



Laboratoire d'Informatique  
pour la Mécanique  
et les Sciences de l'Ingénieur

NOTES ET DOCUMENTS LIMSI N° : 2003-08

9 avril 2003

Simulation numérique de l'écoulement dans une tuyère T.O.C. à choc interne, sans film de refroidissement, testée dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA

Laure COQUART  
Sous la direction de A. CHPOUN  
et en collaboration avec C. TENAUD



Centre National de la Recherche Scientifique  
LIMSI 0789 - 91193, 91403 BRAY Cedex, France



**Simulation numérique de l'écoulement  
dans la tuyère TOC à choc interne,  
sans film de refroidissement,  
testée dans la soufflerie R2Ch de l'Onera**

**Auteur : Laure Coquart**

**Sous la direction d'A. Chpoun, LME, Université d'Evry  
En collaboration avec C. Tenaud, LIMSI-CNRS à Orsay**

**Avril 2003**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Cadre-général de l'étude . . . . .	3
1.2	Cas test étudié . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Equations de Navier-Stokes filtrées statistiquement pour un fluide compressible</b>	<b>7</b>
2.1	Equations de Navier-Stokes . . . . .	7
2.2	Equations du mouvement moyennées . . . . .	7
2.3	Fermeture du système: Modèle $k - \omega$ de D. C. Wilcox . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Equations résolues dans l'hypothèse d'axisymétrie</b>	<b>10</b>
3.1	Equations résolues en coordonnées cylindriques en axisymétrie . . . . .	11
3.2	Equations résolues dans le nouveau système de coordonnées $(\xi, \eta)$ . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>15</b>
4.1	Algorithme de résolution explicite des équations . . . . .	15
4.2	Algorithme implicite de résolution des équations . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Initialisation et conditions aux limites</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Résultats</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>30</b>
A.1	Equations filtrées temporellement en coordonnées cartésiennes . . . . .	30
A.2	Equations filtrées temporellement en coordonnées cylindriques . . . . .	31
A.3	Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'une équation hyperbolique scalaire 1D . . . . .	34
A.4	Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'un système hyperbolique à coefficients constants . . . . .	36
A.5	Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'un système hyperbolique à coefficients non constants . . . . .	37
A.6	Méthodes ADI . . . . .	38
A.7	Matrices jacobienne des flux . . . . .	39
A.8	Matrices jacobienne des flux visqueux en implicite sans modèle de turbulence dans un changement de coordonnées cartésiennes $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ . . . . .	40
A.9	Matrices jacobienne des flux visqueux en implicite avec modèle de turbulence dans un changement de coordonnées cartésiennes $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ . . . . .	43
A.10	Algorithme de résolution d'un système matriciel tridiagonal par triangularisation . . . . .	48
A.11	Conditions aux limites discrètes imposées aux parois . . . . .	49
A.12	Méthode des caractéristiques . . . . .	51
A.13	Conditions aux limites discrètes imposées à l'entrée de la tuyère . . . . .	53

# 1 Introduction

## 1.1 Cadre général de l'étude

Cette étude s'inscrit dans le cadre plus général de travaux menés depuis plusieurs années par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) en vue de l'optimisation de la propulsion des lanceurs. Elle s'inscrit plus particulièrement dans le cadre des programmes de recherches de l'ONERA menés en collaboration avec le CNES au sein du pôle ATAC (Aérodynamique des Tuyères et Arrière Corps) [24], [25]. Les études concernant la combustion des gaz cryogéniques, qui ont permis une amélioration considérable des performances des moteurs et de la propulsion, arrivent maintenant à maturité. L'optimisation de la détente des gaz passe aujourd'hui par la recherche de nouveaux profils de tuyères. Une meilleure compréhension des phénomènes dynamiques et thermiques observés au sein de ces écoulements en régime transitoire est également nécessaire, en vue de leur contrôle.

Les moteurs-fusées d'Ariane 5 sont équipés d'une tuyère axisymétrique convergente divergente. Les tuyères de propulsion sont conçues pour obtenir une détente maximale des gaz de combustion pendant le vol à haute altitude en basse pression. Il se pose le problème de l'optimisation de ces conditions de fonctionnement sur la totalité des trajectoires, notamment en tenant compte du décollage. Lors de l'allumage au sol où la pression externe est forte, le rapport entre la pression génératrice et la pression atmosphérique n'étant pas suffisamment élevé, la tuyère n'est pas complètement amorcée. On observe la formation d'une onde de choc dans le divergent qui interagit avec la couche limite. Cette interaction s'accompagne généralement d'un décollement [22]. Au cours du régime transitoire d'amorçage, l'interaction et le décollement progressent depuis le col vers la sortie du divergent. A chaque instant, le point de décollement observé dans le plan de symétrie d'une tuyère axisymétrique appartient à une courbe fermée faisant le tour de la paroi. En général cette ligne de décollement n'est pas un cercle, traduisant une distribution des pressions pariétales fortement dissymétrique. Le divergent est alors soumis à des efforts instationnaires transverses à la direction principale de la poussée, également appelés charges latérales, qui sont dus à l'instationnarité et à la dissymétrie locale du décollement.

Les lanceurs devant emporter des charges utiles de plus en plus lourdes, la nouvelle génération de propulseurs est équipée de tuyères encore plus fortement surdétendues dès le décollage, mais aussi durant toute la partie du vol à basse altitude. Il existe deux principaux types de tuyères axisymétriques équipant les lanceurs : les premières sont dénommées **Truncated Ideal Contour (TIC)**, les secondes **Thrust Optimised Contour (TOC)** [26], [27]. La principale différence entre ces deux types de tuyère réside dans le profil de la partie divergente. Le profil des premières beaucoup plus progressif que les secondes. C'est ainsi que les TOC présentent un choc de focalisation interne qui prend naissance juste en aval de la région du col sonique, là où le profil de la paroi présente un point d'inflexion [10], [18] [29]. Notre étude ne portant que sur la simulation de l'écoulement dans une tuyère de type TOC, nous ne décrirons que les phénomènes observés dans ce type de tuyère. Nous pouvons néanmoins souligner que les TIC sont très étudiées expérimentalement et numériquement au LEA à Poitiers [11] et à l'ONERA [6], [22], [27].

Les interactions entre le choc de décollement et le choc de focalisation interne donnent naissance à des structures d'onde de choc complexes dans le divergent appelées choc en chapeau (cap shocks pattern) [9], [15], [29]. La connaissance précise de ces structures a été rendue possible grâce aux expériences menées en Europe (banc HYP 500 au FOI en Suède, banc P6 au DLR en Allemagne) et notamment en France dans la soufflerie R2Ch de l'Onera [23]. Elles sont représentées schématiquement sur la figure (1). La formation de ces structures d'ondes est associée au fait que l'onde de choc interne (F) se réfléchit de manière singulière sur l'axe de symétrie. Elle ne se réfléchit pas sur l'axe mais en un point triple (T) correspondant à l'intersection entre l'onde choc interne incidente, son choc réfléchi et le disque de Mach. Le disque de Mach est un choc fort (N) qui relie en fait ce point triple à l'axe, comme le montre la figure (1). La ligne J issue du décollement et qui apparaît sur la figure correspond, en conditions de fluide réel, à une couche de mélange. Elle sépare le fluide en aval du choc de décollement (I) de la recirculation alimentée par le fluide extérieur. La ligne  $\Sigma$ , qui apparaît également sur la figure (1), sépare les écoulements à l'aval des ondes de choc normale et l'onde interne réfléchie (R). Le choc interne réfléchi qui interfère avec le choc de décollement donne naissance à un système de chocs et détente successifs localisé entre les deux lignes de glissement. Si ce système d'ondes impacte la paroi, il se forme un décollement restreint (**R**estricted **S**hock **S**eparation) pour lequel la recirculation est localisée avant la fin du divergent (figure 2). Dans le cas contraire, le décollement est libre (**F**ree **S**hock **S**eparation), et la couche limite ne recolle pas avant la fin du divergent [16] (figure 1). En plus des instationnarités associées au décollement, il semble que les transitions entre les différentes structures RSS et FSS soient à l'origine de l'existence de fortes charges latérales dans les tuyères de propulsion, depuis l'allumage au sol jusqu'à haute altitude, à la fin du régime transitoire. Ces transitions sont associées aux variations du rapport entre la pression génératrice de la chambre de combustion et de la pression statique atmosphérique,  $Pt_i/P_a$ , tout au long de la trajectoire [2], [9], [11], [16], [17].

Notre étude porte plus particulièrement sur la simulation de l'écoulement dans la tuyère ONERA-TOC à choc interne testée dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA, dans le but de mieux comprendre le phénomène de décollement résultant de l'interaction entre l'onde de recompression et la couche limite, à  $Pt_i/P_a$  fixé. Dans un premier temps, il s'agit de calculer l'écoulement non adapté dans la tuyère sans injection secondaire. Nous pouvons souligner que la tuyère d'injection sert à refroidir la tuyère soumise à un flux de chaleur convectif élevé, en réinjectant les gaz froids de la turbo-pompe. Le film contribue également à augmenter la poussée globale de la tuyère.

Des mesures en gaz froids ont été réalisées dans la tuyère TOC surdétendue de type Vulcain 2 dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA [26], [27]. Les données expérimentales ont été recueillies pour différents rapports de pression  $Pt_i/P_a$ , avec et sans injection secondaire. Des simulations numériques dans cette tuyère ont été réalisées à l'ONERA, avec et sans injection secondaire et pour différents rapports de pression, grâce à un modèle de longueur de mélange de Baldwin-Lomax à deux couches [1], [23], [29]. Un modèle à deux équation  $k - \epsilon$  également été développé depuis. Mais il existe encore relativement peu de simulations numériques réalisées sur ce type de tuyère TOC [9] [18].

Nous présentons les résultats obtenus dans la tuyère TOC de type Vulcain 2 pour un rapport de  $Pt_i/P_a = 50$  et sans injection. Les calculs ont été menés dans une tuyère

principale à paroi lisse. Nous n'avons pas tenu compte de la petite marche descendante constituée par le culot de la lèvre d'injection secondaire, présente à priori même sans injection. Néanmoins, son influence sur la solution reste faible dans la mesure où le décollement est situé très en aval de la lèvre pour ce rapport de pression très élevé [29]. On ne s'intéresse pas ici aux effets liés aux variations du rapport de pression  $Pt_i/P_a$ , ni aux effets instationnaires. A ce très haut rapport de pression, les charges latérales mesurées sont faibles et les effets instationnaires dans le décollement sont très faibles [11]. Cela justifie l'emploi d'une modélisation statistique de type RANS dans notre étude. Nous discutons la solution stationnaire obtenue avec un code axisymétrique implicite, qui résout les équations de Navier-Stokes en régime compressible [32], [33], avec le modèle de turbulence  $k - \omega$  de D. C. Wilcox [39].

Après une présentation rapide des caractéristiques du cas test étudié et du domaine de calcul considéré, les équations de Navier Stokes filtrées temporellement sont décrites. Le modèle de turbulence utilisé dans nos simulations est le modèle à deux équations  $k - \omega$  de Wilcox [39]. Une fois présenté en détail le modèle de turbulence, les simplifications réalisées grâce à l'hypothèse d'axisymétrie dans les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sont alors précisées [12], [31]. Nous présentons ensuite la résolution numérique des équations, aussi bien en mode explicite qu'implicite, avec les conditions aux limites associées. Les résultats obtenus à convergence temporelle dans la la tuyère sont analysés dans la dernière partie du document avant de conclure sur ce travail et sur les perspectives envisagées.

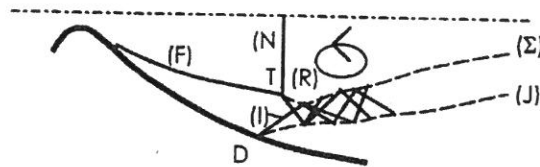


FIG. 1 - Décollement libre avec structure de choc en chapeau

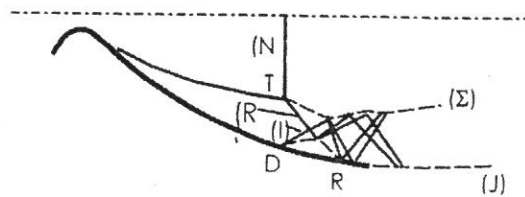


FIG. 2 - Décollement restreint avec structure de choc en chapeau

## 1.2 Cas test étudié

Le cas test qui a été retenu pour l'étude est la tuyère 2D axisymétrique à choc interne testée dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA. Cette tuyère a été utilisée pour diverses études expérimentales et numériques pour étudier les phénomènes se produisant dans

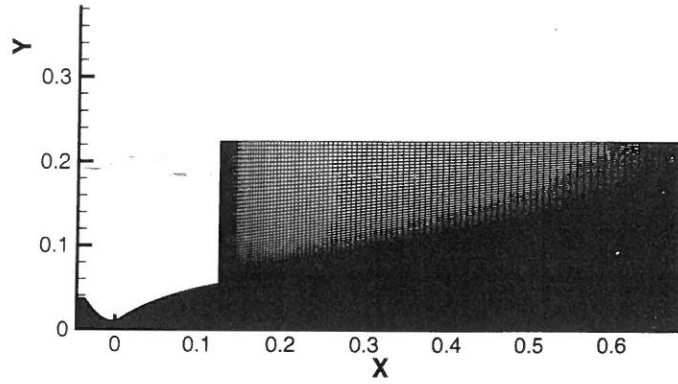


FIG. 3 - Géométrie de la tuyère et domaine de calcul

les tuyères de propulsion TOC en régime surdétendu. La tuyère est supposée rigide et le fluide simulé est de l'air, supposé vérifier la loi des gaz parfaits. Seul l'écoulement dans une demi tuyère a été calculé puisque la configuration est axisymétrique.

La géométrie de la tuyère et le domaine global de calcul sont représentés sur la figure (3). Le diamètre en entrée vaut  $D_i = 7.39 \cdot 10^{-2}$  [m], le diamètre au col  $D_{col} = 2.196 \cdot 10^{-2}$  [m] et le diamètre en sortie  $D_o = 0.1128$  [m]. La longueur du divergent vaut  $L_{div} = 0.125$  [m] tandis que la longueur totale de la tuyère vaut  $L = 0.1711$  [m]. Les conditions génératrices sont telles que  $Pt_i/P_a = 50$  avec  $Pt_i = 43.3 \cdot 10^5$  [Pa] et  $P_a = 0.866 \cdot 10^5$  [Pa]. La température génératrice du fluide à l'entrée vaut  $Tt_i = 324$  [K] et la température statique du fluide au repos en sortie vaut  $Tt_o = 293$  [K]. Les conditions sont soniques au col, ce qui permet de déterminer le débit dans la tuyère à l'aide des relations isentropiques [7] :

$$\dot{m} = \frac{\psi^* Pt_{entree} A_{col}}{\sqrt{\gamma \mathcal{R} T_{entree}}} \quad \text{avec} \quad \psi^* = \gamma \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 0.81019$$

d'où

$$\dot{m}_{isen} = 3.6807 \text{ kg s}^{-1}$$

Le fluide sort dans un caisson à la pression et la température ambiante. Le domaine de calcul s'étend suffisamment loin au delà du domaine de calcul de la tuyère pour pouvoir considérer que la pression est constante sur la frontière de sortie avale du domaine. La longueur du caisson vaut  $5 D_{sortie}$  dans la direction longitudinale et  $1.5 D_o$  dans la direction verticale. La longueur totale du domaine de calcul vaut ainsi  $L_x = L + 5 D_o = 0.7351$  [m] et  $L_y = 2 D_o = 0.2256$  [m]. Le domaine de calcul a été discrétisé par  $512 \times 150$  points. Il y a  $412 \times 100$  points dans la tuyère et  $100 \times 150$  points pour discrétiser le caisson de sortie.

Nous passons maintenant à la description des équations de Navier-Stokes filtrées temporellement et du modèle de turbulence de D. C. Wilcox.

## 2 Equations de Navier-Stokes filtrées statistiquement pour un fluide compressible

### 2.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes instantannées pour un fluide compressible sont rappelées ci-dessous sous forme conservative et en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho E + p) u_j - u_i \sigma_{ij} + q_j) = 0 \quad (3)$$

Le fluide simulé est de l'air. La variable  $\rho$  est la densité du fluide,  $u_i$  sont les composantes ( $u, v, w$ ) de la vitesse dans chaque direction ( $Ox_i$ ) et  $p$  est la pression statique reliée aux autres variables thermodynamiques par la loi d'état des gaz parfait :  $p = \rho \mathcal{R} T = \rho(\gamma - 1)e$ , avec la constante des gaz parfaits massique  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{R} = 287 [J/Kg K]$  pour l'air).  $E = c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$  est l'énergie totale du fluide par unité de volume et  $e$  est l'énergie interne.  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes :  $\sigma_{ij} = 2\mu(T)(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij})$  avec le tenseur de déformation  $S_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ .  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide et  $q_j$  est le flux de chaleur donné par la loi de Fourier :  $q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$ . Enfin,  $\kappa$  est la conductivité thermique du fluide.

La viscosité dynamique  $\mu$  est donnée par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{110,4 + T_\infty}{110,4 + T} \right)$$

La conductivité thermique  $\kappa(T)$  est déduite de  $\mu(T)$  à partir d'une hypothèse de nombre de Prandtl constant :

$$\kappa = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1} \frac{\mu}{P_r}$$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , rapport des chaleurs spécifiques, vaut 1,4 et  $P_r = 0,725$  pour l'air.

### 2.2 Equations du mouvement moyennées

Pour simplifier, les équations filtrées sont présentées en coordonnées cartésiennes. Les quantités sont décomposées en une partie moyenne  $\bar{f}$  et une quantité fluctuante  $f'$  selon :  $f = \bar{f} + f'$ .  $\bar{f}$  correspond au signal filtré temporellement et  $f'$  aux variations de



$f$  autour de sa valeur moyenne  $\bar{f}$ . Comme l'écoulement est compressible, les variables sont pondérées par la masse volumique par la technique de Favre [8]:  $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$  ce qui permet de n'avoir aucun terme à modéliser dans l'équation de conservation de la masse. Selon cette décomposition  $f = \bar{f} + f'$ . Pour la pression et la masse volumique  $p = \bar{p} + p'$  et  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ .

Les notations utilisées sont récapitulées ci-dessous :

$$f = \bar{f} + f' = \tilde{f} + f''$$

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

$$\overline{f'} = 0 \quad \overline{f''} \neq 0 \quad \text{mais par contre} \quad \overline{\rho f''} = \bar{\rho} \tilde{f}'' = 0$$

$$p = \bar{p} + p'$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Nous rappelons que les opérations de dérivation et de filtrage sont supposées commuter dans le cadre théorique de la modélisation turbulente. Les équations de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale obtenues après filtrage temporel s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i \sigma_{ij}} - \bar{q}_j - (\overline{\rho E u_j} - \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_j) - (\overline{p u_j} - \bar{p} \tilde{u}_j)) \end{aligned}$$

$\bar{\rho}$  est la masse volumique moyennée,  $\tilde{u}_j$  la composante de la vitesse moyennée dans la direction  $x_j$ ,  $\bar{p}$  la pression filtrée temporellement et  $\tilde{E}$  l'énergie totale moyennée. L'énergie totale moyennée est directement calculée en filtrant  $\rho E$  :

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \overline{\rho c_v T} + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \bar{\rho} c_v \tilde{T} + \frac{\bar{\rho}}{2} \widetilde{u_i u_i} + \frac{\bar{\rho}}{2} (\overline{u_i u_i} - \widetilde{u_i u_i}) = \bar{\rho} \tilde{e} + \frac{\bar{\rho}}{2} \widetilde{u_i u_i} + \bar{\rho} k$$

La température est définie à partir de la pression filtrée grâce à l'équation d'état des gaz parfaits:  $\bar{p} = \bar{\rho} \mathcal{R} \tilde{T} = \bar{\rho} (\gamma - 1) \tilde{e}$ , où  $e$  est l'énergie interne.

Le tenseur des contraintes moyen vaut:  $\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu(\tilde{T})(\widetilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widetilde{S}_{kk} \delta_{ij})$  avec  $\widetilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i})$

la partie symétrique du tenseur de déformation de vitesse.

Le flux de chaleur moyenné est évalué à partir d'une loi de Fourier (de type premier gradient) portant sur la température moyenne:  $\bar{q}_j = -\kappa(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\kappa(\tilde{T}) (\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{T}''}{\partial x_j})$ .

$\mu(\tilde{T})$  est la viscosité dynamique et  $\kappa(\tilde{T})$  est la conductivité thermique. La viscosité dynamique  $\mu$  est donnée par la loi de Sutherland portant sur la température moyennée. La conductivité thermique  $\kappa(\tilde{T})$  est déduite de  $\mu(\tilde{T})$  à partir d'une hypothèse de nombre

de Prandtl turbulent comme pour la conductivité thermique physique.

En rassemblant la pression à l'énergie totale et en développant les termes de fermeture non linéaires dans les équations de conservation, on obtient :

$$\overline{\rho(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j - \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_j)} = \bar{\rho} (\mathbf{u}_i'' \mathbf{u}_j'') = \tau_{ij}^{rey}$$

qui représente le tenseur de Reynolds.

De même dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} (\overline{\rho H u_j} - \bar{\rho} \tilde{H} \tilde{u}_j) &= \bar{\rho} (C_p \tilde{T} \tilde{u}_j + C_p \widetilde{u_j'' T''} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \widetilde{u_i'' u_i'' u_j} + 2 \widetilde{u_i'' u_j'' u_i} + \widetilde{u_i'' u_i'' u_j''})) \\ &\quad - \bar{\rho} (C_p \tilde{T} \tilde{u}_j + \frac{1}{2} (\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{u}_j \widetilde{u_i'' u_i''})) \\ (\overline{\rho H u_j} - \bar{\rho} \tilde{H} \tilde{u}_j) &= \bar{\rho} C_p \widetilde{u_j'' T''} + \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j'' u_i} + \frac{\bar{\rho}}{2} \widetilde{u_i'' u_i'' u_j''} \end{aligned}$$

$\bar{\rho} \tilde{H} = \overline{\rho C_p T} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i} = \bar{\rho} C_p \tilde{T} + \frac{\bar{\rho}}{2} \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i + \frac{\bar{\rho}}{2} (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i)$  est l'enthalpie totale filtrée.

$\psi_j^{rey} = \bar{\rho} C_p (\widetilde{u_j'' T''})$  est le flux de chaleur turbulent.

$\mathbf{C}_{ijk}^{rey} = -\partial_j (\frac{\bar{\rho}}{2} (\widetilde{u_i'' u_i'' u_j''}))$  est la diffusion turbulente de l'énergie cinétique turbulente.

On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\rho} (\widetilde{u_i'' u_j''})) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij} - \bar{q}_j - \frac{\bar{\rho}}{2} (\widetilde{u_i'' u_i'' u_j''}) - \bar{\rho} C_p (\widetilde{u_j'' T''}) - \bar{\rho} \tilde{u}_i \widetilde{u_i'' u_j''}) \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{q}_j = -\kappa(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\kappa(\tilde{T}) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{T}''}{\partial x_j} \right)$$

et

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu(\tilde{T}) (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

### 2.3 Fermeture du système : Modèle $k - \omega$ de D. C. Wilcox

Ce modèle est un modèle à deux équations de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$  et de la dissipation spécifique  $\omega = \frac{\varepsilon}{(\beta^* k)}$  [39]. La quantité  $\varepsilon = \sigma_{kl} \frac{\partial u_k''}{\partial x_l}$  représente la dissipation turbulente. Le tenseur de Reynolds est modélisé par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente en utilisant l'hypothèse de Boussinesq :

$$\tau_{ij}^{rey} = -2\mu_t (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

On modélise la viscosité turbulente  $\mu_t$  à partir de  $k$  et  $\omega$  [39] :

$$\mu_t = \gamma^* \frac{\bar{\rho} k}{\omega}$$

Concernant l'équation de conservation de l'énergie totale, on approxime :  $\overline{u_i \sigma_{ij}} = \tilde{u}_i \bar{\sigma}_{ij} + \overline{u_i'' \sigma_{ij}}$ . Les corrélations triples sont associées au terme  $\overline{u_i'' \sigma_{ij}}$ . Ces termes sont modélisés à l'aide du gradient de l'énergie cinétique turbulente [41].

$$\begin{aligned} \overline{u_i'' \sigma_{ij}} - \frac{\bar{\rho}}{2} (\overline{u_i'' u_i'' u_j''}) &= (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \bar{q}_j + \bar{\rho} C_p \overline{u_j'' T''} &= - \left( \frac{\mu C_p}{Pr} + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \Phi_j \\ \gamma^* &= 1 \quad \sigma^* = 1/2 \quad \beta^* = 9/100 \end{aligned}$$

Les équations de Navier-Stokes filtrées instationnaires que l'on résout en coordonnées cartésiennes, après la modélisation des termes turbulents, sont données ci-dessous. En plus des cinq équations de conservation, il faut résoudre les deux équations de transport de  $k$  et  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}^{rey}) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i (\bar{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}^{rey})) + \left( \frac{\mu C_p}{Pr} + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j k) &= -\tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \bar{\rho} \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}] \\ \frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \omega) &= \frac{-\gamma \omega}{k} \tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j}] \end{aligned}$$

$$\gamma = 5/9 \quad \sigma = 1/2 \quad \beta = 3/40$$

et  $e$  représente l'énergie interne résolue.

Les équations s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{G}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \overline{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \overline{H}_v}{\partial z} + \overline{S}_c = 0$$

Tous les termes sont précisés en annexe (A.1).

### 3 Equations résolues dans l'hypothèse d'axisymétrie

Pour résoudre les équations dans la géométrie considérée et appliquer les hypothèses d'axisymétrie sur l'axe de la tuyère, il faut tout d'abord écrire les équations en coordonnées cylindriques. Le détail des calcul est donné en annexe (A.2). L'hypothèse d'axisymétrie équivaut à supposer que  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  et les équations se simplifient.

Lorsque l'hypothèse d'axisymétrie est prise en compte dans les équations, et que comme dans notre cas on a également  $u_\theta = 0$ , on peut se remener à un système d'équations de conservation bi-dimensionnel, mais en tenant compte des nouveaux termes sources. On pose  $r \simeq y$ .

### 3.1 Equations résolues en coordonnées cylindriques en axisymétrique

Les équations sont réécrites, dans un plan  $(x,y)$ , sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}_v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}_v}{\partial y} + \bar{S}_{caxi} = 0$$

Le vecteur des inconnues principales filtrées vaut :

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x \\ \bar{\rho} \tilde{u}_y \\ \bar{\rho} \tilde{E} \\ \bar{\rho} k \\ \bar{\rho} \omega \end{pmatrix}$$

Les flux convectifs  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  sont donnés par :

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_x \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_y \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{E} + \tilde{u}_x \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x k \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x \omega \end{pmatrix} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_y \\ \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_y \\ \bar{\rho} \tilde{u}_y^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_y \tilde{E} + \tilde{u}_y \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_y k \\ \bar{\rho} \tilde{u}_y \omega \end{pmatrix}$$

avec on le rappelle  $\bar{p} = \bar{\rho}(\gamma - 1)(\bar{\rho} c_v \tilde{T} + \frac{\bar{\rho}}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \frac{\bar{\rho}}{2} (\tilde{u}_i \tilde{u}_i - \tilde{u}_i \tilde{u}_i))$

Les flux visqueux  $\bar{f}_v$  et  $\bar{g}_v$  sont donnés par :

$$\bar{f}_v = \begin{pmatrix} 0. \\ -(\bar{\sigma}_{xx} - \tau_{xx}^{rey}) \\ -(\bar{\sigma}_{xy} - \tau_{xy}^{rey}) \\ -(\tilde{u}_x(\bar{\sigma}_{xx} - \tau_{xx}^{rey}) - \tilde{u}_y(\bar{\sigma}_{yx} - \tau_{yx}^{rey}) - \Phi_x - \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial x}) \\ -\alpha_2 \frac{\partial k}{\partial x} \\ -\alpha_4 \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\bar{g}_v = \begin{pmatrix} 0. \\ -(\bar{\sigma}_{xy} - \tau_{xy}^{rey}) \\ -(\bar{\sigma}_{yy} - \tau_{yy}^{rey}) \\ -\tilde{u}_x(\bar{\sigma}_{xy} - \tau_{xy}^{rey}) - \tilde{u}_y(\bar{\sigma}_{yy} - \tau_{yy}^{rey}) - \Phi_y - \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial y} \\ -\alpha_2 \frac{\partial k}{\partial y} \\ -\alpha_4 \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le terme source en coordonnées cylindriques est égal à :

$$\bar{S}_{cari} = \begin{pmatrix} +\frac{\bar{\rho}\tilde{u}_y}{y} \\ +\frac{\bar{\rho}\tilde{u}_x\tilde{u}_y}{y} - \frac{(\bar{\sigma}_{xy} - \tau_{xy}^{rey})}{y} \\ +\frac{\bar{\rho}\tilde{u}_y\tilde{u}_y}{y} - \frac{(\bar{\sigma}_{yy} - \bar{\sigma}_{\theta\theta} - \tau_{yy}^{rey} + \tau_{\theta\theta}^{rey})}{y} \\ -\frac{\alpha_2}{y} \frac{\partial k}{\partial y} - \frac{\alpha_1}{y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u}_y}{y} - \frac{\tilde{u}_x(\bar{\sigma}_{xy} - \tau_{xy}^{rey})}{y} - \frac{\tilde{u}_y(\bar{\sigma}_{yy} - \tau_{yy}^{rey})}{y} \\ +\tau^{rey} \otimes \bar{\nabla} \vec{u} + \beta^* \bar{\rho} \omega k + \frac{\bar{\rho}k\tilde{u}_y}{y} - \frac{\alpha_2}{y} \frac{\partial k}{\partial y} \\ +\alpha_3 \tau^{rey} \otimes \bar{\nabla} \vec{u} + \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\bar{\rho}\omega\tilde{u}_y}{y} - \frac{\alpha_4}{y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture des vecteurs, les notations suivantes ont été utilisées :

$$\alpha_1 = \left( \frac{\mu}{Pr} C_p + \frac{\mu_t}{Pr_t} C_p \right)$$

$$\alpha_2 = (\mu + \sigma^* \mu_t)$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma \omega}{k}$$

$$\alpha_4 = (\mu + \sigma \mu_t)$$

Les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_{yy} = 2\mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \mathcal{I} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{y\theta} = 0$$

$$\bar{\sigma}_{yx} = 2\mu \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{u_y}{y} - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \mathcal{I} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta x} = 0$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \mathcal{I} \right)$$

Le terme de production lié au gradient du champ moyen se simplifie aussi dans l'hypothèse d'axisymétrie :

$$\begin{aligned} \text{Prod} &= -\tau^{rey} \otimes \vec{\nabla} \vec{u} \\ &= -(\tau_{yy}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \tau_{yx}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} + \tau_{\theta\theta}^{rey} \left( \frac{\tilde{u}_y}{y} \right) + \tau_{xy}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} + \tau_{xx}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}) \end{aligned}$$

### 3.2 Equations résolues dans le nouveau système de coordonnées $(\xi, \eta)$

Les coordonnées  $(\xi, \eta)$  curvilignes sont introduites dans le cas de maillages non homogènes selon certaines directions, ou pour des géométries complexes où les parois sont curvilignes comme c'est le cas pour la tuyère 2D axisymétrique considérée. Il est alors plus facile, en différences finies, de résoudre les équations dans le plan transformé  $(\xi, \eta)$  où le maillage est régulier.

La méthode utilisée consiste à changer localement de coordonnées  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  tout en exprimant encore le champ de vitesse dans le repère lié à  $(x, y)$  :

$$\vec{V} = u(\xi, \eta, \zeta) \vec{x} + v(\xi, \eta, \zeta) \vec{y}$$

Cette méthode est plus simple que d'exprimer  $\vec{V}$  dans le nouveau repère lié aux coordonnées  $(\xi, \eta)$ , notamment pour comparer les quantités calculées aux quantités mesurées. On considère donc le changement de coordonnées  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ . Les équations s'écrivent alors sous forme vectorielle :

$$J \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + J \bar{S}_c = 0$$

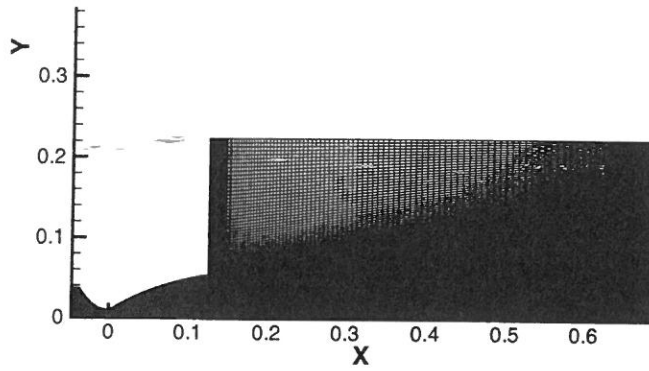


FIG. 4 - Géométrie dans le plan physique

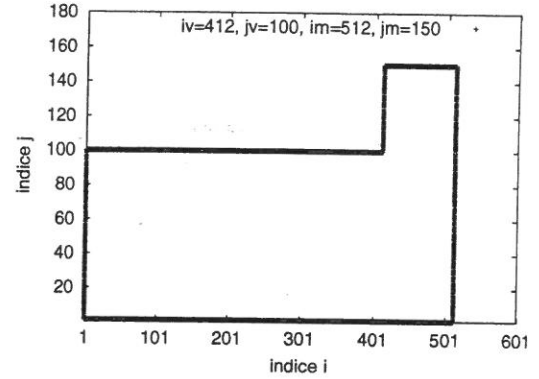


FIG. 5 - Plan transformé (i,j)

avec

$$\begin{aligned}\widehat{F} &= \alpha_\xi \bar{f} + \beta_\xi \bar{g}, \quad \widehat{G} = \alpha_\eta \bar{f} + \beta_\eta \bar{g}, \\ \widehat{F}_v &= \alpha_\xi \bar{f}_v + \beta_\xi \bar{g}_v, \quad \widehat{G}_v = \alpha_\eta \bar{f}_v + \beta_\eta \bar{g}_v,\end{aligned}$$

où les quantités  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  sont les éléments métriques de la transformation et  $J$  caractérise le jacobien. La transformation des coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\alpha_\xi &= J\xi_x \quad \beta_\xi = J\xi_y \quad \alpha_\eta = J\eta_x \quad \beta_\eta = J\eta_y \\ 1 \leq \xi = i \leq 512 \quad 1 \leq \eta = j \leq 150\end{aligned}$$

Dans le cas considéré, le plan transformé correspondant au domaine de calcul de la figure (4), est représenté sur la figure (5). Le point anguleux du domaine de calcul, correspondant au dernier point de la paroi de la tuyère en sortie, a pour coordonnées  $i = i_v = 412$  et  $j = j_v = 100$ .

La frontière  $i = 1$  et  $1 \leq j \leq j_v$  correspond à l'entrée de la tuyère. Celle pour laquelle  $j = j_v$  et  $1 \leq i \leq i_v$  représente la paroi de la tuyère. Le plan  $i = i_v$  pour  $1 \leq j \leq j_v$  est le plan de sortie de la tuyère. Le fluide en sortie est éjecté dans de l'air à température et pression ambiante. La frontière  $i = i_v$  et  $j_v \leq j \leq j_m$  est la paroi externe verticale qui termine la tuyère, en contact avec l'air ambiant. Les plans de sortie du domaine de calcul  $j = j_m$  pour  $i_v \leq i \leq i_m$  ainsi que  $i = i_m$  pour  $1 \leq j \leq j_m$  sont des frontières fluides. Enfin,  $j = 1$  pour  $1 \leq i \leq i_m$  est le plan de symétrie fluide de l'ensemble.

Nous passons maintenant à la description des méthodes numériques employées pour résoudre les équations discrétisées sur le domaine de calcul.

## 4 Résolution numérique

A très haut nombre de Reynolds, lorsque les effets de la viscosité sont faibles par rapport aux effets inertiels, les équations de Navier-Stokes correspondent aux équations d'Euler dont la discrétisation spatiale repose sur la théorie des systèmes hyperboliques.

Concernant la discrétisation temporelle des équations, elle est soit explicite, soit implicite. Lorsque les effets de diffusion sont importants et constituent un facteur limitant du nombre de CFL, la résolution des équations devient implicite, convergeant vers la solution stationnaire.

Dans cette partie nous présentons la discrétisation spatiale et temporelle utilisées dans nos simulations, avant de décrire en détail les conditions aux limites imposées à l'entrée, à la sortie et sur les parois du domaine de calcul. Dans la suite, une variable au point  $\xi_i = i$ ,  $\eta_j = j$  et à l'instant  $t = n \Delta t$  sera définie par  $(\cdot)_{i,j}^n$ . Enfin, nous pouvons souligner que les schémas que nous utilisons sont découplés en temps et en espace.

### 4.1 Algorithme de résolution explicite des équations

L'intégration temporelle explicite des équations est réalisée par un schéma d'Euler d'ordre un, qui s'écrit :

$$\bar{Q}^{n+1} = \bar{Q}^n + \Delta t L(\bar{Q}^n) + \Delta t S^n$$

où l'opérateur  $L(\bar{Q}^n)$  représente l'opérateur spatial discrétisé et  $\Delta t S^n$  un éventuel terme source.

Les dérivées apparaissant dans les termes de diffusion visqueuse et de diffusion turbulente sont discrétisés par un schéma centré d'ordre deux, tandis que le terme source est directement évalué aux points  $i$  et  $j$ .

$$\frac{\partial \widehat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}_v}{\partial \eta} = \left( \frac{\widehat{F}_{v,i+1/2,j} - \widehat{F}_{v,i-1/2,j}}{\Delta \xi} \right) + \left( \frac{\widehat{G}_{v,i,j+1/2} - \widehat{G}_{v,i,j-1/2}}{\Delta \eta} \right)$$

Par définition du maillage transformé on a :  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ .

Les termes de convection sont discrétisés par un schéma d'Harten Yee d'ordre deux, à variation totale décroissante, basé sur le solveur de Roe [28], [43], [45]. Les équations discrétisées s'écrivent :

$$\frac{\partial \check{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \check{G}}{\partial \eta} = \left( \frac{\check{F}_{i+1/2,j} - \check{F}_{i-1/2,j}}{\Delta \xi} \right) + \left( \frac{\check{G}_{i,j+1/2} - \check{G}_{i,j-1/2}}{\Delta \eta} \right)$$

Le flux numérique associé au schéma s'écrit sous forme vectorielle :

$$\check{F}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} [\widehat{F}_{i+1,j} + \widehat{F}_{i,j} + R_{\xi(i+1/2,j)} \Phi_{\xi(i+1/2,j)}]$$

Les éléments de la matrice associée au limiteur  $\Phi_{\xi(i+1/2,j)}$  sont donnés en annexe (A.5). La matrice  $R_{\xi(i+1/2,j)}$  est la matrice des vecteurs propres de la matrice jacobienne  $A_{\xi} = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \bar{Q}}$  à droite.

### 4.2 Algorithme implicite de résolution des équations

L'intégration temporelle des équations est également du premier ordre.

Les termes de diffusion visqueuse et de diffusion turbulente sont également discrétisés par un schéma centré d'ordre deux.



$$\frac{\partial \widehat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}_v}{\partial \eta} = \left( \frac{\widehat{F}_{vi+1/2,j} - \widehat{F}_{vi-1/2,j}}{\Delta \xi} \right) + \left( \frac{\widehat{G}_{vi,j+1/2} - \widehat{G}_{vi,j-1/2}}{\Delta \eta} \right)$$

La discrétisation implicite d'une équation de convection scalaire à une dimension est rappelée en annexe (A.3). Le passage de la discrétisation d'une équation scalaire linéaire à la discrétisation des systèmes hyperboliques non linéaires n'est pas unique. Il existe plusieurs linéarisations possibles. La discrétisation implicite des systèmes hyperboliques que nous utilisons est également décrite en annexe (A.4 et A.5). Comme cela est pratiqué habituellement, la méthode générale utilisée pour résoudre les équations est basée localement sur les variables caractéristiques [44].

Pour discrétiser nos équations bi-dimensionnelles, les deux directions d'espace sont découplées et linéarisées séparément. Cette approche est ensuite couplée à une résolution numérique de type ADI. Elle permet d'obtenir un système tridiagonal par direction. La forme linéarisée s'écrit d'une façon générale [42] :

$$\begin{aligned} & [Z + \lambda^\xi \theta (\mathbf{H}_{i+1/2,j}^{\xi,n} - \mathbf{H}_{i-1/2,j}^{\xi,n}) + \lambda^\eta \theta (\mathbf{H}_{i,j+1/2}^{\eta,n} - \mathbf{H}_{i,j-1/2}^{\eta,n})] (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n) \\ & + \lambda^\xi \theta (\widehat{F}_{vi+1/2,j}^{n+1} - \widehat{F}_{vi+1/2,j}^n - \widehat{F}_{vi-1/2,j}^{n+1} + \widehat{F}_{vi-1/2,j}^n) \\ & + \lambda^\eta \theta (\widehat{G}_{vi,j+1/2}^{n+1} - \widehat{G}_{vi,j+1/2}^n - \widehat{G}_{vi,j-1/2}^{n+1} + \widehat{G}_{vi,j-1/2}^n) \\ & = -\lambda^\xi (\check{F}_{i+1/2,j}^n - \check{F}_{i-1/2,j}^n) - \lambda^\eta (\check{G}_{i,j+1/2}^n - \check{G}_{i,j-1/2}^n) \\ & - \lambda^\xi (\widehat{F}_{vi+1/2,j}^n - \widehat{F}_{vi-1/2,j}^n) - \lambda^\eta (\widehat{G}_{vi,j+1/2}^n - \widehat{G}_{vi,j-1/2}^n) \end{aligned}$$

avec

$$H_{i+1/2,j}^{\xi,n} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n) = \frac{1}{2} [A_{\xi(i+1/2,j)} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n)_{i+1/2,j} + \Omega_{\xi(i+1/2,j)} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n)]$$

et

$$H_{i,j+1/2}^{\eta,n} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n) = \frac{1}{2} [A_{\eta(i,j+1/2)} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n)_{i,j+1/2} + \Omega_{\eta(i,j+1/2)} (\overline{Q}^{n+1} - \overline{Q}^n)]$$

comme pour une équation monodimensionnelle. Les deux matrices  $\Omega_k$  sont données par :

$$\Omega_{\xi(i+1/2,j)} = (\mathcal{R}_{\xi(i+1/2,j)} \text{Diag}[-\psi(a_{\xi(i+1/2,j)}^l)] \mathcal{R}_{\xi(i+1/2,j)}^{-1}) \Delta_{i+1/2,j}$$

$$\Omega_{\eta(i,j+1/2)} = (\mathcal{R}_{\eta(i,j+1/2)} \text{Diag}[-\psi(a_{\eta(i,j+1/2)}^l)] \mathcal{R}_{\eta(i,j+1/2)}^{-1}) \Delta_{i,j+1/2}$$

avec

$$\Delta_{i+1/2,j}(\overline{Q}) = \overline{Q}_{i+1} - \overline{Q}_i$$

Au final, en développant les expressions, on obtient pour la partie convective un système tridiagonal par bloc par direction du même type que ceux décrits en annexe (A.5).

Les termes visqueux sont simplement modélisés par un terme de diffusion de type Laplacien. La linéarisation des flux visqueux est réalisée à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre [21], [30] :

$$\widehat{F}_{vi+1/2,j}^{n+1} = \widehat{F}_{vi+1/2,j}^n + \frac{\partial \widehat{F}_v}{\partial \overline{Q}} \Delta \overline{Q}$$

Avec les notations utilisées, il n'y a besoin de discrétiser que la partie  $\frac{\partial \widehat{F}_v}{\partial \overline{Q}} \Delta \overline{Q}$ . Elle est calculée en annexe (A.8). De façon à conserver un système tridiagonal à résoudre, seuls les termes visqueux-diagonaux ont été conservés dans la discrétisation.

En régime turbulent, il y a deux équations supplémentaires à discrétiser. En plus des termes de diffusion visqueuse et turbulente, il faut impliciter les termes de production et de dissipation. En réalité, l'implication ou l'explicitation de ces deux termes dépend de leur signe. Si ces termes, ramenés dans le membre de gauche des équations de transport de  $k$  et  $\omega$  sont positifs, ils contribuent à renforcer la diagonale dominante. Ils sont alors discrétisés implicitement. Dans le cas contraire, s'ils sont négatifs, des instabilités se développent dans l'écoulement pouvant entraîner la divergence du calcul. C'est pourquoi ils sont alors discrétisés explicitement.

Enfin, en configuration axisymétrique, les termes sources supplémentaires en  $\frac{1}{y}$ , sont d'un ordre de grandeur inférieur aux autres et ils sont négligés dans la phase implicite de résolution.

La formulation ADI retenue pour résoudre le système différentiel s'écrit [42] :

$$\begin{aligned} [\mathcal{I} + \lambda^\xi \theta (\check{H}_{i+1/2,j}^{\xi,n} - \check{H}_{i-1/2,j}^{\xi,n})] D^* &= -\lambda^\xi (\check{F}_{i+1/2,j}^n - \check{F}_{i-1/2,j}^n) - \lambda^\eta (\check{G}_{i,j+1/2}^n - \check{G}_{i,j-1/2}^n) + \Delta t (S^{n+1}) \\ &\quad - \lambda^\xi (\widehat{F}_{vi+1/2,j}^n - \widehat{F}_{vi-1/2,j}^n) - \lambda^\eta (\widehat{G}_{vi,j+1/2}^n - \widehat{G}_{vi,j-1/2}^n) \\ [\mathcal{I} + \lambda^\eta \theta (\check{H}_{i,j+1/2}^{\eta,n} - \check{H}_{i,j-1/2}^{\eta,n})] D &= D^* \\ \overline{Q}^{n+1} &= \overline{Q}^n + D \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} [\mathcal{I} + \lambda^\xi \theta (\check{H}_{i+1/2,j}^{\xi,n} - \check{H}_{i-1/2,j}^{\xi,n})] D^* &= -\Delta t L(\overline{Q}^n) - \Delta t S^n \\ [\mathcal{I} + \lambda^\eta \theta (\check{H}_{i,j+1/2}^{\eta,n} - \check{H}_{i,j-1/2}^{\eta,n})] D &= D^* \\ \overline{Q}^{n+1} &= \overline{Q}^n + D \end{aligned}$$

Les systèmes matriciels à résoudre sont tridiagonaux par bloc dans chaque direction de l'espace. L'algorithme utilisé pour obtenir la solution est un algorithme qui transforme le système tridiagonal en un système triangulaire supérieur. La résolution du système triangulaire supérieur est immédiate par remontée. L'algorithme est décrit en détail en annexe (A.10).

La section suivante présente les conditions aux limites associées à la résolution numérique des équations sur les bords du domaine de calcul.

## 5 Initialisation et conditions aux limites

### Initialisation du calcul

Les champs de densité, de vitesse, et d'énergie totale,  $(\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho E)$ , sont initialisés par la solution isentropique de l'écoulement correspondant aux conditions réservoir imposées à l'entrée de la tuyère. On limite ainsi le temp de calcul de la simulation. La solution est ensuite corrigée par un profil de couche limite sur la paroi de la tuyère. A l'entrée, la pression totale vaut  $P_t = 43.3 \cdot 10^5$  Pa et la température totale vaut  $T_t = 324$  K. Nous pouvons souligner qu'en conséquence de la pression génératrice très importante, la densité totale à l'entrée vaut  $\rho_i = 46 \text{ kg/m}^3$ . Les solutions isentropiques sont les solutions vérifiant les relations :

$$\begin{aligned}\frac{p}{P_t} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{T}{T_t} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \\ \frac{\rho}{\rho_t} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\gamma-1)} \\ \frac{A}{A_c} &= \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}\end{aligned}$$

A partir de la géométrie de la tuyère et en imposant le nombre de Mach au col, on obtient de proche en proche la distribution du nombre de Mach dans les différentes sections  $A(x)$ . Cette distribution permet alors de calculer toutes les quantités le long de l'axe  $(Ox)$ . Dans notre cas, la distribution  $M(x)$  est obtenue en résolvant  $M = f\left(\frac{A}{A_c}, M\right)$  par une méthode de Newton. On initialise de telle sorte que le fluide soit subsonique en entrée, sonic au col et supersonique dans la partie divergent de la tuyère. Cela permet d'amorcer plus rapidement les phénomènes physiques d'onde de choc et d'interaction entre l'onde de choc et les couches limites dans le divergent, au cours du calcul.

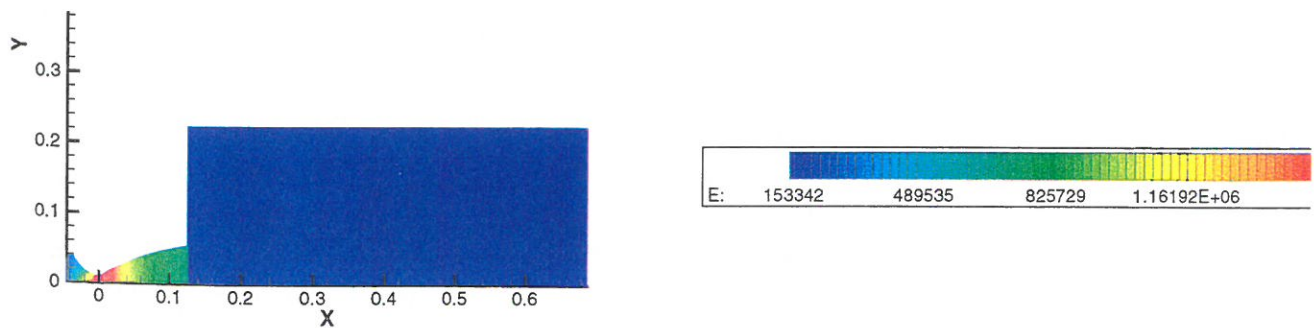
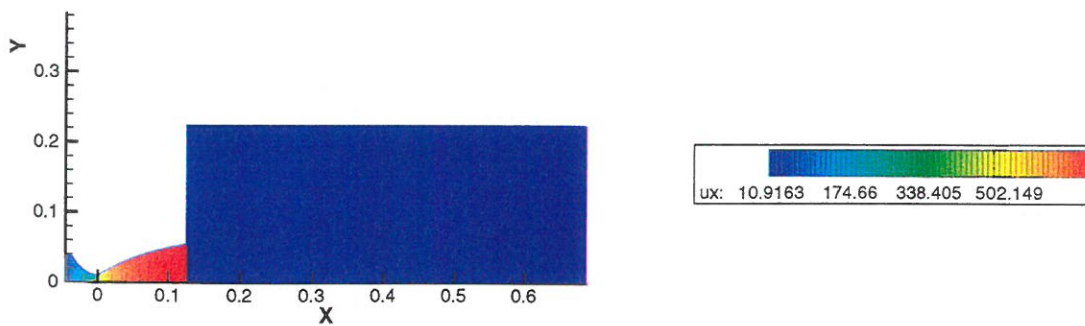
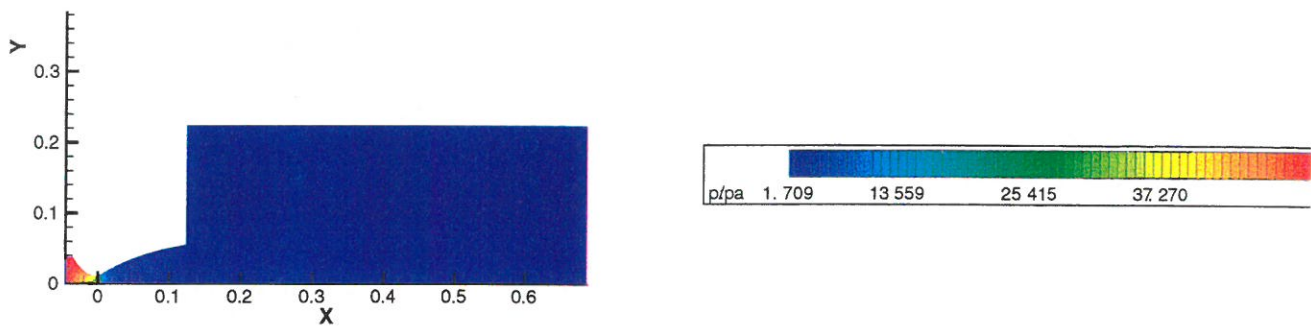
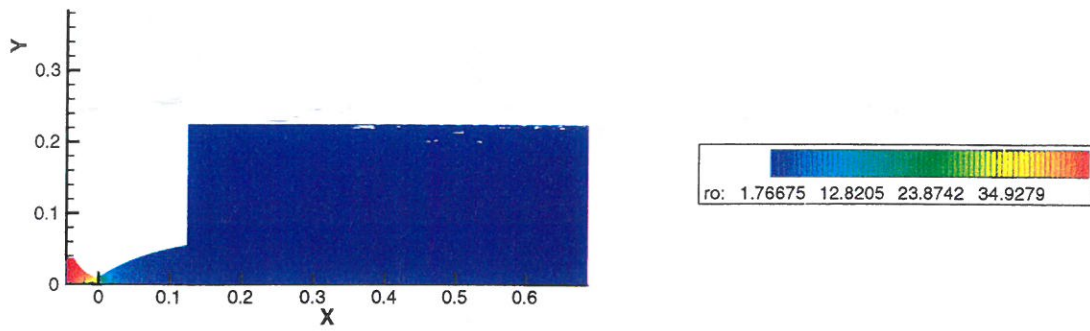
Les figures (6), (7), (8), (9) représentent respectivement la distribution de densité, de pression, de vitesse longitudinale et de l'énergie totale dans tout le domaine de calcul à l'initialisation. On observe, sur la figure (8) représentant la vitesse longitudinale, la forte accélération du fluide dans le convergent puis le divergent associé au fort gradient de pression.

Lorsque le calcul est effectué en tenant compte du modèle de turbulence, la modélisation est prise en compte à partir du col de la tuyère. Les variables turbulentes sont nulles en amont du col, tandis qu'elles sont initialisées dans le reste du domaine de calcul par :

$$\begin{aligned}k &= 1 \text{ [m}^2 \text{ s}^{-2}\text{]} \\ \omega &= \omega_{ini} = 1 \cdot 10^6 \text{ [m}^2 \text{ s}^{-3}\text{]}\end{aligned}$$

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées aux variables conservatives  $(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}, \bar{\rho} \tilde{v}, \bar{\rho} \tilde{E})$  restent les mêmes en régime laminaire et turbulent. Par contre, les valeurs imposées aux variables turbulentes  $k$  et  $\omega$  sur les parois dépendent du régime laminaire ou turbulente. Aux extrémités



fluides du domaine, elles sont interpolées. Les conditions aux limites imposées aux parois et aux différentes extrémités du domaine de calcul vont varier selon que la résolution est explicite ou implicite.

### Conditions aux limites imposées à l'entrée de la tuyère

D'une façon générale on distingue deux types de conditions aux limites [20], [35], [40] :

- des conditions aux limites analytiques
- des conditions aux limites numériques

L'étude des conditions analytiques est nécessaire pour s'assurer que le problème est bien posé du point de vue mathématique. Les conditions analytiques sont indépendantes de la méthode numérique utilisée et correspondent à un comportement physique du système étudié. La méthode retenue ici pour analyser les conditions aux limites analytiques à imposer est la méthode des caractéristiques. Concernant la nécessité d'imposer des conditions aux limites numériques, cela est lié à la dimension finie du domaine de calcul et au calcul des quantités non imposées. Ce sont les conditions numériques qui permettent d'avoir au moins autant d'inconnues que d'équations.

On considère ci-dessous les équations d'Euler 2D filtrées temporellement en coordonnées curvilignes :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (4)$$

où  $\bar{Q}$ ,  $\hat{F}$ ,  $\hat{G}$  sont définis dans la section (3.2).

Seuls les termes associés à la direction  $\xi$ , correspondant à l'entrée de la tuyère, sont explicités, le reste étant mis dans le second membre  $SM$ . L'équation s'écrit, sous forme non conservative :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \mathcal{A}_\xi \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + SM = 0 \quad (5)$$

où  $\mathcal{A}_\xi$  est la matrice jacobienne du changement de variables de l'espace physique à l'espace des caractéristiques  $Q \Rightarrow \Omega$ . Elle est définie en annexe (A.12).

La matrice  $\mathcal{A}_\xi$  a pour valeurs propres [38] :

$$\begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = \xi_x u + \xi_y v \\ \lambda^3 = \lambda^1 + c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ \lambda^4 = \lambda^1 - c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{cases}$$

où  $c$  est la vitesse du son dans la direction définie par la normale à  $\xi = cte$ .

$\lambda^3$  et  $\lambda^4$  sont les vitesses de propagation des ondes acoustiques dans les deux directions d'espace définies par  $(\overrightarrow{grad\xi})$  et  $(-\overrightarrow{grad\xi})$  tandis que la variable  $\lambda^1$  correspond à la vitesse à laquelle est convectée l'entropie.  $\lambda^2$  est la vitesse de convection de la vitesse transverse.

En projetant le système d'équations sous forme non conservative sur  $\mathcal{R}_\xi^{-1}$  on se ramène aux équations sous forme caractéristiques :

$$\mathcal{R}_\xi^{-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + \mathcal{R}_\xi^{-1} SM = 0 \quad (6)$$

où la matrice  $R_\xi^{-1}$  est construite en s'inspirant de [37] et dont l'expression est donnée en annexe (A.12). En suivant la méthode préconisée par K. W. Thompson, les conditions aux limites analytiques sont déterminées à partir du calcul de la variation des caractéristiques  $(\mathcal{R}_\xi^{-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t})_l$  associé à la valeur propre  $\lambda^l$  [4], [35].

Lorsqu'une valeur propre est négative, la solution à l'entrée dépend toujours continument de la condition initiale et il n'y a pas besoin d'imposer la variable caractéristique associée. L'onde est sortante et la variable caractéristique correspondante est déterminée à partir de sa valeur à l'intérieur du domaine de calcul. Lorsqu'une valeur propre est positive, la solution à l'entrée ne dépend plus continument de la condition initiale. Il faut imposer une condition à la limite sur cette variable au cours du temps.

En termes de variables physiques, nous avons imposé la pression et la température totale,  $P_i$  et  $T_i$ , ainsi que la vitesse transverse  $u_y$ . En revanche, la vitesse longitudinale est laissée libre à l'entrée. Sa valeur est déterminée par l'écoulement lui-même, de manière à rester compatible avec le reste des variables imposées. Le système résolu à l'entrée est donné en annexe (A.13).

En résolution implicite, le système résolu à l'entrée en explicite sert d'initialisation aux coefficients des matrices triangulaires selon la direction  $\xi$ .

### Conditions aux limites imposées sur l'axe de symétrie

Sur l'axe de symétrie ( $j = 1$ ), on impose que toutes les quantités antisymétriques soient nulles tandis que les quantités symétriques sont égales de part et d'autre de la frontière  $j = 1$ . Donc en particulier,  $u_y = 0$ ,  $\frac{\partial u_x}{\partial \eta} = 0$ . De même,  $\frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{u_y}{y}) = 0$  puisque c'est une quantité symétrique.

Cela permet également d'évaluer  $\frac{u_y}{y}$  en  $j = 1$ .

En phase implicite de résolution, on résout par triangularisation le même type de système tridiagonal que celui obtenu pour les points internes :

$$b_m u_m + c_m u_{m+1} = \nu_m$$

mais en utilisant les approximations associées aux conditions d'axisymétrie. Les dérivées sont calculées en  $j = 1$  en utilisant  $\frac{\partial q}{\partial \eta} = (q_{j+1} - q_j)$ .

### Conditions aux limites imposées en sortie fluide du domaine de calcul

Les sorties fluides du domaines de calcul sont caractérisées par  $i = i_m$  et  $j = j_m$ . Elles ne sont pas traitées de la même manière. L'écoulement éjecté de la tuyère est principalement convecté dans la direction longitudinale, entraînant le fluide du caisson initialement au repos vers la sortie fluide caractérisée par  $i = i_m$ . Il est plus délicat de traiter les conditions aux limites sur la paroi fluide haute puisqu'on ne sait pas ce qui entre dans le domaine de calcul.

C'est ainsi que nous imposons des conditions de dérivées nulles sur toutes les variables en  $i = i_m$ , pour  $1 \leq j \leq j_m$  telles que  $\frac{d}{d\xi} = 0$ . En revanche, nous imposons des conditions de non réflexion grâce aux caractéristiques sur la frontière  $1 \leq i \leq i_m$ . Le principe de ces conditions aux limites est le même qu'à l'entrée. C'est ainsi que nous imposons la composante longitudinale de la vitesse, la température et la pression. La composante verticale de la vitesse est laissée libre.

### Conditions aux limites imposées sur la paroi de la tuyère

La paroi de la tuyère est située en  $j = j_v$  pour  $1 \leq i \leq i_v$ . Les conditions aux limites imposées sur la paroi de la tuyère sont données par :

$$T_{pe} = T_{pe}^{ini} = 293 \text{ K}$$

$$u_x = 0$$

$$u_y = 0$$

L'équation de quantité de mouvement est projetée sur paroi pour obtenir la cinquième condition à la limite.

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{n}_w = (\vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}) \cdot \vec{n}_w$$

Ensuite, selon que le point  $\xi_i$  considéré est laminaire ou turbulent, les conditions aux limites imposées sur les variables turbulentes vont changer.

Si le point de la paroi est dans une zone laminaire, on impose :

$$k = 0$$

$$\omega = 0$$

Sinon on impose

$$k = 0$$

$$\omega = \frac{N \mu_w}{\rho_w k_s^2}$$

L'énergie cinétique  $k_s^2$  est définie par [34] :

$$k_s^2 = k_s^+ \frac{\mu_w}{\rho_w} \sqrt{\frac{\rho_w}{\tau_w}}$$

D'où

$$\omega = \frac{N \tau_w}{\mu_w (k^+)^2}$$

$N$  vaut  $N = 2500$  et  $k^+ = 5$  [34].

### Conditions aux limites imposées sur la paroi en sortie

La paroi en sortie est caractérisée par  $i = i_v$  pour  $j_v \leq j \leq j_m$ . Les conditions aux limites imposées sur la paroi au-dessus de la sortie de la tuyère sont les mêmes que celles imposées sur la paroi de la tuyère :

$$T_{pe} = T_{pe}^{ini} = 293 \text{ K}$$

$$u_x = 0$$

$$u_y = 0$$

L'équation de quantité de mouvement est projetée sur paroi pour obtenir la cinquième condition à la limite.

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{n}_w = (\vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}) \cdot \vec{n}_w$$

Concernant les conditions aux limites imposées pour l'énergie cinétique  $k$  et la dissipation spécifique  $\omega$ , elles sont telles que :

$$k = 0$$
$$\omega = \frac{N\mu_w}{\rho_w k_s^2}$$

Le détail de la discrétisation des conditions aux limites sur la paroi est donné en annexe (A.11).

De façon à rester cohérent avec les conditions aux limites imposées en  $j = j_m$   $i > i_v$ , on impose  $\frac{\partial}{\partial \eta} = 0$  au point du coin du domaine caractérisé par  $(i_v, j_m)$ .



## 6 Résultats

Les figures (10) à (13) présentent les champs de densité, de pression, de vitesse longitudinale et verticale obtenus à convergence temporelle. Le critère de convergence est basé sur le calcul des résidus de norme  $L^2$  dans la tuyère. La pression est rendue sans dimension par la pression atmosphérique  $P_a = 0.866 \cdot 10^5$  [Pa]. On rappelle que la pression génératrice vaut  $P_{t_i} = 43.3 \cdot 10^5$  [Pa]. Le débit total à travers une surface et calculé à au col vaut  $\dot{m} = 2.76$  [Kg/(s)]. Nous présentons également les isovalues du nombre de Mach sur la figure (14), car c'est la représentation la plus utilisée pour analyser ces écoulements [23], [29].

On peut remarquer, figures (10) et (11), que la densité et la pression ont peu varié par rapport aux champs initiaux, figures (6) et (7). Nous pouvons souligner que la pression sur les frontières fluides du domaine de calcul est bien égale à la pression atmosphérique. Les forts gradients associés aux interactions entre le choc de décollement et le choc de focalisation interne s'observent plus facilement sur les isovalues de la vitesse longitudinale, de la vitesse verticale et du nombre de Mach sur les figures (12) à (14). On observe, sur la figure (12), le jet supersonique qui sort de la tuyère proche de la paroi haute, et le bulbe de recirculation sur l'axe de symétrie, à l'aval du disque de Mach. Le système de compressions et de détentes dans le jet supersonique résultant des interactions complexes entre le choc de focalisation interne réfléchi et le choc de décollement apparaît clairement sur les isocontours du nombre de Mach, figure (14) [23]. Le jet expulsé se propage vers la sortie du domaine de calcul dans la direction longitudinale sans diffuser.

De façon à étudier finement les phénomènes simulés dans la tuyère, les figures (15), (16) et (17) représentent la composante longitudinale de la vitesse, la composante verticale et le nombre de mach dans la tuyère. On observe bien le bulbe de recirculation sur l'axe sur les isovalues de la vitesse longitudinale, figure (15), tandis que la vitesse verticale permet de visualiser le choc interne, le choc de décollement et le disque de Mach, figure (16). La structure en chapeau, elle, est plus clairement visible sur la distribution du nombre de Mach, figure (17). Le bulbe de recirculation qui se forme en avant du choc normal s'explique par le fait que la pression statique derrière le choc, de très forte intensité, est inférieure à la pression atmosphérique en sortie [24]. Le fluide ne peut réaccélérer derrière le choc que si les lignes de courant divergent dans le cœur subsonic [26]. La pression augmente alors jusqu'à équilibrer la pression atmosphérique en sortie. Ce phénomène pourrait s'expliquer par une réflexion inverse de Mach, mais les raisons de l'existence d'un tel phénomène dans cette configuration sont encore mal connues [14]. Par contre, on peut remarquer d'une façon assez globale que le choc normal est oblique par rapport à l'axe de symétrie. Ce n'est pas ce qui est observé d'autres études numériques [5], [24], [29]. De futures études devront déterminer si cela provient de la difficulté du modèle Wilcox à reproduire le choc de très forte intensité, ou éventuellement du traitement numérique de l'axe de symétrie en implicite.

La figure (18) représente les isovalues de la vitesse longitudinale dans le décollement proche de la paroi de la tuyère. On observe une zone légèrement décollée, alimentée par l'extérieur. Les résultats présentés ici sont difficiles à comparer aux résultats obtenus expérimentalement dans la tuyère TOC à choc interne testée dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA puisque nous n'avons pas tenu compte de la tuyère d'injection [29]. Nous avons néanmoins tracé le profil de la pression statique le long de la paroi pour déterminer l'abscisse du décollement dans notre simulation. La figure (19) représente donc la pression sans dimension le long de la paroi de la tuyère. Au niveau du décollement apparaît un choc oblique, visualisé à travers la remontée en pression autour de  $x = 0.08$  [m]. Le plateau de pression observé en aval correspond à la zone d'eau morte de la zone décollée. Cette topologie d'écoulement est caractéristique d'un décollement libre (FSS). Nous pouvons souligner que comme d'autres

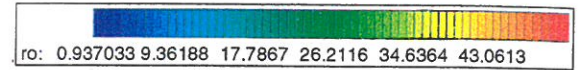
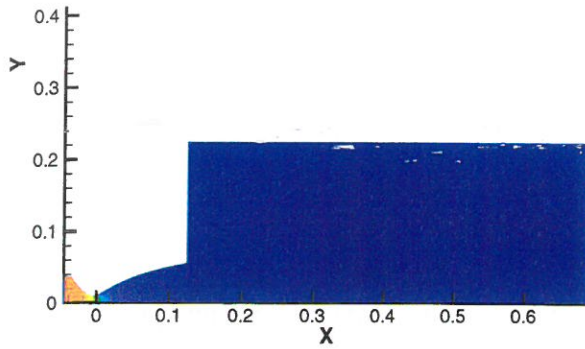


FIG. 10 – *Densité*

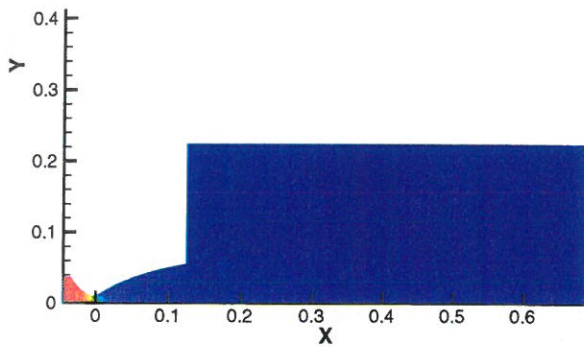


FIG. 11 – *Pression adimensionnée par la pression atmosphérique*

modèles de turbulence, la remontée en pression se produit en amont de ce qui a été mesuré expérimentalement et qui se situe plutôt autour de  $x = 0.1$  [m] [29].

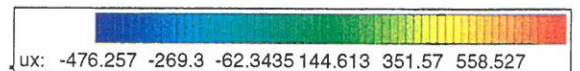
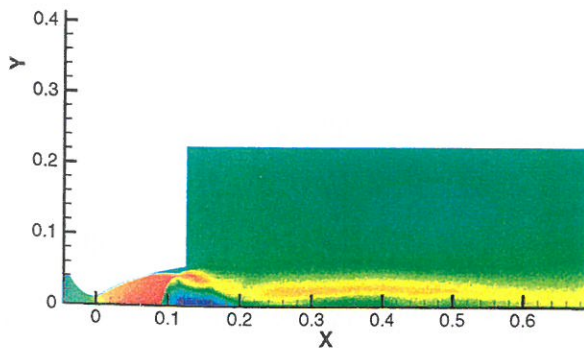


FIG. 12 – *Vitesse longitudinale*

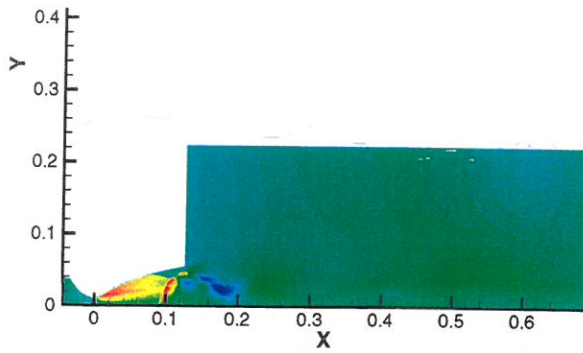


FIG. 13 – *Vitesse verticale*

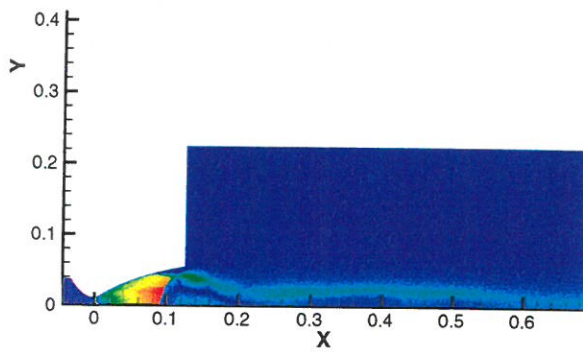


FIG. 14 – *Nombre de Mach*

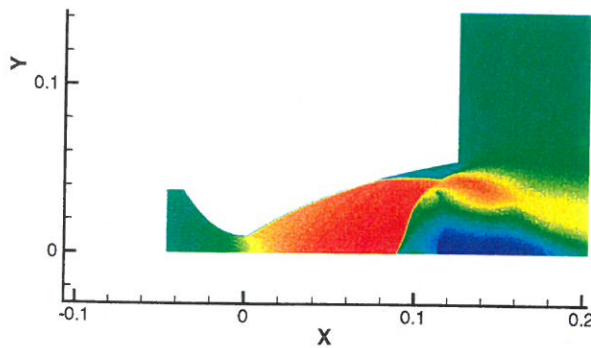


FIG. 15 – *Vitesse longitudinale dans la tuyère*

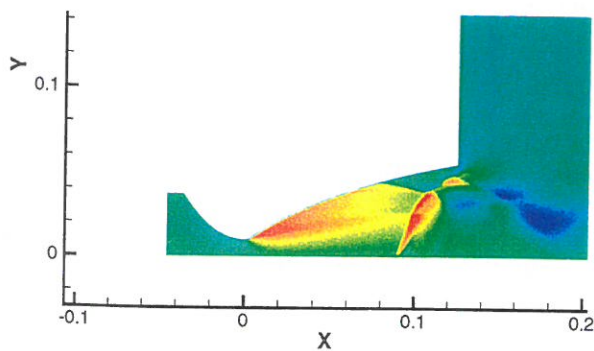


FIG. 16 – *Vitesse verticale dans la tuyère*

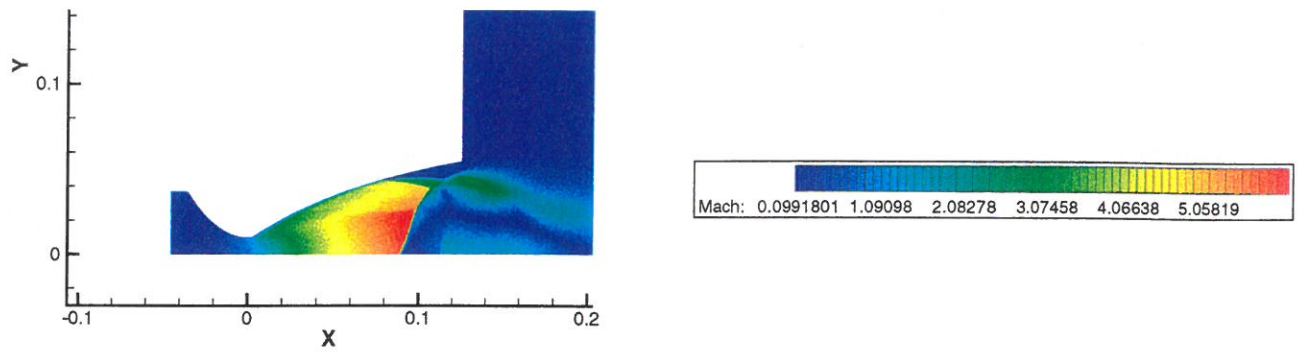


FIG. 17 – Nombre de Mach dans la tuyère

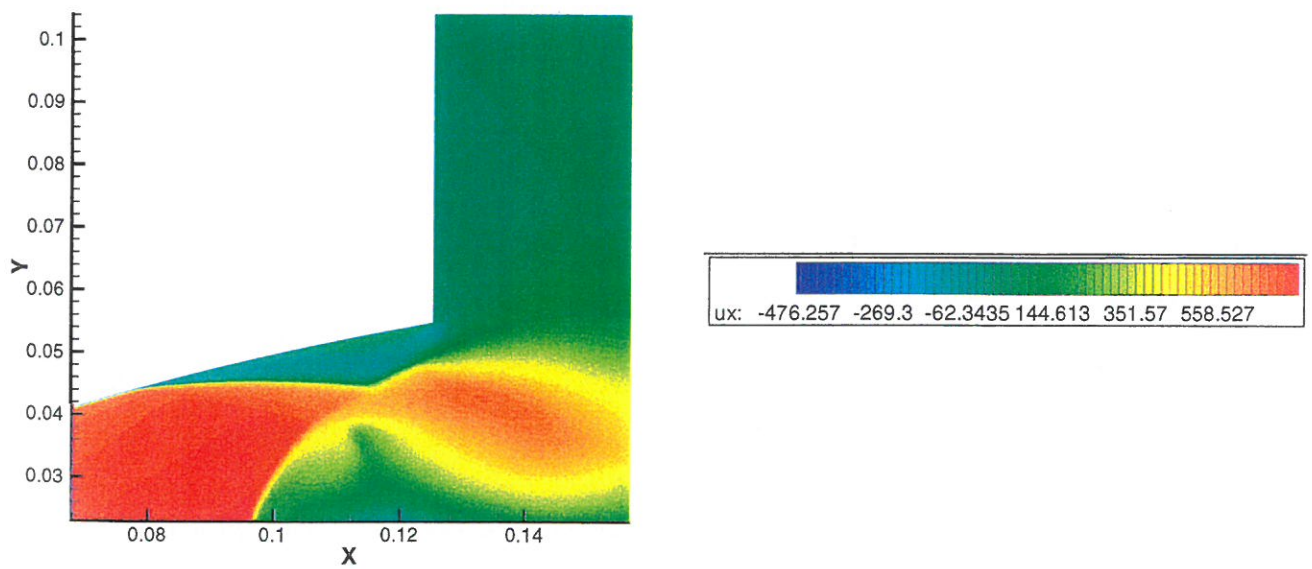


FIG. 18 – Zone de décollement

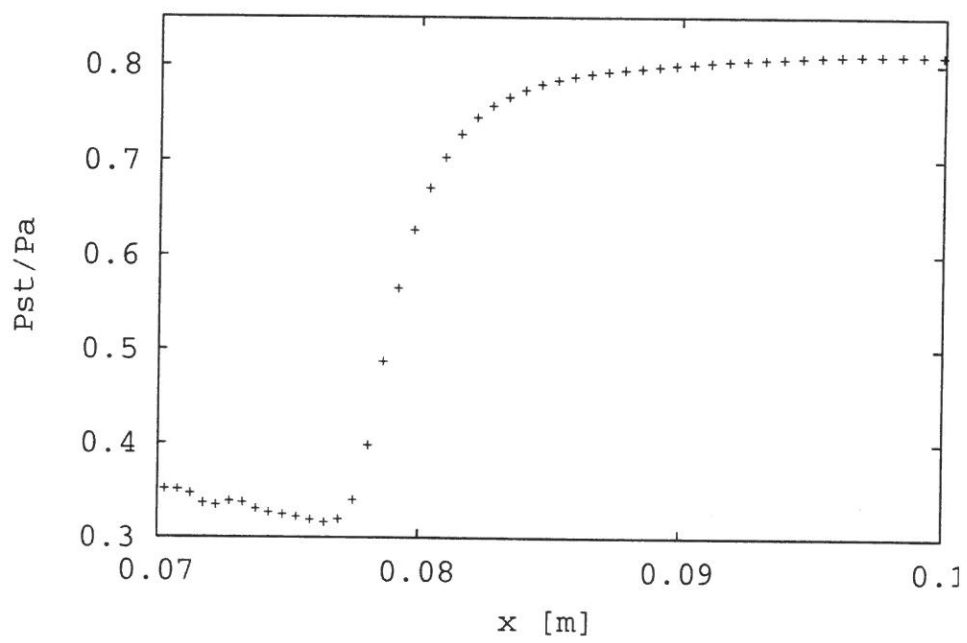


FIG. 19 – Rapport de la pression statique à la pression atmosphérique sur la paroi

## 7 Conclusions et perspectives

Nous avons réalisé une simulation de l'écoulement dans une tuyère TOC à choc interne de type Vulcain 2, testée expérimentalement dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA [27], et sans tuyère d'injection. La simulation a été réalisée avec un code compressible axisymétrique [33] utilisant le modèle de turbulence de D. C. Wilcox [39]. Après une présentation détaillée des équations de Navier-Stokes turbulentes résolues en configuration axisymétrique, les méthodes de résolution numérique explicite et implicite des équations ont été exposées. Les conditions aux limites imposées sur les différentes frontières du domaine de calcul ont été discutées. Nous avons ensuite présenté les résultats obtenus numériquement dans la tuyère TOC à choc interne pour un rapport de pression  $Pt_i/P_a = 50$ .

Les résultats présentés sur la vitesse longitudinale, la vitesse verticale et le nombre de Mach sont qualitativement en très bon accord avec ce qui a déjà été observé et calculé dans ce type de tuyère. On retrouve en particulier la structure complexe de choc en chapeau associée à la réflexion singulière du choc de focalisation interne sur l'axe. Le bulbe de recirculation situé sur l'axe de symétrie est également prédit par la simulation. Nous observons de plus la configuration de décollement libre avec la recirculation dans la zone d'interaction entre l'onde de choc et la couche limite proche de la paroi. Nous retrouvons bien qu'à ce très haut rapport de pression le décollement est situé au bord de la lèvre de la tuyère [29].

En revanche, l'intensité du choc droit est sous estimée par le calcul et nous ne retrouvons pas exactement la forme du choc proche de l'axe. La position du choc oblique en amont de la recirculation, est également mal prédite. Nous pouvons à nouveau souligner que c'est aussi le cas d'autres modèles de turbulence [24], [29].

La seconde étape de cette étude consiste à améliorer le modèle initial de turbulence de D. C. Wilcox en introduisant les corrections non linéaires préconisées par F. Thivet and al. [34]. En effet, F. Thivet and al. ont montré que le modèle initial pouvait présenter une violation des règles de réalisabilité (positivité de la variance des fluctuations de vitesse et vérification de l'inégalité de Schwartz pour les corrélations croisées), mais que cela pouvait être évité en rajoutant des termes non linéaires dans le modèle. Il est également envisagé de rajouter la tuyère d'injection dans les futurs calculs pour tester son influence sur la topologie de l'écoulement obtenu. Selon les résultats obtenus, il pourra être bénéfique d'implémenter un schéma d'ordre élevé dans l'algorithme de résolution pour améliorer la précision de nos résultats.

A plus long terme, l'étude des transitions entre les différentes configurations de décollement (**R**estricted Shock Separation et **F**ree Shock Separation), pourra être envisagée. Il sera probablement nécessaire d'utiliser des modèles statistiques instationnaires de type URANS.

## A Annexe

### A.1 Equations filtrées temporellement en coordonnées cartésiennes

Les équations s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{H}_v}{\partial z} + \bar{S}_c = 0$$

Le vecteur des inconnues principales filtrées vaut :

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{E} \\ \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\omega \end{pmatrix}$$

Les flux Euler  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  sont donnés par :

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{E} + \tilde{u}\bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{u}k \\ \bar{\rho}\tilde{u}\omega \end{pmatrix} \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{E} + \tilde{v}\bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{v}k \\ \bar{\rho}\tilde{v}\omega \end{pmatrix} \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{w}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{E} + \tilde{w}\bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{w}k \\ \bar{\rho}\tilde{u}\omega \end{pmatrix}$$

Les flux visqueux  $\bar{F}_v$ ,  $\bar{G}_v$  et  $\bar{H}_v$  s'écrivent [36] :

$$\bar{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\bar{\sigma}_{11} - \tau_{11}^{rey}) \\ -(\bar{\sigma}_{12} - \tau_{12}^{rey}) \\ -(\bar{\sigma}_{13} - \tau_{13}^{rey}) \\ -\tilde{u}(\bar{\sigma}_{11} - \tau_{11}^{rey}) - \tilde{v}(\bar{\sigma}_{12} - \tau_{12}^{rey}) - \tilde{w}(\bar{\sigma}_{13} - \tau_{13}^{rey}) - \Phi_x \\ -(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \\ -(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G}_v &= \begin{pmatrix} 0. \\ -(\overline{\sigma}_{12} - \tau_{12}^{rey}) \\ -(\overline{\sigma}_{22} - \tau_{22}^{rey}) \\ -(\overline{\sigma}_{23} - \tau_{23}^{rey}) \\ -\tilde{u}(\overline{\sigma}_{12} - \tau_{12}^{rey}) - \tilde{v}(\overline{\sigma}_{22} - \tau_{22}^{rey}) - \tilde{w}(\overline{\sigma}_{23} - \tau_{23}^{rey}) - \Phi_y \\ -(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \\ -(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{pmatrix} \\
\overline{H}_v &= \begin{pmatrix} 0. \\ -(\overline{\sigma}_{13} - \tau_{13}^{rey}) \\ -(\overline{\sigma}_{23} - \tau_{23}^{rey}) \\ -(\overline{\sigma}_{33} - \tau_{33}^{rey}) \\ -\tilde{u}(\overline{\sigma}_{13} - \tau_{13}^{rey}) - \tilde{v}(\overline{\sigma}_{23} - \tau_{23}^{rey}) - \tilde{w}(\overline{\sigma}_{33} - \tau_{33}^{rey}) - \Phi_z \\ -(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial z} \\ -(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix} \\
\overline{S}_c &= \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} ((\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}) \\ \tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \bar{\rho} \omega k \\ \frac{\gamma \omega}{k} \tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta \bar{\rho} \omega^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## A.2 Equations filtrées temporellement en coordonnées cylindriques

La transformation de la dérivée particulière d'une fonction scalaire  $f(r, \theta, x, t)$  des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques s'écrit [3] :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial f}{\partial x}$$



$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial}{\partial x} e_x$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

et

$$\overline{\nabla} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial x} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \overline{\nabla} \vec{u}^S = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \\ & & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{A})_x = \frac{\partial A_{xr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{A_{xr}}{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{A})_r = \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{rx}}{\partial x} + \frac{(A_{rr} - A_{\theta\theta})}{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{A})_\theta = \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta x}}{\partial x} + \frac{2 A_{r\theta}}{r}$$

Les équations de Navier-Stokes filtrées temporellement peuvent s'écrire à l'aide de l'opérateur divergence  $\vec{\nabla} \cdot$  et de l'opérateur gradient  $\vec{\nabla}$  :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \bar{p} = \vec{\nabla} \cdot (\bar{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}^{rey})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} (\bar{\sigma} - \tau^{rey}) + (\frac{\mu C_p}{P_r} + \frac{\mu_t C_p}{P_{r_t}}) \vec{\nabla} \tilde{T} + (\mu + \sigma^* \mu_t) \vec{\nabla} k)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} k) = -\tau^{rey} \otimes \overline{\nabla} \vec{u} - \beta^* \bar{\rho} \omega k + \vec{\nabla} \cdot [(\mu + \sigma^* \mu_t) \vec{\nabla} k]$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \omega) = -\frac{\gamma \omega}{k} \tau^{rey} \otimes \overline{\nabla} \vec{u} - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \vec{\nabla} \cdot [(\mu + \sigma \mu_t) \vec{\nabla} \omega]$$

En utilisant les expressions des différents opérateurs en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\bar{\rho} \tilde{u}_r}{r}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\bar{\rho} \tilde{u}_x \tilde{u}_r}{r} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{xr} - \tau_{xr}^{rey})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{\sigma}_{x\theta} - \tau_{x\theta}^{rey})}{\partial \theta} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{xx} - \tau_{xx}^{rey})}{\partial x} + \frac{(\bar{\sigma}_{xr} - \tau_{xr}^{rey})}{r}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = \frac{\bar{\rho} (\tilde{u}_\theta \tilde{u}_\theta - \tilde{u}_r \tilde{u}_r)}{r} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{rr} - \tau_{rr}^{rey})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{\sigma}_{r\theta} - \tau_{r\theta}^{rey})}{\partial \theta} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{rx} - \tau_{rx}^{rey})}{\partial x} + \frac{(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta} - \tau_{rr}^{rey} + \tau_{\theta\theta}^{rey})}{r}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\theta \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\theta \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_\theta \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = -\frac{\bar{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{r} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{\theta r} - \tau_{\theta r}^{rey})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \tau_{\theta\theta}^{rey})}{\partial \theta} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{\theta x} - \tau_{\theta x}^{rey})}{\partial x} + 2 \frac{(\bar{\sigma}_{r\theta} - \tau_{r\theta}^{rey})}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = & -\frac{(\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_r}{r} + \frac{\tilde{u}_x (\bar{\sigma}_{xr} - \tau_{xr}^{rey})}{r} \\ & + \frac{\tilde{u}_r (\bar{\sigma}_{rr} - \tau_{rr}^{rey}) + \tilde{u}_\theta (\bar{\sigma}_{\theta r} - \tau_{\theta r}^{rey})}{r} + \frac{\partial (\tilde{u}_x (\bar{\sigma}_{xr} - \tau_{xr}^{rey}) + \tilde{u}_r (\bar{\sigma}_{rr} - \tau_{rr}^{rey}))}{\partial r} \\ & + \frac{\partial \tilde{u}_\theta (\bar{\sigma}_{\theta r} - \tau_{\theta r}^{rey})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{u}_x (\bar{\sigma}_{x\theta} - \tau_{x\theta}^{rey}) + \tilde{u}_r (\bar{\sigma}_{r\theta} - \tau_{r\theta}^{rey}))}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_\theta (\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \tau_{\theta\theta}^{rey})}{\partial \theta} + \frac{\partial (\tilde{u}_x (\bar{\sigma}_{xx} - \tau_{xx}^{rey}) + \tilde{u}_r (\bar{\sigma}_{rx} - \tau_{rx}^{rey}))}{\partial x} \\ & + \frac{\partial (\tilde{u}_\theta (\bar{\sigma}_{\theta x} - \tau_{\theta x}^{rey}))}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_2}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_2}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\bar{\rho} k \tilde{u}_r}{r} - \tau^{rey} \otimes \bar{\nabla} \vec{u} - \beta^* \bar{\rho} \omega k + \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_2}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_2}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_2 \frac{\partial k}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \omega \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \omega \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\rho} \omega \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\bar{\rho} \omega \tilde{u}_r}{r} - \alpha_3 \tau^{rey} \otimes \bar{\nabla} \vec{u} - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_4}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_4}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_4 \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

En posant  $\overline{\nabla \vec{u}} = \overline{\vec{A}}$ , on a :

$$\text{Prod} = -(\tau_{rr}^{rey} A_{rr} + \tau_{r\theta}^{rey} A_{r\theta} + \tau_{rx}^{rey} A_{rx} + \tau_{\theta r}^{rey} A_{\theta r} + \tau_{\theta\theta}^{rey} A_{\theta\theta} + \tau_{\theta x}^{rey} A_{\theta x} + \tau_{xr}^{rey} A_{xr} + \tau_{x\theta}^{rey} A_{x\theta} + \tau_{xx}^{rey} A_{xx})$$

$$\begin{aligned} \text{Prod} = & -(\tau_{rr}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \tau_{r\theta}^{rey} (\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\theta}{r}) + \tau_{rx}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + \tau_{\theta r}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} + \tau_{\theta\theta}^{rey} (\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_r}{r}) + \tau_{\theta x}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial x} \\ & + \tau_{xr}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial r} + \tau_{x\theta}^{rey} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \theta} + \tau_{xx}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}) \end{aligned}$$

Pour terminer, nous donnons les expressions des composantes du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques [41] :

$$\bar{\sigma} = \mu(\overline{\nabla \vec{u}} + \overline{\nabla \vec{u}}^t - \frac{2}{3} \overline{\nabla \cdot \vec{u}} \mathcal{I}) = 2\mu(\overline{\nabla \vec{u}}^s - \frac{1}{3} \overline{\nabla \cdot \vec{u}} \mathcal{I})$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= 2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \overline{\nabla \cdot \vec{u}} \mathcal{I}) & \bar{\sigma}_{r\theta} &= 2\mu(\frac{1}{2}(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r})) & \bar{\sigma}_{rx} &= 2\mu(\frac{1}{2}(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r})) \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= 2\mu(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{3} \overline{\nabla \cdot \vec{u}} \mathcal{I}) & \bar{\sigma}_{\theta x} &= 2\mu(\frac{1}{2}(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta})) & \bar{\sigma}_{xx} &= 2\mu(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \overline{\nabla \cdot \vec{u}} \mathcal{I}) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = (\frac{\mu C_p}{Pr} + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t}) \quad \alpha_2 = (\mu + \sigma^* \mu_t) \quad \alpha_3 = \frac{\gamma \omega}{k} \quad \alpha_4 = (\mu + \sigma \mu_t)$$

### A.3 Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'une équation hyperbolique scalaire 1D

Cette section ne présente pour l'instant que les discrétisations explicites et implicites utilisées pour résoudre les équations scalaires hyperboliques du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

avec  $f = au$ . La discrétisation des systèmes linéaires se généralise ensuite. Un schéma temporel à un seul paramètre s'écrit sous forme conservative [19], [43] :

$$u_i^{n+1} + \lambda \theta (h_{i+1/2}^{n+1} - h_{i-1/2}^{n+1}) = u_i^n - \lambda (1 - \theta) (h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

avec  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Lorsque le paramètre  $\theta = 0$ , le schéma est explicite et lorsque  $\theta = 1$ , le schéma est implicite. Nous nous limitons au schéma spatial TVD d'Harten modifié par Yee qui a été utilisé dans nos simulations. La version du flux d'Harten Yee est moins dissipative que la version initiale d'Harten.

Le flux d'Harten Yee au second ordre et vérifiant la propriété TVD s'écrit sous la forme [19] :

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) + \frac{1}{2}\sigma(a_{i+1/2})(g_{i+1} + g_i) - \frac{1}{2}(\psi(a_{i+1/2} + \gamma_{i+1/2})\Delta_{i+1/2} u)$$

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i + \phi_{i+1/2})$$

avec

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}\sigma(a_{i+1/2})(g_{i+1} + g_i) - \frac{1}{2}(\psi(a_{i+1/2} + \gamma_{i+1/2})\Delta_{i+1/2} u)$$

$$\gamma_{i+1/2} = \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta_{i+1/2} u}$$

et

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}(\psi(z) - \lambda z^2)$$

La fonction  $\psi$  qui apparaît dans l'expression du flux est une fonction de Lipschitz permettant d'assurer une fonction de dissipation non nulle dans le cas où  $a_{i+1/2} = 0$ . Le flux  $g_i$  représente un limiteur. Le limiteur utilisé dans nos simulation est le limiteur de Van-Leer dont l'expression est donnée ci-dessous. La propriété TVD est assurée par la définition de  $\sigma$  et  $g_i$ . Le limiteur de flux de Van Leer pour une équation hyperbolique scalaire s'écrit :

$$g_i = \frac{\Delta_{i+1/2} u \Delta_{i-1/2} u + |\Delta_{i+1/2} u \Delta_{i-1/2} u|}{\Delta_{i+1/2} u + \Delta_{i-1/2} u}$$

Dans le cas d'une discrétisation implicite,  $u^{n+1}$  est solution d'une équation non linéaire dont la résolution directe n'est généralement pas possible. Il faut donc travailler sur une équation linéarisée approchée. L'équation discrète initiale peut encore s'écrire :

$$u_i^{n+1} + \lambda\theta(h_{i+1/2}^{n+1} - h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^{n+1} + h_{i-1/2}^n) = u_i^n - \lambda(h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i + \phi_{i+1/2})$$

En linéarisant de même à l'aide d'un développement de Taylor les flux  $f$ , on peut approximer :

$$f_i^{n+1} - f_i^n \simeq a_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n)$$

d'où :

$$u_i^{n+1} + \lambda\theta (a_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + a_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n) + \phi_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n - a_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) - a_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n) - \phi_{i-1/2}^{n+1} + \phi_{i-1/2}^n) = u_i^n - \lambda(h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

$$u_i^{n+1} + \lambda\theta (a_{i+1}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + \phi_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n - a_{i-1}^n (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) - \phi_{i-1/2}^{n+1} + \phi_{i-1/2}^n) = u_i^n - \lambda(h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

De même on linéarise les fonctions  $\phi$  :

$$\phi_{i+1/2}^{n+1} = \overline{\phi_{i+1/2}^{n+1}} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})$$

$$\phi_{i+1/2}^{n+1} \simeq \overline{\phi_{i+1/2}^n} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})$$

Il est d'usage d'introduire les variables  $d_i = u_i^{n+1} - u_i^n$  et l'on doit alors résoudre le système matriciel suivant :

$$e_1 d_{i-1} + e_2 d_i + e_3 d_{i+1} = -\lambda(h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n)$$

avec

$$e_1 = \frac{\lambda\theta}{2} [-a_{i-1} + \overline{\phi_{i-1/2}^n}]^n$$

$$e_2 = 1 - \frac{\lambda\theta}{2} [\overline{\phi_{i+1/2}} + \overline{\phi_{i-1/2}}]^n$$

$$e_3 = \frac{\lambda\theta}{2} [a_{i+1} + \overline{\phi_{i+1/2}}]^n$$

On obtient ainsi un système tridiagonal. Dans le cas monodimensionnel, la résolution implicite des équations est réalisée soit par une méthode directe, soit par une méthode itérative. Les méthodes ADI (Alternating direction implicit methods) n'interviennent que pour des problèmes multidimensionnels [13]. Lorsque le problème est bidimensionnel, par exemple, on peut se retrouver avec des matrices pentadiagonales puisque les vecteurs inconnus  $u_{i,j}$  sont rangés en colonne par adressage monoindice. L'utilisation d'une méthode de type ADI permet alors de résoudre simplement le problème. Enfin, on peut souligner que les méthodes ADI sont adaptées à la résolution de problèmes stationnaires.

Pour des applications stationnaires, pour accélérer la convergence, on peut faire une dernière approximation qui consiste à ne retenir que les contributions du premier ordre dans les coefficients  $e_l$  [19].

$$e_1 = \frac{\lambda\theta}{2} [-a_{i-1} - \overline{\psi(a_{i-1/2})}]^n$$

$$e_2 = 1 + \frac{\lambda\theta}{2} [\overline{\psi(a_{i+1/2})} + \overline{\psi(a_{i-1/2})}]^n$$

$$e_3 = \frac{\lambda\theta}{2} [a_{i+1} - \overline{\psi(a_{i+1/2})}]^n$$

#### A.4 Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'un système hyperbolique à coefficients constants

Soit à résoudre

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \omega \end{pmatrix}$$

La discrétisation d'un système linéaire sous forme conservative se déduit de la discrétisation de l'équation scalaire en diagonalisant la matrice jacobienne du flux et en introduisant les variables caractéristiques. Une fois dans l'espace des caractéristiques, les équations sont découplées et se discrétisent selon le signe de la valeur propre. Les équations sont ensuite re-projetées dans l'espace physique. Lorsque la matrice jacobienne du flux  $\mathcal{A} = \frac{\partial F}{\partial Q}$  est constante, cette opération est réalisée facilement. On a :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1}$$

Les variables caractéristiques sont définies par :  $\mathcal{R}^{-1}\partial Q = \partial W$ . Une fois que les équations ont été projetées dans l'espace caractéristique, elles sont découplées :

$$\frac{\partial w^l}{\partial t} + a^l \frac{\partial w^l(u)}{\partial x} = 0$$

Un schéma TVD implicite du même type de ceux proposés pour l'équation scalaire hyperbolique peut donc être appliqué à chaque équation caractéristique.

$$W_i^{n+1} + \lambda\theta(H_{i+1/2}^{W,n+1} - H_{i-1/2}^{W,n+1}) = W_i^n - \lambda(1-\theta)(H_{i+1/2}^{W,n} - H_{i-1/2}^{W,n})$$

En repassant dans l'espace physique on obtient :

$$Q_i^{n+1} + \lambda\theta(H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2}^{n+1}) = Q_i^n - \lambda(1-\theta)(H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n)$$

avec

$$H_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}Q_{i+1} + \mathcal{A}Q_i + \mathcal{R}\Phi_{i+1/2})$$

soit

$$H_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i + \mathcal{R}\Phi_{i+1/2})$$

En linéarisant le système, en posant  $D_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n$ , on obtient un système tridiagonal par bloc :

$$E_1 D_{i-1} + E_2 D_i + E_3 D_{i+1} = -\lambda(H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n)$$

avec

$$E_1 = \frac{\lambda\theta}{2}[-\mathcal{A} + \overline{\mathcal{R}\Phi_{i-1/2}}]^n$$

$$E_2 = 1 - \frac{\lambda\theta}{2}[\overline{\mathcal{R}\Phi_{i+1/2}} + \overline{\mathcal{R}\Phi_{i-1/2}}]^n$$

$$E_3 = \frac{\lambda\theta}{2}[\mathcal{A} + \overline{\mathcal{R}\Phi_{i+1/2}}]^n$$

## A.5 Discrétisation temporelle explicite et implicite TVD d'un système hyperbolique à coefficients non constants

Dans le cas général où la matrice  $\mathcal{A}$  n'est plus constante, il faut construire une approximation de  $\mathcal{A}_{i+1/2}$  localement. Les matrices jacobiennes que nous utilisons sont des matrices construites sur les variables de Roe [28]. Par analogie avec ce qui a été proposé pour les systèmes à coefficients constants, on a :

$$Q_i^{n+1} + \lambda\theta(H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2}^{n+1}) = Q_i^n - \lambda(1-\theta)(H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n)$$

avec

$$H_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i + \mathcal{R}_{i+1/2}\Phi_{i+1/2})$$

Pour un système d'équations hyperboliques, le flux  $\Phi_{i+1/2}$  du schéma que nous utilisons s'écrit [43] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i+1/2}^l = -\frac{1}{2} \sigma(a_{i+1/2}^l) (g_{i+1}^l + g_i^l) + \psi(a_{i+1/2}^l + \gamma_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^l \\ \alpha_{i+1/2}^l = w_{i+1}^l - w_i^l \\ g_i^l = \frac{(\alpha_{i+1/2}^l \bar{\alpha}_{i-1/2}^l) + |(\alpha_{i+1/2}^l \alpha_{i-1/2}^l)|}{(\alpha_{i-1/2}^l + \alpha_{i+1/2}^l)} \\ \sigma(z) = \frac{1}{2} [\psi(z) - \lambda z^2] \\ \psi(z) = |z| \end{array} \right.$$

$$\gamma_{i+1/2}^l = \sigma(a^l) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{g_{i+1}^l - g_i^l}{\alpha_{i+1/2}^l} & \alpha_{i+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

En conservant la même démarche que dans le cas scalaire, après linéarisation, on obtient :

$$E_1 D_{i-1} + E_2 D_i + E_3 D_{i+1} = -\lambda(H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n)$$

avec

$$E_1 = \frac{\lambda\theta}{2} [-\mathcal{A}_{i-1} + \overline{\mathcal{R}_{i-1/2} \Phi_{i-1/2}}]^n$$

$$E_2 = 1 - \frac{\lambda\theta}{2} [\overline{\mathcal{R}_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}} + \overline{\mathcal{R}_{i-1/2} \Phi_{i-1/2}}]^n$$

$$E_3 = \frac{\lambda\theta}{2} [\mathcal{A}_{i+1} + \overline{\mathcal{R}_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}}]^n$$

La formulation décrite ici permet d'obtenir un système d'équations dont la matrice représentative est tridiagonale par blocs.

Comme pour une équation scalaire, on peut ne garder que les termes du premier ordre pour un calcul stationnaire.

$$E_1 = \frac{\lambda\theta}{2} [-\mathcal{A}_{i-1} - \mathcal{R}_{i-1/2} \text{Diag}[\psi(a_{i-1/2})] \mathcal{R}_{i-1/2}^{-1}]^n$$

$$E_2 = 1 + \frac{\lambda\theta}{2} [\mathcal{R}_{i-1/2} \text{Diag}[\psi(a_{i-1/2})] \mathcal{R}_{i-1/2}^{-1} + \mathcal{R}_{i+1/2} \text{Diag}[\psi(a_{i+1/2})] \mathcal{R}_{i+1/2}^{-1}]^n$$

$$E_3 = \frac{\lambda\theta}{2} [\mathcal{A}_{i+1} - \mathcal{R}_{i+1/2} \text{Diag}[\psi(a_{i+1/2})] \mathcal{R}_{i+1/2}^{-1}]^n$$

## A.6 Méthodes ADI

Les méthodes ADI ont été développées par Peaceman et Rachford en 1955, pour résoudre l'équation de diffusion 2D. L'idée de ces méthodes de résolution numérique consiste à la mise en facteur d'une matrice du type  $(\mathcal{I} - M)$ , avec  $M = M_x + M_y$ . En effet, on peut montrer que :

$$(\mathcal{I} - M) \simeq (\mathcal{I} - M_x)(\mathcal{I} - M_y) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

dans le cas d'une discrétisation temporelle du premier ordre.

D'où l'obtention des solutions de la discrétisation :

$$(\mathcal{I} - M_x)(\mathcal{I} - M_y) \Phi^{n+1} = S^n$$

en résolvant

$$(\mathcal{I} - M_x)\Phi_1^{n+1} = S^n$$

avec

$$(\mathcal{I} - M_y)\Phi_1^{n+1} = \Phi_1^{n+1}$$

## A.7 Matrices jacobiennes des flux

Soit un système d'équations hyperbolique bidimensionnel sous forme conservative avec le modèle de turbulence de Wilcox [39] :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial F(\bar{Q})}{\partial x} + \frac{\partial G(\bar{Q})}{\partial y} = 0$$

avec

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \\ \bar{\rho} k \\ \bar{\rho} \omega \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent à la forme matricielle :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = 0$$

avec :

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{\gamma-1}{2})q^2 - u^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 & 0 \\ u(\frac{\gamma-1}{2}q^2 - h_t) & h_t - u^2(\gamma-1) & -uv(\gamma-1) & \gamma u & -(\gamma-1)u & 0 \\ -uk & k & 0 & 0 & u & 0 \\ -u\omega & \omega & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

et

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{\gamma-1}{2})q^2 - v^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & (\gamma-1) & 0 & 0 \\ v(\frac{\gamma-1}{2}q^2 - h_t) & -uv(\gamma-1) & h_t - u^2(\gamma-1) & \gamma v & -(\gamma-1)v & 0 \\ -vk & k & 0 & 0 & v & 0 \\ -v\omega & \omega & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

avec  $q^2 = u^2 + v^2$  et  $h_t = h + k$ .



## A.8 Matrices jacobiennes des flux visqueux en implicite sans modèle de turbulence dans un changement de coordonnées cartésiennes $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$

En résolution implicite, puisque la solution recherchée doit converger, et de manière à simplifier la discrétisation des flux visqueux, les dérivées croisées sont négligées. Cela revient à approximer la diffusion des composantes de la vitesse comme un laplacien. Cela revient à approximer :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

De même, dans l'équation de l'énergie, on utilise :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx}) \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( u \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 (u^2/2)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} (v \sigma_{xy}) \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( v \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 (v^2/2)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u \sigma_{xy}) \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left( u \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 (u^2/2)}{\partial y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_{yy}) \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left( v \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \simeq \mu \frac{\partial^2 (v^2/2)}{\partial y^2}$$

On donne ci dessous la modélisation des termes visqueux en 2D en coordonnées cartésiennes :

$$TV = \begin{bmatrix} 0. \\ -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ -\mu \left( \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Lorsqu'on change de coordonnées, et en ne conservant que les termes diagonaux, on obtient :

$$TV = \begin{bmatrix} 0. \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ -(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \left( \frac{\mu}{J} \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi^2} + \frac{\mu C_p}{J Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) - (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \left( \frac{\mu}{J} \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta^2} + \frac{\mu C_p}{J Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) \end{bmatrix}$$

Pour se ramener à une forme conservative, on pose :

$$TV = \left[ \begin{array}{c} 0. \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu}{J} \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{\mu C_p}{J Pr} T \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{J} \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{\mu C_p}{J Pr} T \right) \right) \end{array} \right]$$

En posant alors :

$$\widehat{F}_v = \left[ \begin{array}{c} 0. \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ -(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \left( \frac{\mu}{J} \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi} + \frac{\mu C_p}{J Pr} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \end{array} \right]$$

et

$$\widehat{G}_v = \left[ \begin{array}{c} 0. \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -\frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \left( \frac{\mu}{J} \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta} + \frac{\mu C_p}{J Pr} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \end{array} \right]$$

on retombe sur la définition des flux donnée dans la section (4).  
Les flux simplifiés peuvent s'écrire d'une façon générale comme :

$$F_v^i = \sigma_i \partial_\xi \kappa_i$$

$$G_v^i = \sigma'_i \partial_\eta \kappa_i$$

avec les définitions suivantes :

$$\sigma_1 = -\frac{\mu}{J} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \quad \sigma_2 = -\frac{\mu \gamma_{cpv}}{J Pr} (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2)$$

$$\sigma'_1 = -\frac{\mu}{J} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \quad \sigma'_2 = -\frac{\mu \gamma_{cpv}}{J Pr} (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2)$$

et

$$\kappa_1 = u \quad \kappa_2 = v \quad \kappa_3 = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad \kappa_4 = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

D'où :

$$F_v^2 = \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad F_v^3 = \sigma_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad F_v^4 = \sigma_1 \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi} + \sigma_2 \frac{\partial(E - (1/2)(u^2 + v^2))}{\partial \xi}$$

$$G_v^2 = \sigma'_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad G_v^3 = \sigma'_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad G_v^4 = \sigma'_1 \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta} + \sigma'_2 \frac{\partial(E - (1/2)(u^2 + v^2))}{\partial \eta}$$

La décomposition temporelle des flux est alors réalisée à l'aide d'un développement de Taylor [30] et peut s'écrire en faisant intervenir une matrice jacobienne des flux visqueux à partir des expressions des flux simplifiés. Au premier ordre :

$$(F_v^i)^{n+1} = (F_v^i)^n + (\sigma)_i^n \partial_\xi \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n)$$

$$(G_v^i)^{n+1} = (G_v^i)^n + (\sigma')_i^n \partial_\eta \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n)$$

en supposant que  $\frac{\partial \sigma_i^n}{\partial Q_l} = 0$ . Il ne suffit plus que de calculer les éléments  $\frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l}$ .

$$\frac{\partial u_m}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho u_m / \rho)}{\partial \rho} = -\frac{u_m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho u_m}{\partial \rho} = -\frac{u_m}{\rho}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial \rho u_m} = \frac{\partial(\rho u_m / \rho)}{\partial \rho u_m} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial u_m}{\partial \rho E} = 0$$

$$\frac{\partial(u_m^2/2)}{\partial \rho} = -\frac{u_m^2}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2))}{\partial \rho} = -\frac{E}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{\rho}$$

$$\frac{\partial(u_m^2/2)}{\partial \rho u_m} = \frac{u_m}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u_m^2))}{\partial \rho u_m} = -\frac{u_m}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u_m^2))}{\partial \rho E} = \frac{1}{\rho}$$

D'où les matrices jacobiennes des flux visqueux dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  :

$$M_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma'_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \xi} & \sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ -\sigma'_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial \xi} & 0 & \sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & \sigma'_2 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

avec

$$m_{41} = -\sigma_1 \frac{\partial(u^2/\rho) + (v^2/\rho)}{\partial \xi} - \sigma_2 \frac{\partial((E/\rho) - (u^2 + v^2)/\rho)}{\partial \xi}$$

$$m_{42} = \sigma_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \xi} - \sigma_2 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \xi}$$

$$m_{43} = \sigma_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial \xi} - \sigma_2 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial \xi}$$

$$M_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma'_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta} & \sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & 0 & 0 \\ -\sigma'_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta} & 0 & \sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & \sigma'_2 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} \end{bmatrix}$$

et

$$m_{41} = -\sigma'_1 \frac{\partial(u^2/\rho) + (v^2/\rho)}{\partial\eta} - \sigma'_2 \frac{\partial((E/\rho) - (u^2 + v^2)/\rho)}{\partial\eta}$$

$$m_{42} = \sigma'_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta} - \sigma'_2 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta}$$

$$m_{43} = \sigma'_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta} - \sigma'_2 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta}$$

### A.9 Matrices jacobiennes des flux visqueux en implicite avec modèle de turbulence dans un changement de coordonnées cartésiennes $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$

Lorsque l'écoulement est turbulent, en coordonnées cartésiennes, il y a deux termes sources dans les équations de transport de  $k$  et  $\omega$ . Placés dans le premier membre des équations ils s'écrivent :

$$\tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \bar{\rho} \omega k$$

$$\frac{\gamma \omega}{k} \tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta \bar{\rho} \omega^2$$

A l'instant  $(n+1)$  :

$$S_k^{n+1}(k,\omega) = S_k^n(k,\omega) + \frac{\partial S_k}{\partial \rho k} d(\rho k) + \frac{\partial S_k}{\partial \rho \omega} d(\rho \omega)$$

$$S_\omega^{n+1}(k,\omega) = S_\omega^n(k,\omega) + \frac{\partial S_\omega}{\partial \rho k} d(\rho k) + \frac{\partial S_\omega}{\partial \rho \omega} d(\rho \omega)$$

En fonction de leur signe, les incréments sont implicités ou non. S'ils sont positifs, ils vont avoir tendance à renforcer la diagonale des matrices jacobiennes des flux. Au contraire, s'ils sont négatifs, l'implicitation de ces termes entraîne la destabilisation des calculs et ils sont donc calculés dans ce cas explicitement.

$$\frac{\partial S_k}{\partial \rho k} = -\frac{\partial Prod}{\partial \rho k} + \frac{\partial \beta^* \bar{\rho} \omega k}{\partial \rho k} \quad Prod = -\tau_{ij}^{rey} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$$

et

$$\tau_{ij}^{rey} = -2\mu_t (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

$$\tau_{ij}^{rey} = -2 \frac{\bar{\rho} k}{\omega} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

D'où :

$$\frac{\partial \tau_{ij}^{rey}}{\partial \rho k} = \frac{\tau_{ij}^{rey}}{\rho k} \quad \frac{\partial \tau_{ij}^{rey}}{\partial \rho \omega} = 2 \gamma^* \frac{k}{\omega^2} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij})$$

De même :

$$\frac{\partial \beta^* \bar{\rho} \omega k}{\partial \rho k} = \beta^* \omega \quad \frac{\partial \beta^* \bar{\rho} \omega k}{\partial \rho \omega} = \beta^* k$$

Donc au final on obtient :

$$S_k^{n+1}(k, \omega) = S_k^n(k, \omega) + \left(-\frac{Prod}{\rho k} + \beta^* \omega\right) d(\rho k) + \left(2 \gamma^* \frac{k}{\omega^2} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* k\right) d(\rho \omega)$$

$$S_\omega^{n+1}(k, \omega) = S_\omega^n(k, \omega) + \left(-\frac{Prod}{\rho k} + \beta^* \omega\right) d(\rho k) + \left(\frac{Prod}{\rho \omega} + \frac{2k}{3\omega} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* k\right) d(\rho \omega)$$

Concernant le terme source de l'équation de transport de la dissipation spécifique, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \rho k} \left(-\frac{\gamma \omega}{k} Prod\right) = 0 \quad \frac{\partial \beta \bar{\rho} \omega^2}{\partial \rho k} = 0$$

$$\frac{\partial S_\omega}{\partial \rho \omega} = -\frac{\gamma}{\rho k} Prod + \frac{2 \gamma^* \gamma}{\omega} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + 2 \beta \omega$$

$$S_\omega^{n+1}(k, \omega) = S_\omega^n(k, \omega) + \left(-2 \frac{\gamma}{\rho k} Prod + \frac{2k}{3\omega} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + 2 \beta \omega\right) d(\rho \omega)$$

Comme  $k \ll \omega$  on approxime :

$$S_k^{n+1}(k, \omega) = S_k^n(k, \omega) + \left(-\frac{Prod}{\rho k} + \beta^* \omega\right) d(\rho k) + \left(\frac{Prod}{\rho \omega} + \beta^* k\right) d(\rho \omega)$$

et

$$S_\omega^{n+1}(k, \omega) = S_\omega^n(k, \omega) + \left(-2 \frac{\gamma}{\rho k} Prod + 2 \beta \omega\right) d(\rho \omega)$$

Pour obtenir l'expression des matrices jacobiennes des flux visqueux, on repart de l'expression des flux donnés dans l'annexe A.8. Le tenseur de Reynolds est approximé de la même manière que le tenseur des contraintes visqueuses sans oublier la contribution de l'énergie cinétique turbulente dans les composantes normales.

$$TV = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} \\ -(\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial y} \\ TV^4 \\ -\alpha_2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \\ -\alpha_4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \alpha_4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$TV^4 = -(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial y^2} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \rho u k}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k}{\partial y} \right) \\ - \left( \frac{\mu C_p}{Pr} + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \left( \frac{\mu C_p}{Pr} + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ - \alpha_2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$$

En passant en coordonnées généralisées et en ne conservant à nouveau que les termes diagonaux, on obtient :

$$TV = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2}{3}(\alpha_\xi \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \alpha_\eta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta}) \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2}{3}(\beta_\xi \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \beta_\eta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta}) \\ TV^4 \\ -\frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \\ -\frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \end{array} \right]$$

$$TV^4 = -\frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi^2} - \frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta^2} \\ + \frac{2}{3}(\alpha_\xi \frac{\partial \rho u k}{\partial \xi} + \alpha_\eta \frac{\partial \rho u k}{\partial \eta}) + \frac{2}{3}(\beta_\xi \frac{\partial \rho v k}{\partial \xi} + \beta_\eta \frac{\partial \rho v k}{\partial \eta}) \\ - (\frac{\mu C_p}{J Pr} + \frac{\mu_t C_p}{J Pr_t})(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - (\frac{\mu C_p}{J Pr} + \frac{\mu_t C_p}{J Pr_t})(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \\ - \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial^2 k}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2}$$

D'où les flux associés :

$$\widehat{F}_v = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{2}{3}(\alpha_\xi \rho k) \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{2}{3}(\beta_\xi \rho k) \\ F_v^4 \\ -\frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial k}{\partial \xi} \\ -\frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \end{array} \right]$$

$$F_v^4 = -\frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial (1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \rho k (u \alpha_\xi + v \beta_\xi) \\ - (\frac{\mu C_p}{J Pr} + \frac{\mu_t C_p}{J Pr_t})(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ - \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \frac{\partial k}{\partial \xi}$$

De même dans la direction  $\eta$ :

$$\widehat{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2}{3}(\alpha_\eta \rho k) \\ -\frac{\mu + \mu_t}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{2}{3}(\beta_\eta \rho k) \\ G_v^4 \\ -\frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial k}{\partial \eta} \\ -\frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$G_v^4 = -\frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta} + \frac{2}{3} \rho k (u \alpha_\eta + v \beta_\eta) \\ - \left( \frac{\mu C_p}{J Pr} + \frac{\mu_t C_p}{J Pr_t} \right) (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ - \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \frac{\partial k}{\partial \eta}$$

A nouveau, les flux simplifiés peuvent s'écrire d'une façon générale comme :

$$F_v^i = \sigma_i \partial_\eta \kappa_i + \sigma_j'' \kappa_j$$

$$G_v^i = \sigma_i' \partial_\eta \kappa_i + \sigma_j''' \kappa_j$$

avec les définitions suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \quad \sigma_2 = \frac{\gamma_{cpv}}{J} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \quad \sigma_5 = \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2) \quad \sigma_6 = \frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\xi^2 + \beta_\xi^2)$$

$$\sigma_1' = \frac{(\mu + \mu_t)}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \quad \sigma_2' = \frac{\gamma_{cpv}}{J} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) (\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \quad \sigma_5' = \frac{\alpha_2}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2) \quad \sigma_6' = \frac{\alpha_4}{J}(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2)$$

et

$$\kappa_1 = u \quad \kappa_2 = v \quad \kappa_3 = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad \kappa_4 = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{k}{2} \quad \kappa_5 = k \quad \kappa_6 = \omega$$

En effet, en régime turbulent l'énergie totale est définie par :

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \bar{\rho} c_v \bar{T} + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \bar{\rho} c_v \tilde{T} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \frac{\bar{\rho}}{2} (\overline{u_i u_i} - \tilde{u}_i \tilde{u}_i)$$

D'où :

$$F_v^2 = -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \alpha_\xi \rho k \quad F_v^3 = -\sigma_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \beta_\xi \rho k$$

$$F_v^4 = -\sigma_1 \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \xi} - \sigma_2 \frac{\partial(E - (1/2)(u^2 + v^2) - k)}{\partial \xi} - \sigma_5 \frac{\partial k}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \rho k (u \alpha_\xi + v \beta_\xi)$$

$$F_v^5 = -\sigma_5 \frac{\partial k}{\partial \xi} \quad F_v^6 = -\sigma_6 \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

$$G_v^2 = -\sigma_1' \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2}{3} \alpha_\eta \rho k \quad G_v^3 = -\sigma_1' \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{2}{3} \beta_\eta \rho k$$

$$G_v^4 = -\sigma_1' \frac{\partial(1/2)(u^2 + v^2)}{\partial \eta} - \sigma_2' \frac{\partial(E - (1/2)(u^2 + v^2) - k)}{\partial \eta} - \sigma_5' \frac{\partial k}{\partial \eta} + \frac{2}{3} \rho k (u \alpha_\eta + v \beta_\eta)$$

$$G_v^5 = -\sigma_5' \frac{\partial k}{\partial \eta} \quad G_v^6 = -\sigma_6' \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

La décomposition temporelle des flux est réalisée à l'aide d'un développement de Taylor [30]. Au premier ordre :

$$(F_v^i)^{n+1} = (F_v^i)^n + (\sigma_i^n) \partial_\xi \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n) + (\sigma_i'')^n \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n)$$

$$(G_v^i)^{n+1} = (G_v^i)^n + (\sigma_i')^n \partial_\eta \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n) + (\sigma_i''')^n \sum_l \frac{\partial \kappa_i}{\partial Q_l} (Q_l^{n+1} - Q_l^n)$$

et l'on a supposé que  $\frac{\partial \sigma_i^n}{\partial Q_l} = 0$ .

A nouveau on a :

$$\frac{\partial u_m}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho u_m / \rho)}{\partial \rho} = -\frac{u_m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho u_m}{\partial \rho} = -\frac{u_m}{\rho}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial \rho u_m} = \frac{\partial(\rho u_m / \rho)}{\partial \rho u_m} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial u_m}{\partial \rho E} = 0$$

$$\frac{\partial(u_m^2/2)}{\partial \rho} = -\frac{u_m^2}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2))}{\partial \rho} = -\frac{E}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{\rho}$$

$$\frac{\partial(u_m^2/2)}{\partial \rho u_m} = \frac{u_m}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u_m^2))}{\partial \rho u_m} = -\frac{u_m}{\rho} \quad \frac{\partial(E - \frac{1}{2}(u_m^2))}{\partial \rho E} = \frac{1}{\rho}$$

et

$$\frac{\partial k}{\partial \rho} = -\frac{k}{\rho} \quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = -\frac{\omega}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho k u_m}{\partial \rho} = -k u_m \quad \frac{\partial \rho k u_m}{\partial \rho u_m} = k \quad \frac{\partial k}{\partial \rho k} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial \rho k u_m}{\partial \rho k} = u_m$$

D'où les matrices jacobiennes des flux visqueux dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  lorsque l'on utilise le modèle de turbulence de Wilcox :

$$M_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial \xi} & -\sigma_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \alpha_\xi & 0 \\ \sigma_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial \xi} & 0 & -\sigma_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & 0 & \frac{2}{3} \beta_\xi & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & -\sigma_2 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & m_{45} & 0 \\ \sigma_5 \frac{\partial(k/\rho)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & -\sigma_5 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} & 0 \\ \sigma_6 \frac{\partial(\omega/\rho)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_6 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$



$$m_{41} = +\sigma_1 \frac{\partial(u^2/\rho) + (v^2/\rho)}{\partial\xi} - \sigma_2 \frac{\partial((E - (u^2 + v^2 + k))/\rho)}{\partial\xi} + \sigma_5 \frac{\partial(k/\rho)}{\partial\xi} - \frac{2}{3}k(\alpha_\xi u + \beta_\xi v)$$

$$m_{42} = -\sigma_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\xi} + \sigma_2 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\xi} + \frac{2}{3} \alpha_\xi k$$

$$m_{43} = -\sigma_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\xi} + \sigma_2 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\xi} + \frac{2}{3} \beta_\xi k$$

$$m_{45} = (\sigma_2 - \sigma_5) \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\xi} + \frac{2}{3}(\alpha_\xi u + \beta_\xi v)$$

$$M_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma'_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta} & -\sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \alpha_\eta & 0 \\ \sigma'_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta} & 0 & -\sigma'_1 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & 0 & \frac{2}{3} \beta_\eta & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & -\sigma'_2 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & m_{45} & 0 \\ \sigma'_5 \frac{\partial(k/\rho)}{\partial\eta} & 0 & 0 & 0 & -\sigma'_5 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} & 0 \\ \sigma'_6 \frac{\partial(\omega/\rho)}{\partial\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma'_6 \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} \end{bmatrix}$$

et

$$m_{41} = +\sigma'_1 \frac{\partial(u^2/\rho) + (v^2/\rho)}{\partial\eta} - \sigma'_2 \frac{\partial((E - (u^2 + v^2 + k))/\rho)}{\partial\eta} + \sigma'_5 \frac{\partial(k/\rho)}{\partial\eta} - \frac{2}{3}k(\alpha_\eta u + \beta_\eta v)$$

$$m_{42} = -\sigma'_1 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta} + \sigma'_2 \frac{\partial(u/\rho)}{\partial\eta} + \frac{2}{3} \alpha_\eta k$$

$$m_{43} = -\sigma'_1 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta} + \sigma'_2 \frac{\partial(v/\rho)}{\partial\eta} + \frac{2}{3} \beta_\eta k$$

$$m_{45} = (\sigma'_2 - \sigma'_5) \frac{\partial(1/\rho)}{\partial\eta} + \frac{2}{3}(\alpha_\eta u + \beta_\eta v)$$

Le calcul des dérivées selon  $\eta$  en  $j + 1/2$  et  $j - 1/2$  fait intervenir des quantités aux points  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$ .

### A.10 Algorithme de résolution d'un système matriciel tridiagonal par triangularisation

Soit le système tridiagonal suivant à résoudre :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & & & c_{j-1} \\ a_j & & & b_j & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_j \end{bmatrix}$$

Le système est transformé en un système triangulaire supérieur de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & & \\ & -1 & \alpha_2 & \\ & & 1 & \alpha_3 \\ & & & \dots \\ & & & & \alpha_{j-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_j \end{bmatrix}$$

Le système triangulaire final permet d'écrire les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} u_j &= \beta_j \\ u_{j-1} &= \beta_{j-1} - \alpha_{j-1}u_j \\ &\dots \\ u_{m-1} &= \beta_{m-1} - \alpha_{m-1}u_m \\ u_m &= \beta_m - \alpha_m u_{m+1} \\ &\dots \\ u_1 &= \beta_1 - \alpha_1 u_2 \end{aligned}$$

La ligne  $m$  du système linéaire à résoudre est donné par la formule :

$$a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = \nu_m$$

$$a_m (\beta_{m-1} - \alpha_{m-1} u_m) + b_m u_m + c_m u_{m+1} = \nu_m$$

$$(b_m - \alpha_{m-1} a_m) u_m + c_m u_{m+1} = \nu_m - a_m \beta_{m-1}$$

D'où :

$$u_m = \frac{(\nu_m - a_m \beta_{m-1})}{(b_m - \alpha_{m-1} a_m)} - \frac{c_m}{(b_m - \alpha_{m-1} a_m)} u_{m+1}$$

Par identification avec les relations de récurrence, on obtient les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  recherchés :

$$\beta_m = \frac{(\nu_m - a_m \beta_{m-1})}{(b_m - \alpha_{m-1} a_m)} \quad \alpha_m = \frac{c_m}{(b_m - \alpha_{m-1} a_m)}$$

L'initialisation est réalisée en utilisant la première ligne des deux systèmes équivalents :

$$\begin{aligned} b_1 u_1 + c_1 u_2 &= \nu_1 \\ u_1 + \alpha_1 u_2 &= \beta_1 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_1}{b_1} \quad \alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

## A.11 Conditions aux limites discrètes imposées aux parois

Conditions aux limites imposées sur la paroi en sortie

Le système d'équations correspondant aux conditions aux limites équivaut à résoudre :

$$T_i^n + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n \Delta t = T_{pe}^{ini} \quad (7)$$

$$u_{x,i}^n + \left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)_i^n \Delta t = 0 \quad (8)$$

$$u_{y,i}^n + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)_i^n \Delta t = 0 \quad (9)$$

$$k_i^n + \left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_i^n \Delta t = 0 \quad (10)$$

$$\omega_i^n + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_i^n \Delta t = \omega_{ini} \quad (11)$$

Les conditions aux limites sont écrites en utilisant ces variables conservatives à partir des relations :

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial t}\right)_i^n = \left(-\frac{\tilde{u}_m}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_m}{\partial t}\right)_i^n$$

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_i^n = \left(-\frac{k}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t}\right)_i^n$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_i^n = \left(-\frac{\omega}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t}\right)_i^n$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}\right)_i^n = \frac{1}{c_v} \left( \left(-\frac{\tilde{E}}{\bar{\rho}} + \frac{q^2}{\bar{\rho}} + \frac{k}{\bar{\rho}}\right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \frac{\tilde{u}_m}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_m}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} \right)_i^n$$

Ces conditions aux limites sont équivalentes à résoudre un système du type  $B \frac{\partial Q}{\partial t} = D$  avec :

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho c_v} (E - q^2 - k) & -\frac{u_x}{\rho c_v} & -\frac{u_y}{\rho c_v} & \frac{1}{\rho c_v} & \frac{1}{\rho c_v} & 0 \\ -\frac{u_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_y}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\omega}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{T_{pe}^{ini} - T_i^n}{\Delta t} \\ -\frac{u_{x,i}^n}{\Delta t} \\ -\frac{u_{y,i}^n}{\Delta t} \\ -\frac{k_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\omega_{ini} - \omega_i^n}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

## A.12 Méthode des caractéristiques

Le système d'équations hyperbolique correspondant aux équations d'Euler est rappelé ci-dessous :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

où  $\bar{Q}$ ,  $\hat{F}$ ,  $\hat{G}$  sont définis dans la partie (3.2) du document.

Le système (12) s'écrit encore sous forme non conservative [38] :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A_{nj} \frac{\partial Q}{\partial n_j} = 0 \quad (13)$$

où les  $A_{nj}$  correspondent aux deux matrices dans les directions  $(\xi, \eta)$  :

$$\begin{aligned} A_\xi &= \alpha_\xi A_x + \beta_\xi A_y \\ A_\eta &= \alpha_\eta A_x + \beta_\eta A_y \end{aligned}$$

A titre d'exemple nous donnons l'expression de la matrice  $A_\xi$  en posant [36], [37] :

$$\begin{cases} n_x = \alpha_\xi \\ n_y = \beta_\xi \end{cases}$$

$(\alpha_\xi, \beta_\xi)$  sont les composantes du gradient de  $\xi(x, y, z)$  définies dans le système  $(x, y, z)$ , qui définit la normale à la direction  $\xi = c1$ .

Les coordonnées de la normale sont données par :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \\ k_2 = \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \end{cases}$$

La matrice  $A_\xi$  s'écrit :

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ \frac{(\gamma-1)q^2}{2}n_x - u(\vec{u} \cdot \vec{n}) & -(\gamma-2)un_x + \vec{u} \cdot \vec{n} & -(\gamma-1)vn_x + un_y & (\gamma-1)n_x \\ \frac{(\gamma-1)q^2}{2}n_y - v(\vec{u} \cdot \vec{n}) & -(\gamma-1)un_y + vn_x & -(\gamma-2)vn_y + \vec{u} \cdot \vec{n} & (\gamma-1)n_y \\ (\gamma-1)q^2 - \gamma E) \vec{u} \cdot \vec{n} & \delta n_x - u(\gamma-1)\vec{u} \cdot \vec{n} & \delta n_y - v(\gamma-1)\vec{u} \cdot \vec{n} & \gamma \vec{u} \cdot \vec{n} \end{pmatrix}$$

où  $q^2$  est l'énergie cinétique:  $q^2 = \sum_{j=1}^2 u_j^2$  et  $\delta = (\gamma E - (\gamma-1)\frac{q^2}{2})$ .

Pour un système hyperbolique, les valeurs propres sont réelles et la matrice est diagonalisable :

$$A_\xi = \mathcal{R}_\xi \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = n_x u + n_y v \\ \lambda^4 = \lambda^1 + c \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \\ \lambda^5 = \lambda^1 - c \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \end{cases}$$

Les matrices  $\mathcal{R}_\xi$  et  $\mathcal{R}_\xi^{-1}$  sont construites à partir de [37] par rapport à la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ , et pour un scalaire  $\beta = 0$ . Les vecteurs propres sont rangés selon la même numérotation que les valeurs propres. D'un point de vue numérique, pour éviter de multiples divisions dans le calcul de  $\mathcal{R}_\xi^{-1}$  utilisée plus souvent que  $\mathcal{R}_\xi$  dans nos calculs, tous les éléments de  $\mathcal{R}_\xi^{-1}$  ont été multipliés par le carré de la vitesse du son locale  $c^2$  et ceux de  $\mathcal{R}_\xi$  divisés par  $c^2$ .

$$\mathcal{R}_\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2} \\ \frac{u}{c^2} & R_{22} & \frac{u + ck_1}{c^2} & \frac{u - ck_1}{c^2} \\ \frac{v}{c^2} & R_{32} & \frac{v + ck_2}{c^2} & \frac{v - ck_2}{c^2} \\ \frac{q^2}{2c^2} & (uR_{22} + vR_{32}) & \frac{H + c(\vec{k} \cdot \vec{v})}{c^2} & \frac{H - c(\vec{k} \cdot \vec{v})}{c^2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} F = (k_1 k_2 - 1)c \\ R_{22} = \frac{-k_2^3}{F} \\ R_{32} = \frac{k_1 k_2^2}{F} \end{cases}$$

De même on a :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} c^2 - (\gamma - 1) \frac{q^2}{2} & (\gamma - 1)u & (\gamma - 1)v & -(\gamma - 1) \\ R_{21}^{-1} & k_2 c & -k_1 c & 0 \\ R_{31}^{-1} & \frac{ck_1 - (\gamma - 1)u}{2} & \frac{ck_2 - (\gamma - 1)v}{2} & \frac{\gamma - 1}{2} \\ R_{41}^{-1} & -\left(\frac{ck_1 + (\gamma - 1)u}{2}\right) & -\left(\frac{ck_2 + (\gamma - 1)v}{2}\right) & \frac{\gamma - 1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} R_{21}^{-1} = (-k_2 u + k_1 v)c \\ R_{31}^{-1} = \frac{(\gamma - 1)q^2}{4} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2}c \\ R_{41}^{-1} = \frac{(\gamma - 1)q^2}{4} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{2}c \end{cases}$$

### A.13 Conditions aux limites discrètes imposées à l'entrée de la tuyère

Les relations mathématiques discrètes qui traduisent les conditions aux limites imposées à l'entrée s'écrivent :

$$P_{tot}^{n+1} = [p(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}]^{n+1} = C1(\eta, \zeta)$$

$$T_{tot}^{n+1} = [T(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})]^{n+1} = C2(\eta, \zeta)$$

$$v^{n+1} = V_{moy}$$

Soit :

$$P_{tot} - [p(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}]^n = \frac{\partial p}{\partial t} (1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)} + p \frac{\partial}{\partial t} ((1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)})$$

$$T_{tot} = T^n + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + (\frac{q^2}{2C_p})^n + \frac{1}{2C_p} 2 v_m \frac{\partial v_m}{\partial t} \Delta t$$

$$v_i^n + (\frac{\partial v}{\partial t})_i^n \Delta t = V_{moy}$$

Concernant les conditions aux limites imposées sur la pression, on note  $(PM)^n$  le membre à droite de l'égalité.

$$\begin{aligned} \frac{(PM)^n}{\Delta t} &= (\gamma-1)q^2(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial \rho}{\partial t} - (\gamma-1)(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)} v_m \frac{\partial \rho v_m}{\partial t} \\ &+ (\gamma-1)(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial \rho E}{\partial t} - [q^2(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)} (1 + \frac{q^2 - E}{2C_v T})] \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &+ [(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)} v_m (1 + \frac{q^2}{2C_v T})] \frac{\partial \rho v_m}{\partial t} \\ &- [(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)} \frac{q^2}{2C_v T}] \frac{\partial \rho E}{\partial t} \end{aligned}$$

La condition à la limite sur la température totale est plus simple à exprimer en fonction des variables conservatives :

$$\frac{1}{\Delta t} (T_{tot} - T^n - (\frac{q^2}{2C_p})^n) = [\frac{1}{\rho C_v} (q^2 - E) - \frac{q^2}{\rho C_p}] \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{(\gamma-1)^2}{\rho \gamma \mathcal{R}} v_m \frac{\partial \rho v_m}{\partial t} + \frac{1}{\rho C_v} \frac{\partial \rho E}{\partial t}$$

Pour les vitesses, il suffit de se reporter aux discrétisations à la paroi :

$$\frac{v_i^{imp} - v_i^n}{\Delta t} = -\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v}{\partial t}$$

On est ramené à résoudre à l'entrée un système de la même forme qu'aux parois avec cette fois :

$$B = \begin{pmatrix} R_{41}^{-1} & R_{42}^{-1} & R_{43}^{-1} & R_{44}^{-1} \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{q^2 - E}{\rho C_v} - \frac{q^2}{\rho C_p} & -u \frac{(\gamma - 1)^2}{\rho \gamma \mathcal{R}} & -v \frac{(\gamma - 1)^2}{\rho \gamma \mathcal{R}} & \frac{1}{\rho C_v} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $A_{ij}$  et  $R_{ij}^{-1}$  correspondent aux éléments des matrices définies en annexe (A.12).

Pour le second membre, on a :

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_i^{imp} - v_i^n}{\Delta t} \\ \frac{1}{\Delta t} (T_{tot} - T^n - \frac{q^2}{2C_p}) \\ \frac{1}{\Delta t} (P_{tot} - p(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{q^2}{\gamma \mathcal{R} T})^{\gamma/(\gamma-1)}) \end{pmatrix}$$

## Références

- [1] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA Paper no 78-257, 16th ASM, Huntsville, Alabama*, 1978.
- [2] C. L. Chen and S. R. Chakravarthy. Numerical investigation of separated nozzle flows. *AIAA Journal*, 32(9):1836-1843, 1994.
- [3] Jean Coirier. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1997.
- [4] L. Coquart, C. Tenaud, and L. Ta Phuoc. LES of a three dimensional shock-wave/boundary layer interaction in a channel flow. In *Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal*, 2002.
- [5] S. Deck and R. Hallard. Simulations numériques des écoulements décollés dans les tuyères. In *37<sup>ème</sup> Colloque d'Aérodynamique Appliquée, Arcachon*, 2001.
- [6] S. Deck, R. Hallard, and P. Guillen. Numerical simulations of steady and unsteady separated nozzle flow. In *40<sup>th</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, USA*, 2002.
- [7] H. W. Liepmann et A. Roshko. *Eléments de la dynamique des gaz*. Gauthier-Villars et Cie Editeur Paris, 1962.
- [8] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles; ii.- méthode des vitesses moyennes, méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique. *Journal de Mécanique*, 4, 1965.
- [9] M. Frey and G. Hagemann. Status of flow separation prediction in rocket nozzles. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1998.
- [10] M. Frey and G. Hagemann. Flow separation and side loads in rocket nozzles. In *AIAA Paper 99-2815*, 1999.

- [11] S. Girard, H. Deniau, A. T. Nguyen, and T. Alziary de Roquefort. Etude de l'écoulement dans une tuyère propulsive à contour parabolique en régime surdétendu. In *37<sup>ème</sup> Colloque d'Aérodynamique Appliquée, Arcachon*, 2001.
- [12] M. C. Guegan, C. Tenaud, and T. Alziary de Roquefort. Etude expérimentale et numérique du développement du sillage turbulent proche d'un cône en écoulement hypersonique. In *Recueil des communications du Colloque sur les écoulements hypersoniques, Garchy*, 1992.
- [13] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley and Sons, 1988.
- [14] H. Li, A. Chpoun, and G. Ben-Dor. Analytical and experimental investigations of the reflection of asymmetric shock waves in steady flows. *J. Fluid Mech.*, 390:25–43, 1999.
- [15] J. Mattsson, U. Hogman, and L. Torngren. A sub-scale test program on investigation of flow separation and side loads in rocket nozzles. In *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Europ. Symp. Aerothermodynamics of Space Vehicles, Netherlands*, 1998.
- [16] F. Nasuti and M. Onofri. Viscous and inviscid vortex generation during nozzle flow transients. In *AIAA Paper no 96-0076*, 1996.
- [17] L. H. Nave and G. A. Coffey. Sea level side loads in high-area-ratio rocket engines. In *AIAA/SAE 9<sup>th</sup>, Propulsion Conference, Las Vegas, Nevada*, 1973.
- [18] J. Ostlund and M. Bigert. A subscale investigation on side loads in sea level rocket nozzles. In *AIAA Paper 99-2759*, 1999.
- [19] Françoise Perrel. *Simulation numérique d'écoulements hypersoniques visqueux en déséquilibre chimique*. PhD thesis, CERFACS, 1991.
- [20] T. J. Poinot and S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129, 1992.
- [21] T. H. Pulliam and J. L. Steger. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow. *AIAA Journal*, 18(2):159–167, 1980.
- [22] P. Reijasse and J. Birkemeyer. Semi-empirical flow separation model for subscale nozzles. In *4<sup>th</sup> Europ. Symp. Aerothermodynamics for Space Applications, Italy*, 2001.
- [23] P. Reijasse, F. Bouvier, and P. Servel. Experimental and numerical investigation of the cap-shock structure in overexpanded thrust-optimized nozzles. In *West-east high speedflow field 2002 conference, Marseille*, 2002.
- [24] P. Reijasse, P. James, and P. Vuillermoz. Aerothermodynamics issues for future liquid rocket-engine nozzles. In *4<sup>th</sup> Europ. Symp. Aerothermodynamics for Space Applications, Italy*, 2001.
- [25] P. Reijasse, P. James, and P. Vuillermoz. Dimensionnement des tuyères de moteurs-fusées: objectifs et contraintes. In *Symposium International AAAF, Véhicules et systèmes de rentrée atmosphérique, Arcachon*, 2001.
- [26] P. Reijasse, L. Morzenski, D. Blacodon, and J. Birkemeyer. Flow separation experimental analysis in overexpanded subscale rocket-nozzles. In *AIAA Paper 2001-3556*, 2001.
- [27] P. Reijasse, L. Morzenski, P. Naudin, and F. Géneau. Fluctuating side-load measurements in overexpanded subscale rocket-nozzles. In *AIAA Paper 2001-3557*, 2001.
- [28] P. L. Roe. The use of Riemann problem in finite difference schemes. In *Proceedings, Seventh Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.*, New York/Berlin, 1981. Springer-Verlag.
- [29] P. Servel. Modélisation du décollement avec et sans film de refroidissement dans la tuyère à choc interne testée à R2Ch. Technical report, ONERA, DAFE, 2001.



- [30] J. L. Steger. Implicit finite difference simulation of flow about arbitrary geometries with application to airfoils. In *Proceedings, AIAA 10<sup>th</sup> Fluid and Plasma dynamics conference*, 1977.
- [31] C. Tenaud and T. Alziary de Roquefort. Numerical study of turbulent near-wake development downstream axisymmetrical cone in hypersonic flow. In *Euromech 289, Hypersonic aerodynamics, Aachen*, 1992.
- [32] C. Tenaud and T. Alziary de Roquefort. Calculation of the hypersonic flow development over a slender cone, part. i and part. ii, hypersonic flows for reentry problems, part iii. In *BHDB Workshop, Sophia Antipolis*, 1993.
- [33] C. Tenaud and T. Alziary de Roquefort. Numerical investigation of turbulent near-wake development downstream a slender cone in hypersonic flow. In *Proceedings of the 5<sup>th</sup> Int. Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Presse ENPC, Paris*, 1993.
- [34] F. Thivet, D. D. Knight, A. A. Zheltovodov, and A. I. Maksimov. Insights in turbulence modeling for crossing shock wave/boundary layer interactions. *AIAA Journal*, 39(6):985-995, 2001.
- [35] Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68:1-24, 1987.
- [36] Isabelle Vallet. *Aérodynamique Numérique 3-D Instationnaire avec Fermeture Bas-Reynolds au Second Ordre*. PhD thesis, Université Paris 6, 1995.
- [37] M. Vinokur. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 81:1-52, 1989.
- [38] R. F. Warming, Richard M. Beam, and B. J. Hyett. Diagonalization and simultaneous symmetrization of the gas-dynamic matrices. *Mathematics of Computation*, pages 1037-1045, 1975.
- [39] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299-1310, 1988.
- [40] Zi Niu Wu. Conditions aux limites pour un probleme hyperbolique.
- [41] Emmanuelle Xeuxet-Declercq. *Comparaison des solveurs numériques pour le traitement de la turbulence bifluide*. PhD thesis, Université d'Evry, 1999.
- [42] H. C. Yee. Linearized form of implicit TVD schemes for the multidimensional euler and navier-stokes equations. *Comp. & Maths. with Appls.*, 12 A:413-432, 1986.
- [43] H. C. Yee. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *Journal of Computational Physics*, 68:151-179, 1987.
- [44] H. C. Yee. A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods. In *Lecture Series 1989-04, High resolution methods (upwind and TVD) for the compressible flow equations*, 1998.
- [45] H. C. Yee, R. M. Beam, and R. F. Warming. Boundary approximations for implicit schemes for one dimensional inviscid equations of gasdynamics. *AIAA Journal*, 20(9):1203-1211, 1982.