

Quantification des incertitudes liées aux paramètres des modèles hydrauliques  
Application aux coefficients de frottement avec le modèle Mascaret Marne Amont Global

Mai 2014

## Sommaire

1. Introduction.....	1
2. Méthodologie.....	1
3. Protocole de test des différents paramètres.....	2
3.1. La variance de la gaussienne.....	3
3.2. Le nombre de perturbations.....	3
3.3. La condition initiale.....	4
3.4. Impact du débit sur la sensibilité de la hauteur d'eau au Ks en régime permanent :.....	5
4. Analyse des distributions de perturbations de hauteurs d'eau liées à la perturbation des Ks : .....	8
4.1. Cas Permanent.....	8
4.2. Cas non-permanent.....	11
5. Conclusion :.....	15
Annexe :.....	15

## 1. Introduction

Les écoulements dans les rivières sont influencés par la granulométrie et la turbulence du fond des rivières. Le transport solide change le débit et par conséquent la nature de l'écoulement d'où la nécessité d'une bonne paramétrisation des coefficients de frottement et de la bathymétrie. Cette dynamique interne dans l'écoulement dues aux frottements pariétaux, le transport solide et la granulométrie font que la modélisation du coefficient de frottements devrait être un paramètre variable dans le temps et dans l'espace. Cependant la modélisation de ce coefficient est en réalité faite sous la forme d'un coefficient constant dans le temps et dans l'espace. Par conséquent, il est important de quantifier les erreurs dues aux incertitudes sur la paramétrisation du coefficient de frottement dans les équations de Saint-Venant. On se propose ici, de réduire l'erreur liée au coefficient de frottement en le considérant comme vecteur de contrôle d'un problème d'assimilation de données.

L'objet plus général de ces travaux est de disposer d'un outil permettant de quantifier les erreurs sur les hauteurs et les débits simulés liées à la paramétrisation des modèles hydrauliques. L'outil est dans un premier temps testé pour quantifier les erreurs relatives aux coefficients de Strickler (Ks) puis sera testé pour quantifier l'incertitude liée à la bathymétrie dans une étude ultérieure.

## 2. Méthodologie

Le Service de Prévision des Crues Seine Amont Marne Amont (SPC SAMA) utilise le code hydraulique 1D Mascaret pour effectuer en temps réel des prévisions sur l'amont de la rivière Marne. Il a

été montré que l'ajout local de données bathymétriques a permis de résoudre une erreur systématique de modélisation des hauteurs d'eau à la station de Mussey alors que les débits étaient correctement simulés. Toutefois, dans le cas où l'on ne dispose pas de données supplémentaires, il est aussi possible de corriger localement les Ks afin de modifier la ligne d'eau calculée par le modèle sans dégrader les débits modélisés. L'écart entre les hauteurs observées et modélisées à Mussey variant dans le temps, la correction locale du Ks doit elle aussi être adaptée temporellement via l'algorithme de l'assimilation de données de hauteurs d'eau. Afin de tester cette méthode, des tests préliminaires de sensibilité aux Ks des lits mineurs et majeurs ont été effectués pour mesurer l'impact sur les hauteurs et les débits d'une correction locale des Ks à Mussey. Il en ressort d'une part que seule la hauteur d'eau est impactée et d'autre part que la sensibilité aux Ks de la hauteur simulée est non-linéaire, les deux points ci-dessous sont des manifestations de cette non-linéarité:

- l'impact d'une perturbation positive diffère d'une négative : quand on perturbe une valeur moyenne de Ks par une petite perturbation dKs positivement on diminue alors la hauteur d'eau d'une valeur dh. Par contre, on n'augmente pas de la même valeur dh la hauteur d'eau lorsque l'on perturbe négativement la valeur moyenne de Ks par la même valeur de la perturbation dKs.
- l'impact est fonction du débit au moment de la perturbation, plus le débit est fort plus l'impact de la perturbation sur la hauteur d'eau est fort.

Une première quantification de ces non-linéarités a été effectuée 'manuellement' pour la station de Mussey avec un nombre limité de tests. Afin de pouvoir renouveler l'opération en d'autres points du modèle et pour un plus grand nombre de perturbations, une maquette de quantification des incertitudes a été développée. Cette maquette permet de faire un tirage Monte-Carlo des Ks selon une distribution de probabilité donnée, ce tirage est suivi par l'intégration d'autant de simulations St-Venant à l'aide du code MASCARET en utilisant la fonctionnalité PARASOL. Cette maquette a été développée à l'aide du coupleur de codes O-Palm, se décompose en deux parties: la première permet de tirer selon une distribution les perturbations des Ks pour une variance donnée puis pour chaque tirage, de faire l'intégration Mascaret en incluant la bonne valeur du Ks, cette partie a fait l'objet d'un développement informatique à l'aide du coupleur O-Palm et de la fonctionnalité PARASOL. La seconde partie, écrite avec Matlab, permet de tracer les densités de probabilité (PDF) ainsi que les fonctions de répartition et de calculer les moments des hauteurs d'eau à la sortie des différentes intégrations. Ces étapes sont enchaînées au sein d'un canevas O-PALM. Les intégrations de MASCARET sont faites en parallèle, sur l'ensemble des ressources (le nombre de processeurs) disponibles.

En résumé, nous souhaitons étudier les incertitudes du code MASCARET pour la modélisation de la Marne par rapport aux variations de Ks. Nous allons, dans un premier temps, faire tourner la maquette O-Palm pour en régime permanent. Puis dans un second lieu en régime non-permanent. Ceci nous permettra de faire une analyse à la réponse à la perturbation et quantifier l'incertitude sur la hauteur simulée par rapport aux coefficients de frottements.

### **3. Protocole de test des différents paramètres**

On fait l'hypothèse que le coefficient de frottement est une variable aléatoire qui suit une loi gaussienne. On propose donc de travailler sur les perturbations de Ks autour d'une valeur de référence, représentées par une loi gaussienne centrée réduite. Le tirage stochastique des perturbations de Ks dépend de :

- la variance de la loi normale.
- le nombre de membres de l'ensemble.

Deux paramètres peuvent influencer la réponse à la perturbation :

- le niveau de l'eau au moment de la perturbation (la condition limite amont).
- le temps de simulation nécessaire pour que la condition initiale n'influe plus sur les résultats.

### 3.1. La loi de distribution des Ks :

Les Ks du modèle Mascaret Marne Amont ont été calés de façon à minimiser l'écart entre la simulation et l'observation aux 6 stations de mesure du modèle pour 10 crues indépendamment les unes des autres, on obtient alors pour les différentes zones un Ks moyen, une variance et un écart-type. Cette variance issue du processus de calibration est utilisée pour décrire la loi pour la variable aléatoire de perturbation du Ks. On tire les perturbations des Ks mineur et majeur suivant la même loi de distribution, mais cela peut être amélioré au besoin.

A Mussey, les Ks des lits mineurs et majeurs retenus après calage sont respectivement de 20 et 13, leurs écarts-types de 3 et 4 ce qui nous fait un écart-type moyen de 3,5 soit approximativement une variance de 12. La variance de la distribution de la loi normale retenue pour la suite de cette étude est de 12 soit un écart-type de perturbation des Ks des lits mineurs et majeurs de 3,464.

L'intervalle de confiance (IC) à 68% des perturbations est théoriquement [-3.464;+3.64], l'IC théorique à 95% est [-6.928;+6.928], et enfin l'IC théorique à 97.7% est [-10.392;+10.392]. Le calcul s'arrête (passage à sec) lorsque le Ks du lit mineur est inférieur à 10, un seuil minimal de 10 est donc appliqué dans le fichier ParametreMascaretAssim.cas.

### 3.2. La taille de l'échantillon

Lors du tirage stochastique et du traitement statistique la variance des perturbations de Ks doit converger vers la variance théorique renseignée lors du tirage (Figure 1). Plus le tirage est grand, plus la variance de la répartition tend vers la variance théorique mais plus le calcul sera long. Il faut trouver le compromis idéal entre temps de calcul et vraisemblance des résultats. Les calculs (Tableau 1) ont été réalisés avec une variance de 12, pour une simulation durant 86400s avec un débit constant de 150m<sup>3</sup>/s, dans cette configuration une simulation dure approximativement 4s. Le tableau 1 et la Figure 1 représentent les valeurs des variances des Ks dans le lit majeure et le lit mineurs en fonction du nombre de membres choisis. On déterminera la taille de l'échantillon à partir de la Figure 1 et le tableau 1.

Nombre de tirage	Variance du Ks lit mineur $\sigma_{Ksmin}^2$	Variance du Ks lit majeur $\sigma_{Ksmaj}^2$
10	30.98	7.60
20	18.42	9
50	12.42	13.27
100	12.76	13
200	12.84	13.31
500	12.84	11.22
1 000	12.02	12.40

2 000	12.21	12.41
5 000	12.08	12.33
10 000	11.85	12.21

Tableau 1 : Évolution de la variance des Ks des lits mineurs et majeurs (  $\sigma_{Ksmin}^2$   $\sigma_{Ksmaj}^2$  en m<sup>2</sup>) en fonction de la taille de l'ensemble.

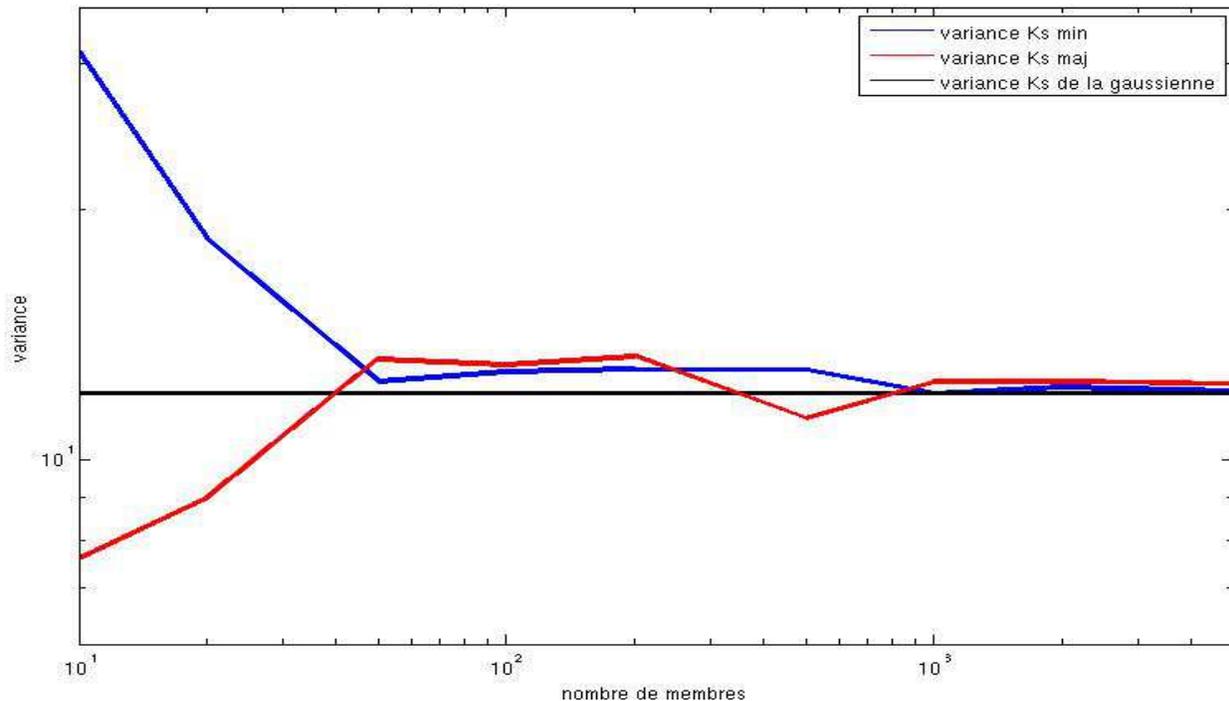


Figure 1: Comparaison de la variance de la gaussienne (droite noire) avec les variances des Ks des lits mineurs (courbe bleue) et majeurs (courbe rouge) obtenus pour les différentes tailles de l'ensemble.

On conclut que 1000 membres est bon compromis pour représenter correctement la loi de distribution gaussienne supposée pour les Ks (soit 2000 tirages si l'on perturbe les Ks mineurs et majeurs) ce qui représente à peu près 1 heure de simulation. Ce temps de calcul peut être largement réduit si on mène les calculs perturbés sur plusieurs processeurs, les simulations étant indépendantes les unes des autres.

### 3.3. La condition initiale

Pour tous les tests que l'on va présenter ici, la condition initiale est calculée de façon à assurer la cohérence avec la condition à la limite. Il est nécessaire d'estimer le temps minimum de simulation pour que la condition initiale n'influe plus les résultats. L'écart-type des hauteurs perturbées a été calculé au temps final de la simulation avec un débit permanent de 150m<sup>3</sup>/s avec 100 perturbations et une variance de 12 pour différents temps de simulation :

Temps de Simulation	Écart-type de la hauteur d'eau $\sigma_h$ dans le lit mineur en m	Écart-type de la hauteur d'eau $\sigma_h$ dans le lit majeur en m
43 200	0.0690	0.0213

86 400	0.0694	0.0214
129 600	0.0692	0.0214
172 800	0.0692	0.0214

Tableau 2 : Évolution de l'écart-type de la hauteur d'eau simulée ( $\sigma_h$  en m) en perturbant les Ks mineur et majeur en fonction du temps de simulation.

**La perturbation s'atténue rapidement entre T0 et T+12h (43200s). Pour avoir une marge de sécurité, nous analyserons la réponse à la perturbation au temps final d'une simulation de 86400s.**

### **3.4. Impact du débit sur la sensibilité de la hauteur d'eau au Ks en régime permanent :**

La réponse à la perturbation du Ks varie en fonction de la hauteur d'eau dans le modèle. A Mussey, l'écoulement se cantonne dans le lit mineur pour des débits inférieurs à 70m<sup>3</sup>/s, le lit majeur est impacté pour des débits supérieurs à 100m<sup>3</sup>/s (on a entre les deux une zone de transition difficilement déterminable). La station de Mussey existe depuis une dizaine d'années, le plus haut débit mesuré est de 270 m<sup>3</sup>/s en février 2012. Nous testerons la réponse à la perturbation des Ks en permanent en injectant dans le modèle des débits constants compris entre 25 et 500m<sup>3</sup>/s avec un pas de 25m<sup>3</sup>/s. Le modèle a 9 conditions limites amont, on impose 9 valeurs de débits constantes pour chaque entrée de façon à obtenir le débit souhaité à de Mussey en régime permanent. Pour 1000 perturbations avec une variance de 12 pour une simulation de 86400s on obtient les écart-types des hauteurs en perturbant les Ks des lits mineurs et majeurs suivants :

Débits à la station de Mussey en m <sup>3</sup> /s	Écart-type de la hauteur d'eau en perturbant le Ks mineur en m	Écart-type de la hauteur d'eau en perturbant le Ks majeur en m
25	0.045	0
50	0.05	0.003
75	0,05	0.01
100	0.05	0.01
125	0.06	0.02
150	0.06	0.02
175	0.07	0.02
200	0.08	0.03
225	0.08	0.03
250	0.09	0.04
275	0.10	0.04
300	0.11	0.04
325	0.11	0.05
350	0.12	0.05
375	0.13	0.05

400	0.13	0.06
-----	------	------

Tableau 3 : Évolution de l'écart-type de la hauteur d'eau ( $\sigma$ h en m) en perturbant les Ks mineur et majeur en fonction du débit injecté.

On a pour des perturbations du Ks du lit mineur faibles un arrêt du calcul avec 500 m<sup>3</sup>/s injecté dans le modèle (passage local à sec en aval).

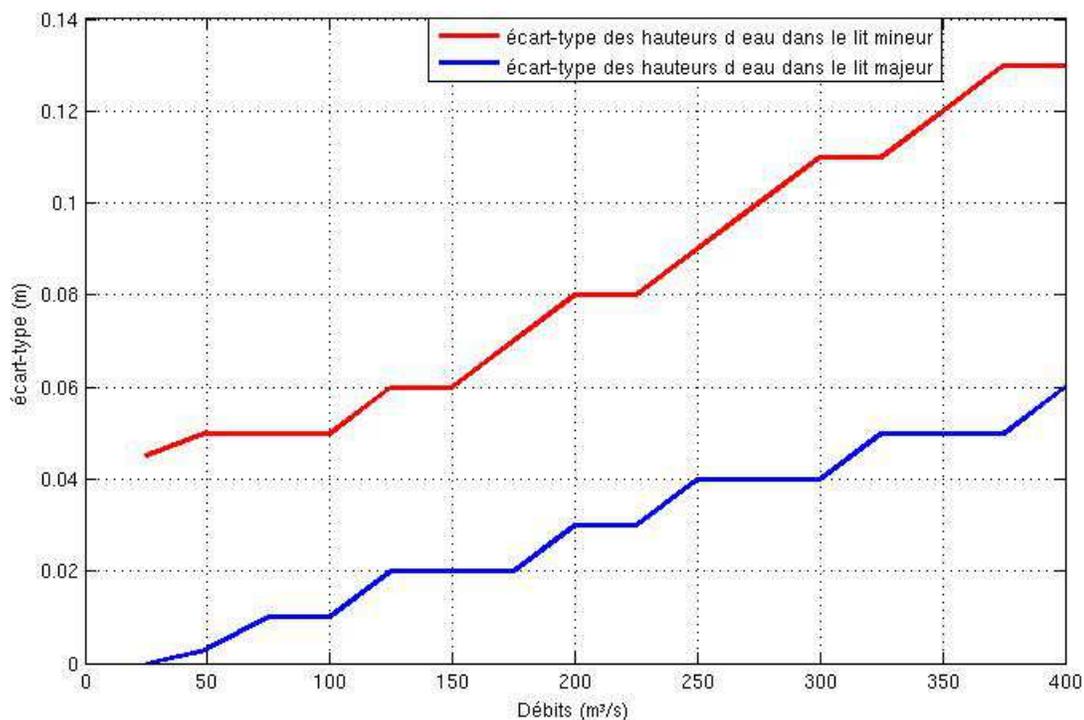


Figure 2: Evolution des écarts-types des hauteurs d'eau perturbées par les Ks des lits mineurs (courbe rouge) et majeurs (courbe bleue) en fonction du débit injecté dans le modèle.

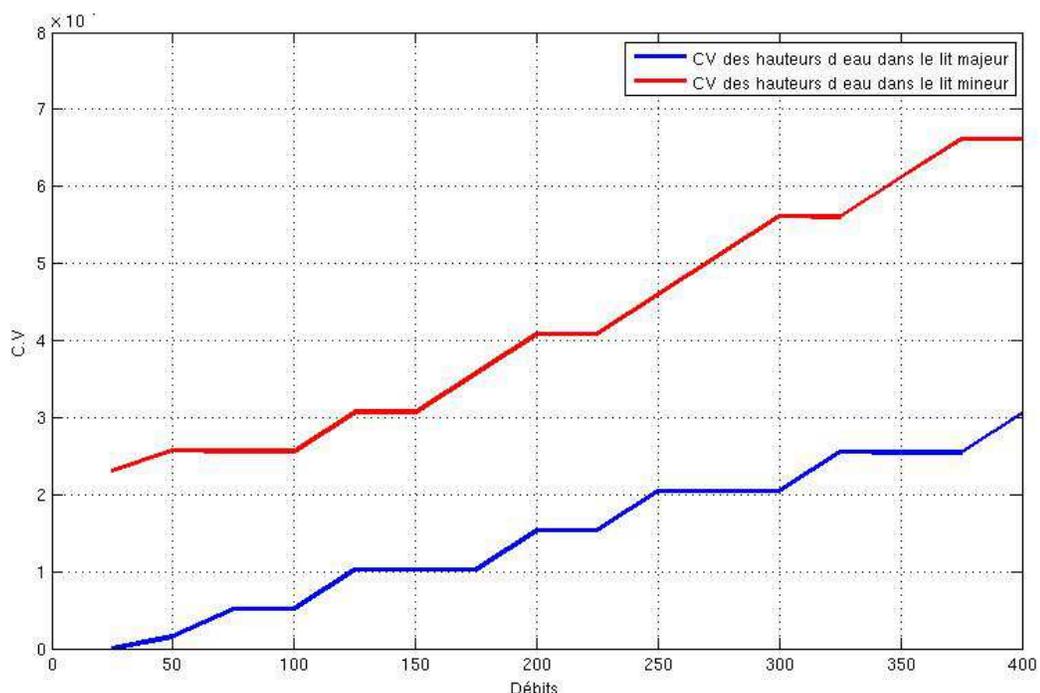


Figure 3: Evolution du coefficient de variation des hauteurs d'eau perturbées par les Ks des lits mineurs (courbe rouge) et majeurs (courbe bleue) en fonction du débit injecté dans le modèle.

Étant donné que l'augmentation de débit influe aussi sur la hauteur d'eau donc on trace l'évolution du coefficient de variation  $C.V = \frac{\sigma}{\mu}$  avec  $\sigma$  l'écart type et  $\mu$  la moyenne de l'échantillon.

La perturbation du Ks du lit majeur impacte le CV de la hauteur d'eau dans une moindre mesure (la pente de la courbe bleue est plus faible que celle de la courbe rouge) et ceci pour des débits plus importants. En dessous de 100m<sup>3</sup>/s, la perturbation du Ks du lit majeur a peu d'effet voir aucun en dessous de 25m<sup>3</sup>/s. Pour conclure la sensibilité de la hauteur d'eau au Ks est d'autant plus forte que le débit est grand.

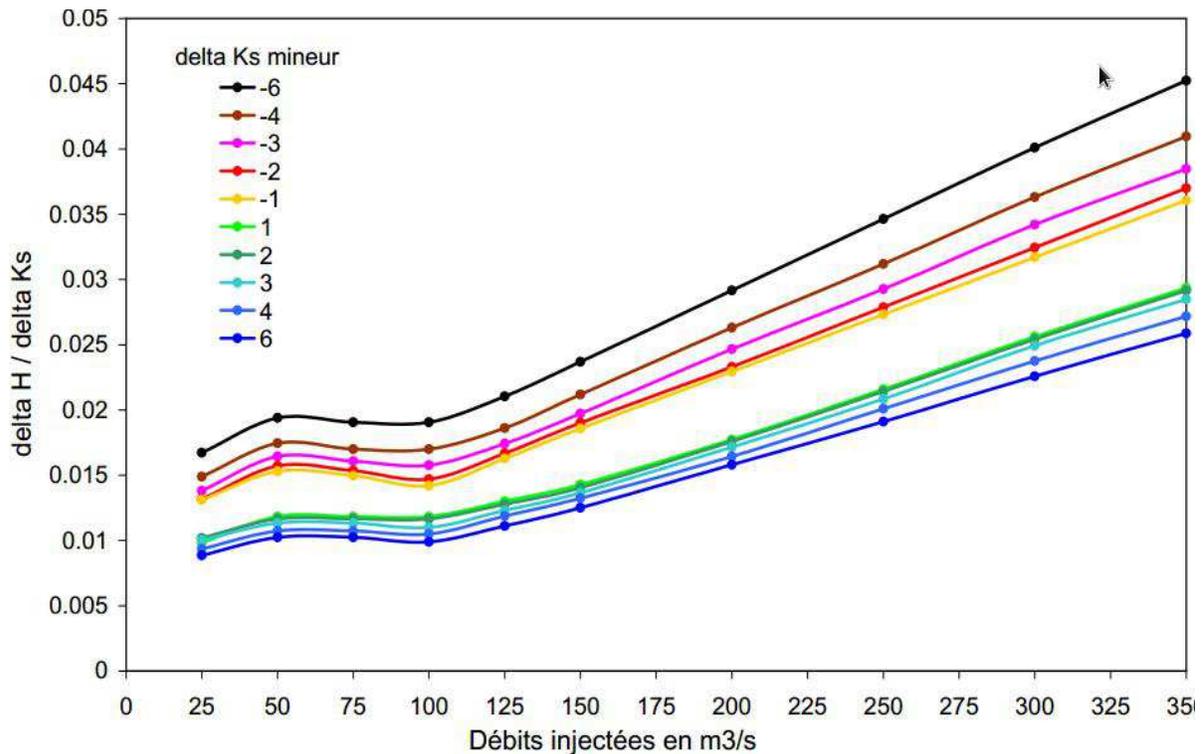


Figure 4: Evolution de l'impact sur la hauteur en fonction de la perturbation du Ks mineur et du débit.

Soit l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

en régime permanent l'équation devient :

$$\frac{-Q^2}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

$$\text{On a } dA = B dZ$$

$$\text{donc } -\frac{Q^2}{A^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} = g(S_0 - S_f)$$

$$\frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} \left(1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}\right) = g(S_0 - S_f)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B \frac{(S_0 - S_f)}{(1 - Fr^2)}$$

$$\text{donc on retrouve } \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

A : La section du point,

Q : Le débit

Z : La côte NGF,

S<sub>0</sub> : La pente du fond,

S<sub>f</sub> : La pente due aux frottements,

Fr : Nombre de Froude,

g : L'accélération de la pesanteur.

À partir de la figure 4, on observe à partir de 100m<sup>3</sup>/s une évolution linéaire des courbes en fonction du débit. Pour comprendre ce phénomène, on se place dans le régime permanent et dans le lit mineur, et on regarde l'équation résolue par MASCARET.

L'équation décrit les courbes de remous que l'on retrouve dans les écoulements naturels pour le régime fluvial. On remarque qu'il existe deux sortes de courbes de remous pour le régime fluvial une M1 et M2 (Figure 5). Selon où se situe la cote d'eau par rapport à la hauteur normale. La hauteur normale est une hauteur de référence qui est définie à partir du frottement du débit et de la pente  $h_n = \frac{Q^2}{\sqrt{(I)} K_s L^2}$ . Donc pour une pente fixée et une petite perturbation du Ks, la hauteur normale dépend du débit. Il y aura changement dans la forme de la courbe de remous selon le débit injectée, d'où le changement de comportement du coefficient de variation de la hauteur d'eau par rapport au débit d'entrée.

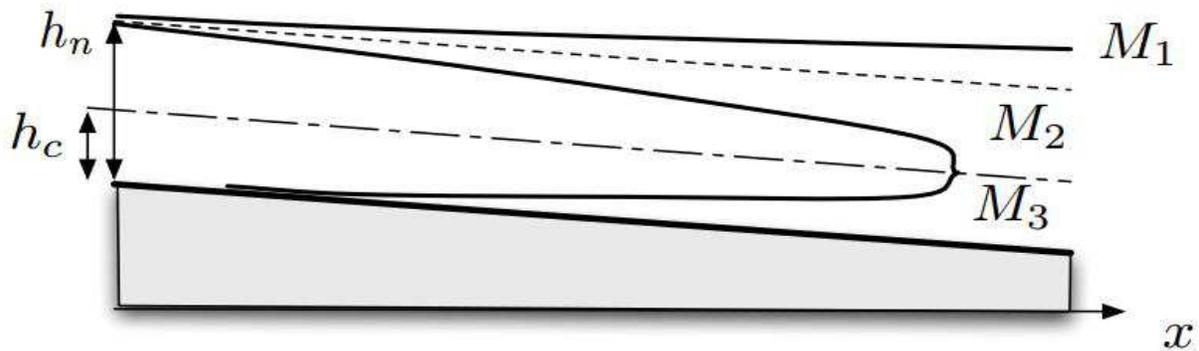


Figure 5: Les différentes courbes de remous dans le cas d'une pente faible (Hydrodynamique de l'environnement, O.Thual).

## 4. Analyse des distributions de perturbations de hauteurs d'eau liées à la perturbation des Ks :

### 4.1. Cas Permanent

La figure 6 ci-dessous représente la densité de probabilité des hauteurs d'eau pour 1000 perturbations de Ks du lit mineur autour de la valeur moyenne de 20 avec une variance de 12 au temps final d'une simulation de 24h avec un débit de 150m<sup>3</sup>/s injecté dans le modèle. La courbe verte représente la densité de probabilité gaussienne ajustée par les moments. L'intervalle de perturbation des Ks est compris entre -11,78 et 13,35, on a 501 perturbations négatives, 499 positives.

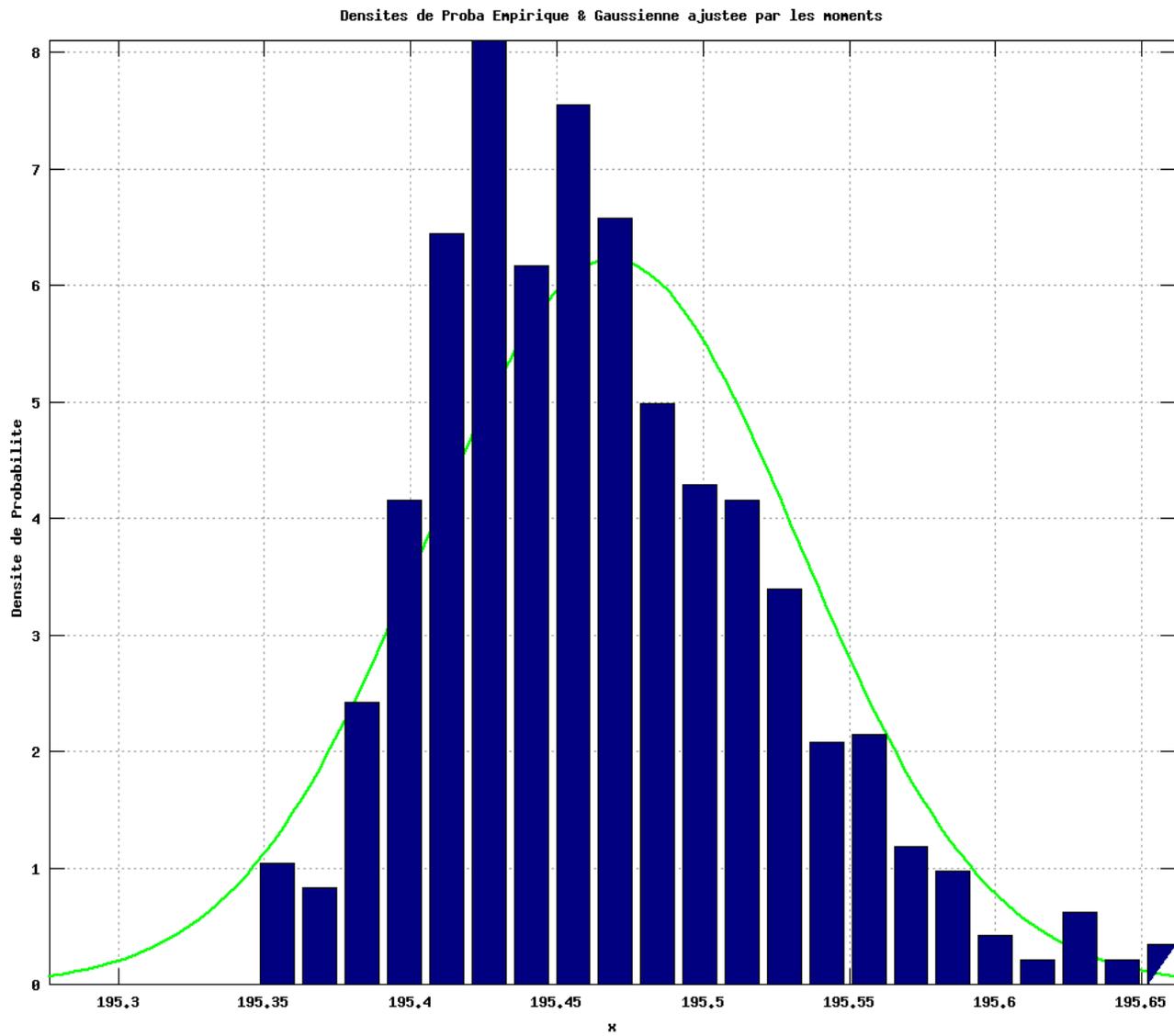


Figure 6: Densité de probabilité de la hauteur d'eau dans le lit mineur

La figure 7 représente la densité de probabilité des hauteurs d'eau pour 1000 perturbations de  $K_s$  du lit majeur autour de la valeur moyenne 13 avec une variance de 12 au temps final d'une simulation de 24h avec un débit de 150m<sup>3</sup>/s injecté dans le modèle.

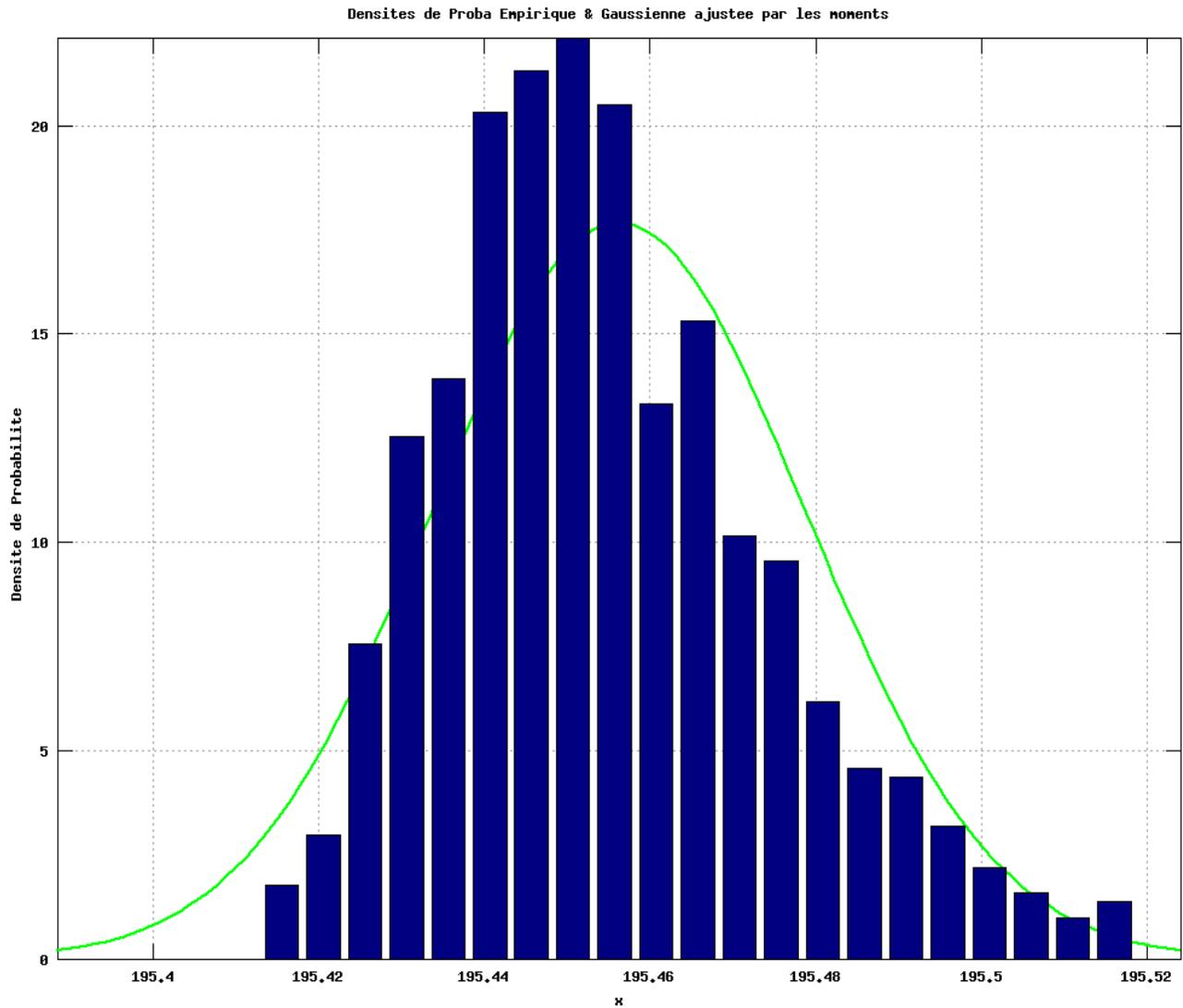


Figure 7: Densité de probabilité de la hauteur d'eau dans le lit majeur

La hauteur calculée par le modèle sans perturbation est égale à 195.456m alors que la moyenne des hauteurs perturbées est égale à 195.47m, on peut donc en conclure qu'en moyenne les perturbations ont tendance à plus augmenter les hauteurs qu'à les diminuer mais la différence est faible (1.44cm). L'intervalle des hauteurs aux Ks perturbés positivement (donc une baisse de la hauteur) a une amplitude de 13,16cm alors celui des hauteurs aux Ks perturbés négativement (donc une augmentation de la hauteur) a une amplitude de 45,74cm.

La densité de probabilité ajustée par les moments (courbe en vert) donne la réponse linéaire du système. On remarque que la densité de probabilité des hauteurs d'eau est décalée vers la gauche, c'est à dire qu'un grand nombre de perturbations est concentré vers des valeurs inférieures mais proche du mode de la PDF. On remarque aussi que les perturbations extrêmes sont décalées vers la droite et la queue de la PDF est plus longue à droite qu'à gauche. Ceci traduit l'effet de la non linéarité du système.

La réponse à la perturbation est non-linéaire : quand on diminue le Ks, la hauteur augmente plus que proportionnellement, quand on augmente le Ks, l'impact de la perturbation sur les hauteurs tend vers 0.

## 4.2. Cas non-permanent

On va maintenant évaluer la linéarité du modèle MASCARET en régime non-permanent à Mussey en simulant une crue pour différentes valeurs du Ks (Figure 8 et 9) puis on regardera la densité de probabilité de la hauteur d'eau durant la montée de la crue, le pic de crue et la décrue :

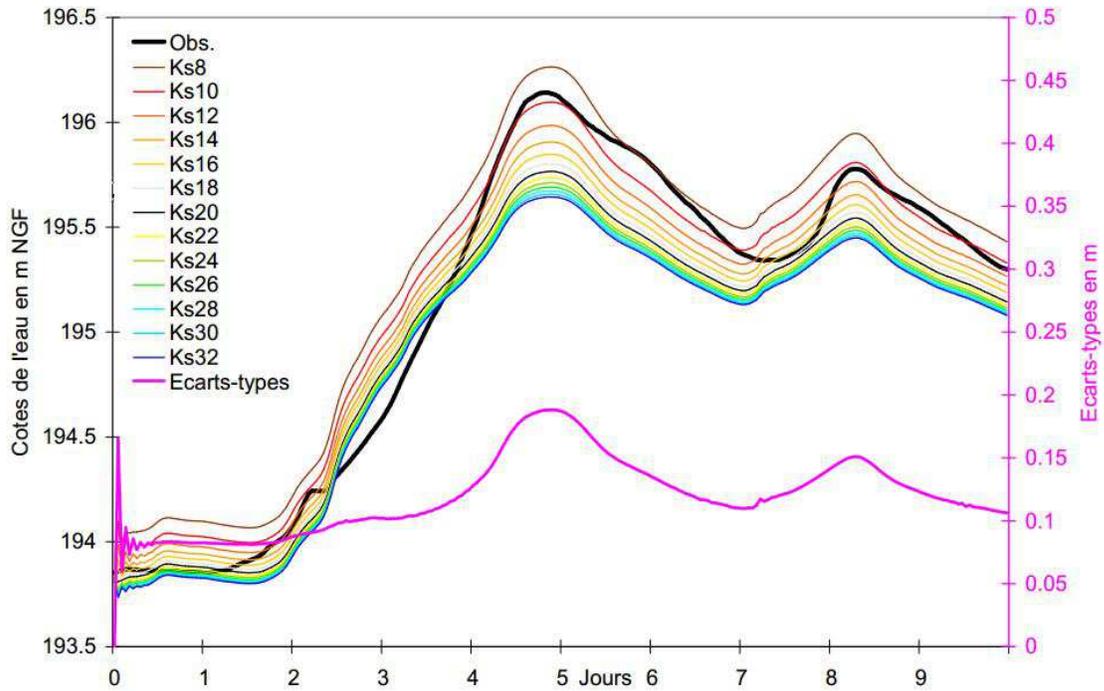


Figure 8: Effet du KS sur la simulation de la hauteur d'eau dans le lit mineur

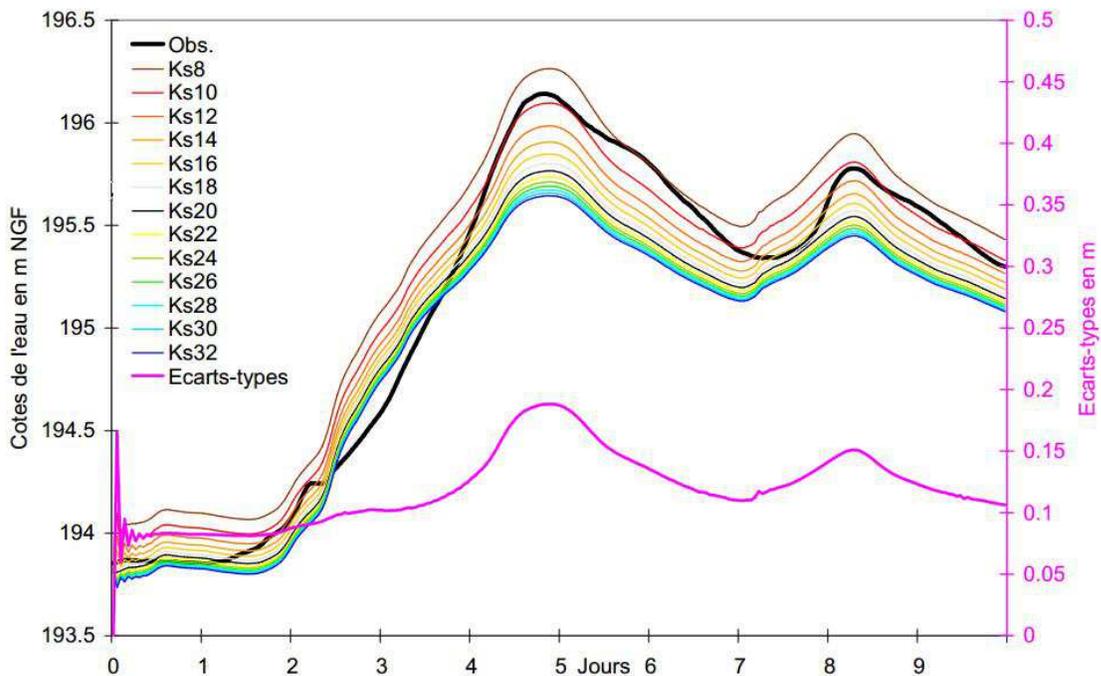


Figure 9: Effet du KS sur la simulation de la hauteur d'eau dans le lit majeur

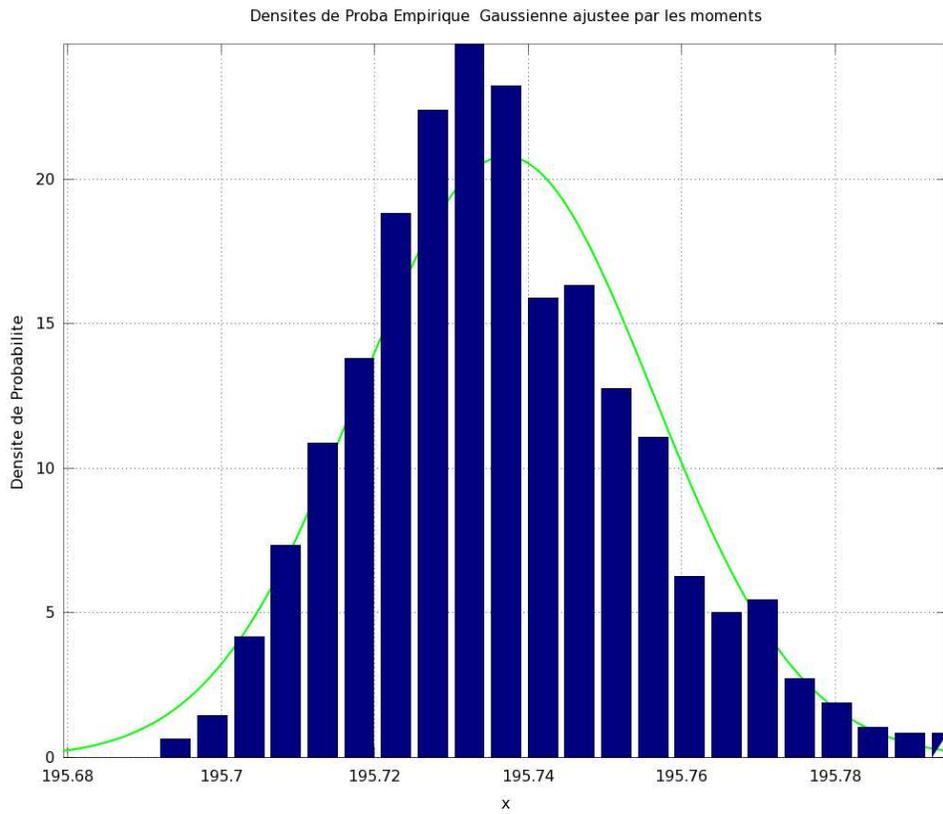


Figure 10: Densité de probabilité pour le lit majeur pendant la montée de crue

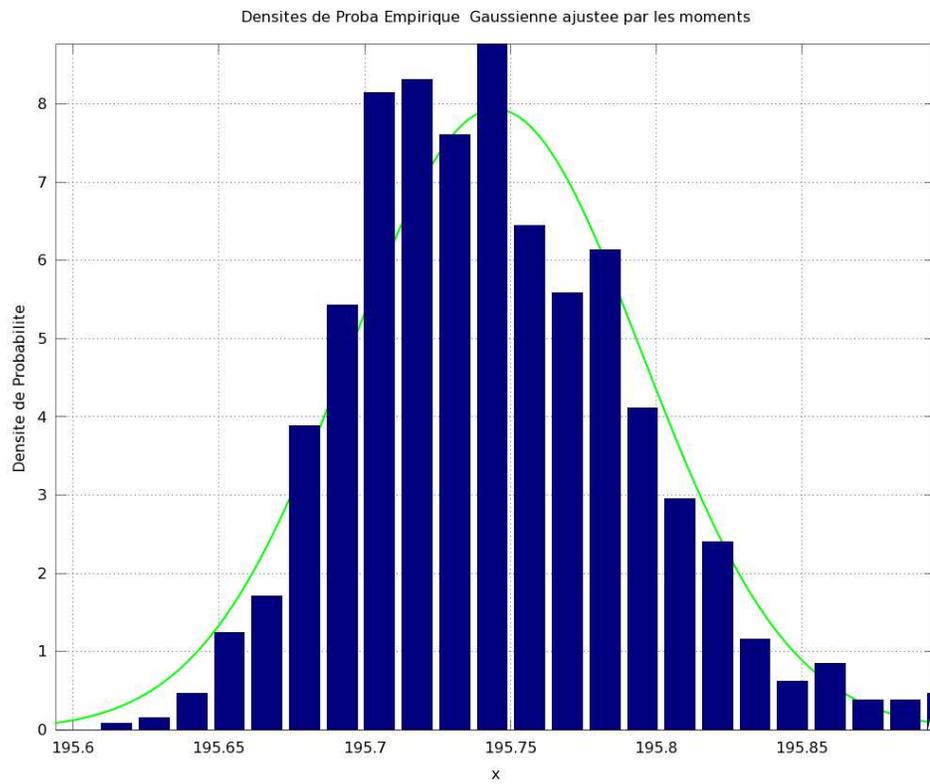


Figure 11: Densité de probabilité pour le lit mineur pendant la montée de crue

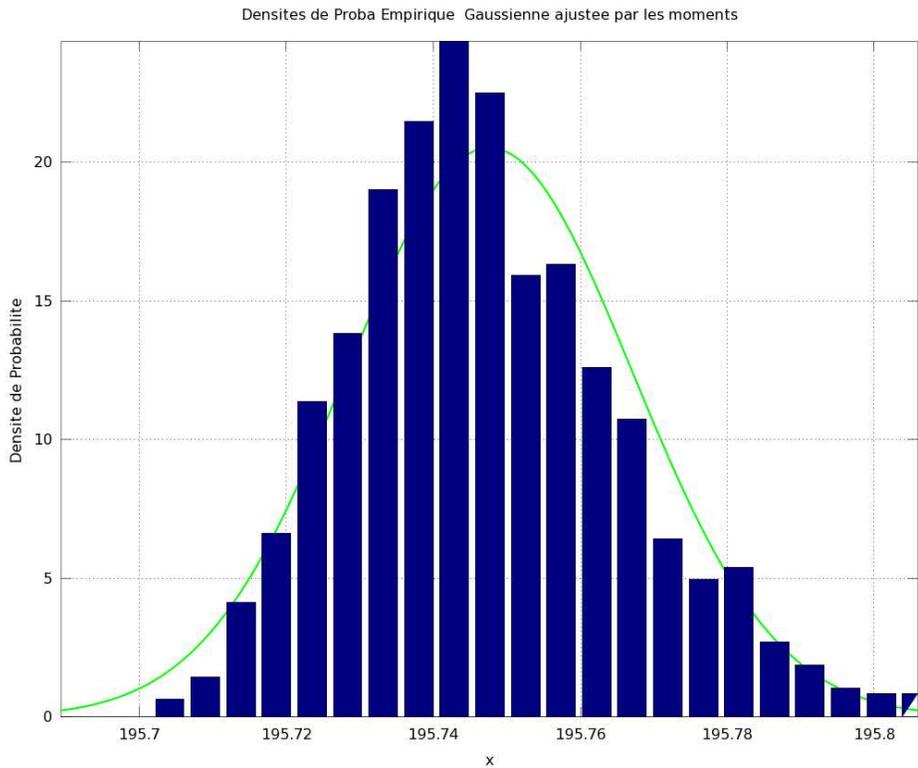


Figure 12: Densité de probabilité pour le lit majeur pendant la décrue

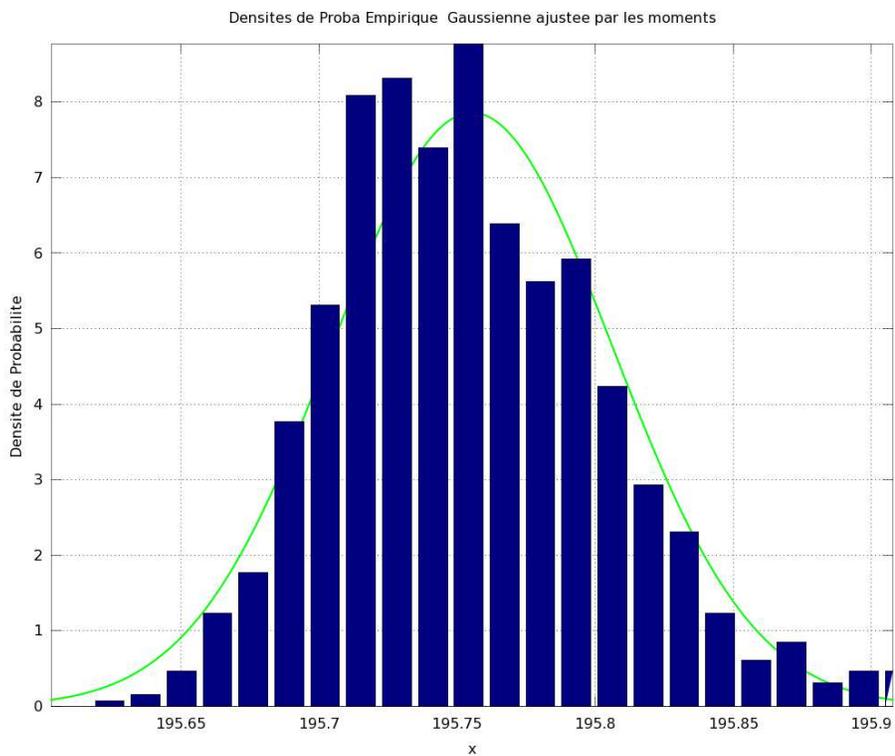


Figure 13: Densité de probabilité pour le lit mineur pendant la décrue

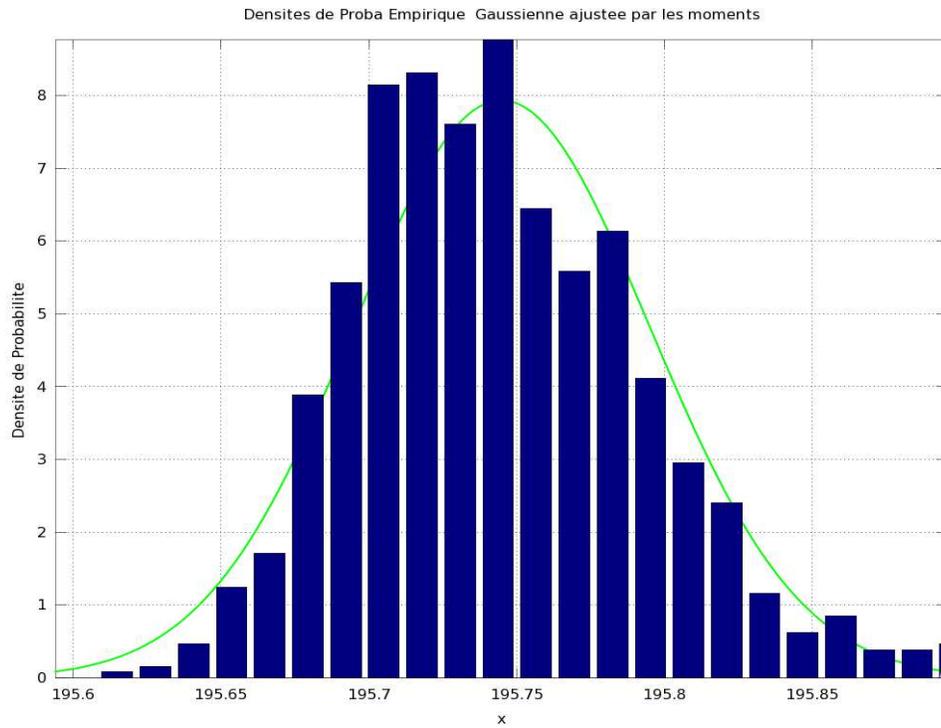


Figure 14: Densité de probabilité pour le lit mineur pendant la crue

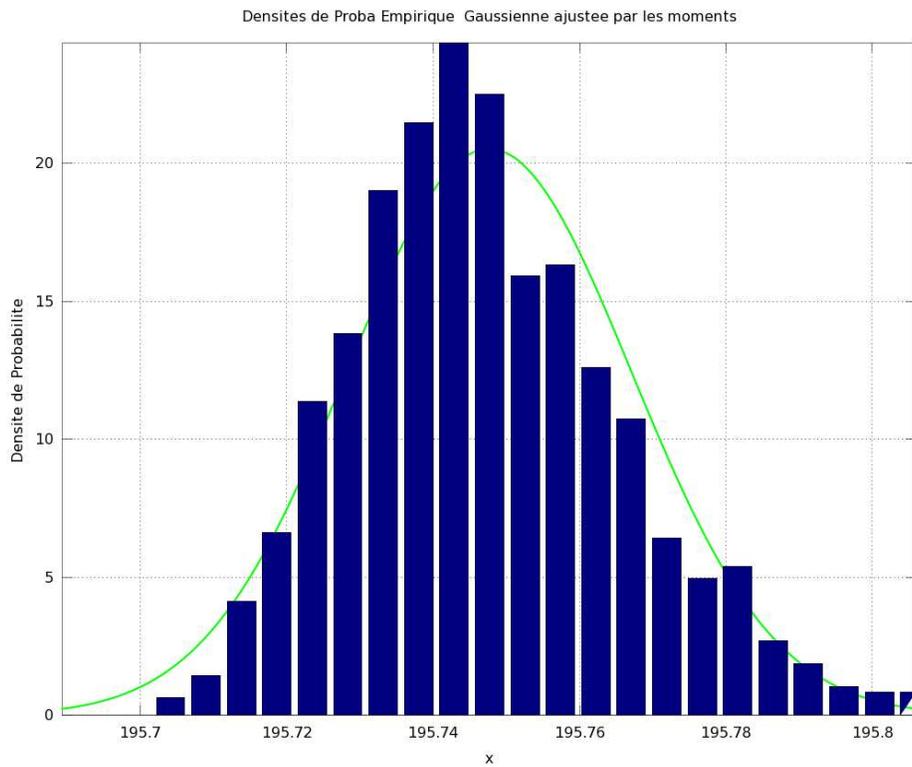


Figure 15: Densité de probabilité pour le lit majeur pendant la crue

Les figures 10 à 15 montrent que la non-linéarité que l'on a pu observer en régime permanent se retrouve aussi en régime non-permanent.

## **5. Conclusion :**

Cette étude a permis de mettre en évidence la sensibilité du code MASCARET par rapport aux valeurs de  $K_s$ . La non-linéarité des équations de Saint-Venant ainsi que la non-régularité de ces équations rendent le code sensible à la perturbation des  $K_s$  (figure 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15). On a pu aussi voir qu'il existe une corrélation forte entre les frottements et les conditions limites amont. La variation temporelle des conditions aux limites implique une variation temporelle des  $K_s$ , une correction locale de la valeur des  $K_s$  par un algorithme d'assimilation de données pourrait améliorer essentiellement les hauteurs d'eau simulées et prévues du modèle. L'étude menée par J. Habert (TR n°1) montre que la correction locale du coefficient de frottement pallie à un manque d'information sur la bathymétrie. Ceci montre qu'une étude semblable devrait être menée pour voir la sensibilité du code MASCARET par rapport à la bathymétrie.

## **Annexe :**

La figure 16 présente la PDF calculée en régime permanent grâce à 10.000 membres. Ceci valide le fait qu'une convergence statistique est obtenue pour 1000 membres, comme on l'a expliqué sur la partie 3.2. D'un autre côté on remarque l'asymétrie causée par la non-linéarité de la hauteur d'eau par rapport au  $K_s$ .

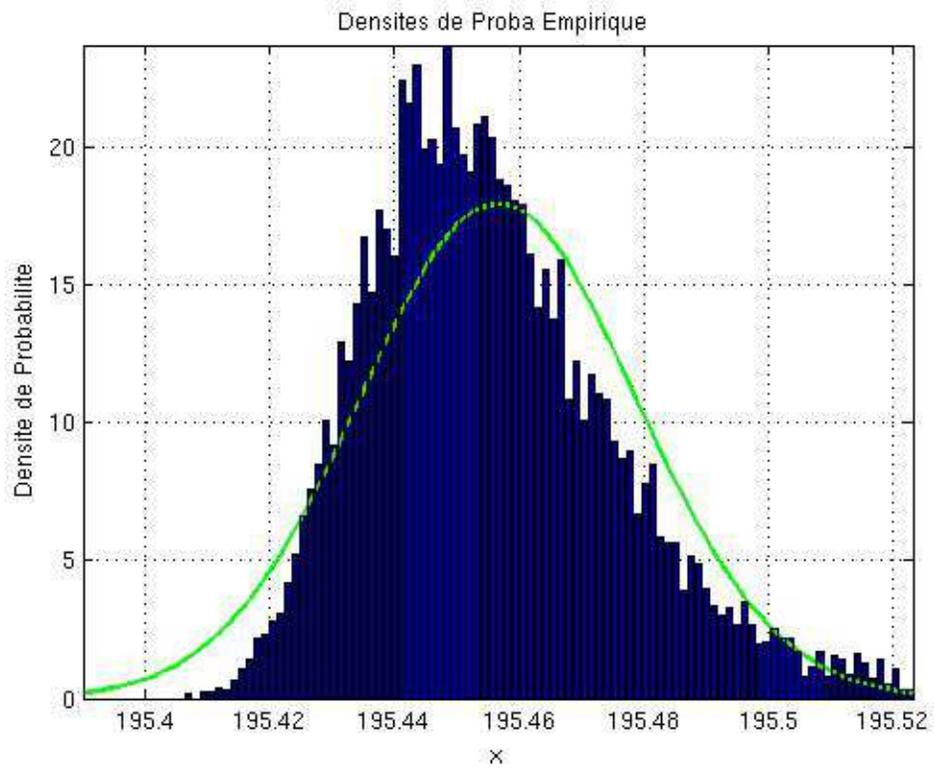


Figure 16: Pdf des hauteurs d'eau calculée en régime permanent avec 10.000 membres