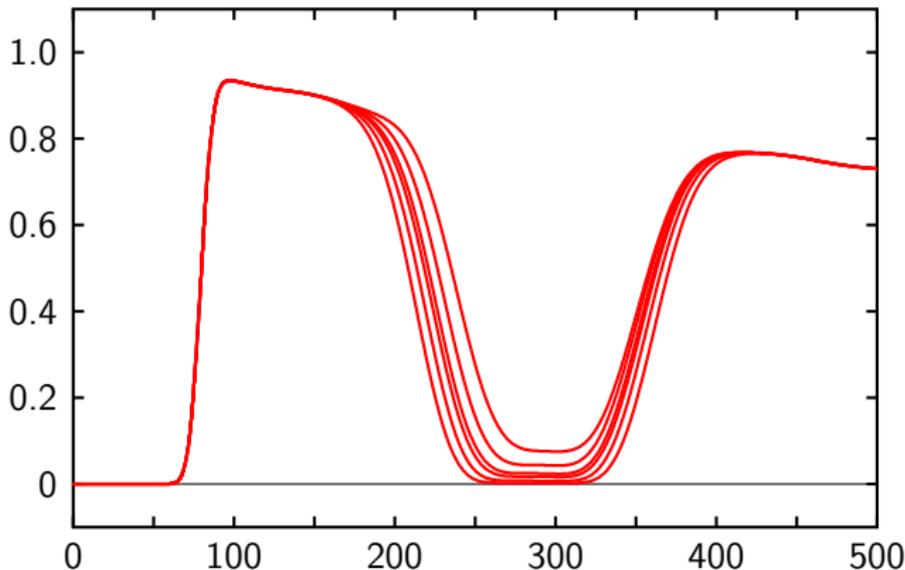
- Paramétrisation de **B**
- Comparaison avec le filtre de Kalman sur le modèle simple
- Application au modèle Mascaret

## Influence du temps caractéristique



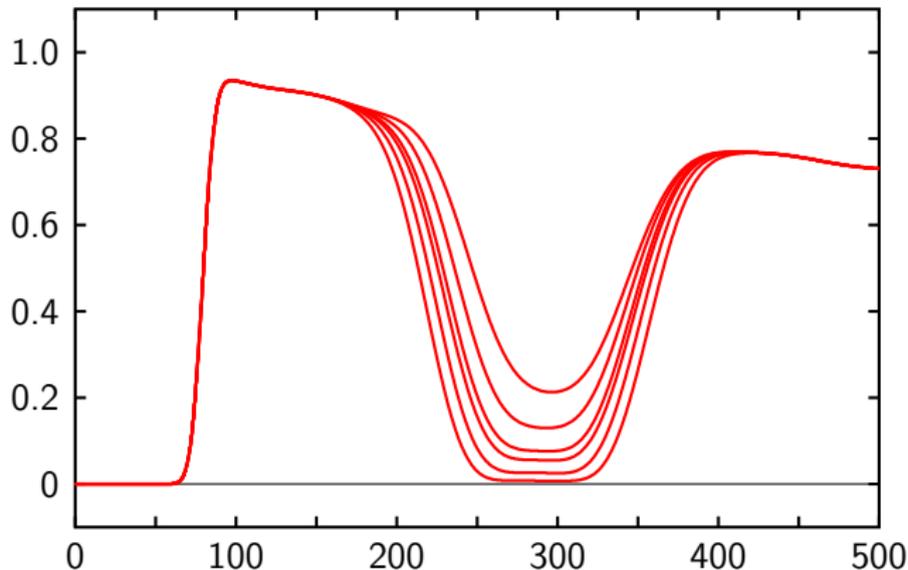
## Variance B Kalman

Variance tout au long du bief. 300 pas de temps, fréquence d'observation de 1 à 1/60,  $\sigma_o = 0.5$ .



## Variance **B** Kalman

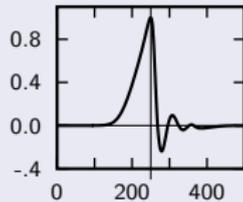
Variance tout au long du bief. 300 pas de temps, fréquence d'observation de 1 à 1/60,  $\sigma_o = 1$ .



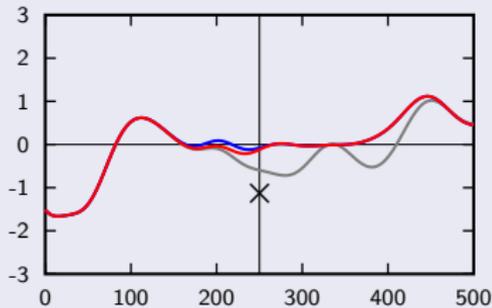
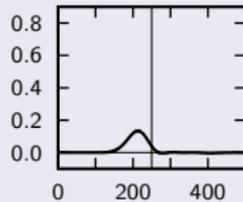
# Comparaison Kalman – BLUE

## Kalman (500 cycles) :

Autocorrélation :

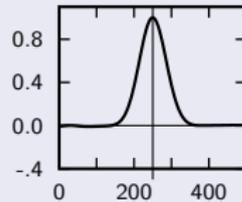


Gain :

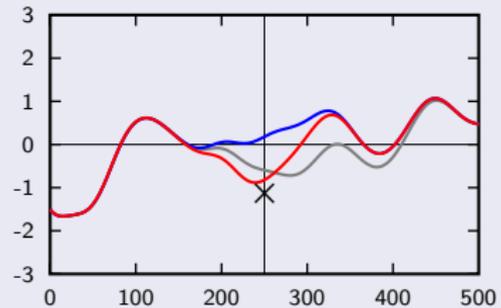
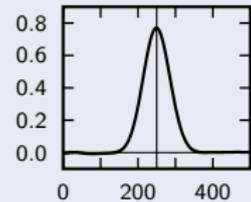


## BLUE (500 cycles) :

Autocorrélation :

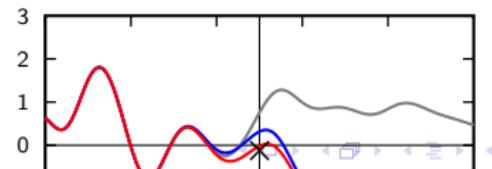
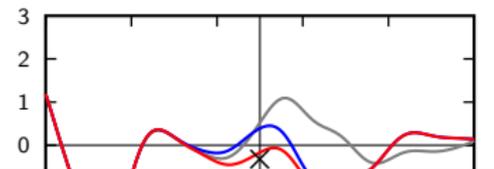
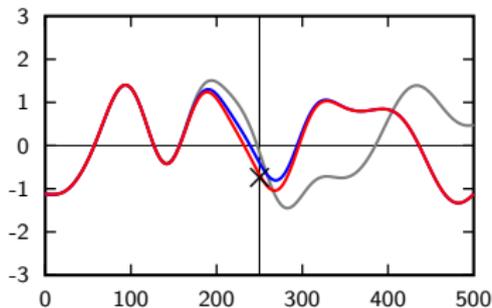
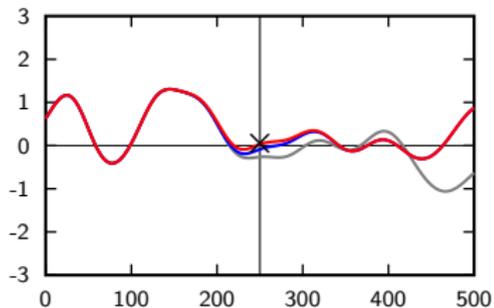
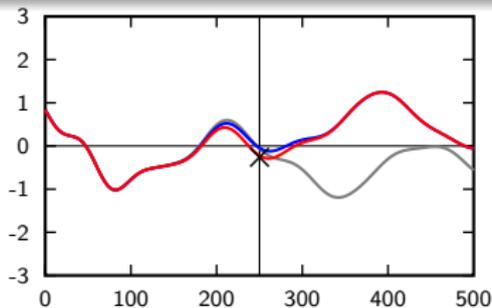
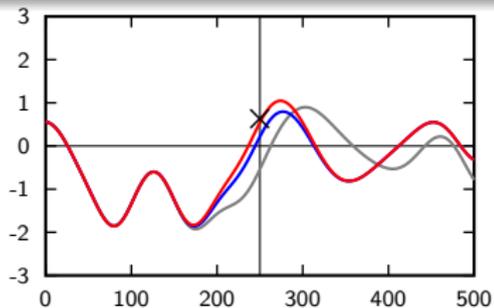


Gain :

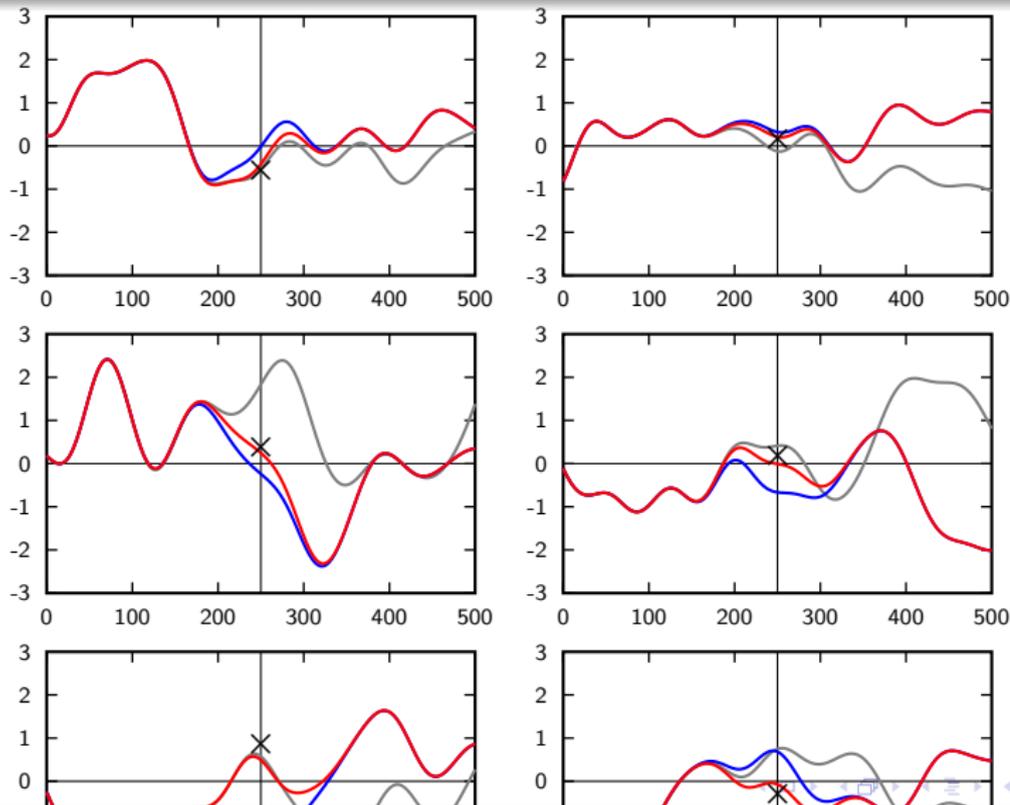


— Sans assimilation ; — Ébauche ; — Analyse.

# BLUE – 1500 cycles



## BLUE – 1500 cycles



## BLUE – 1500 cycles

