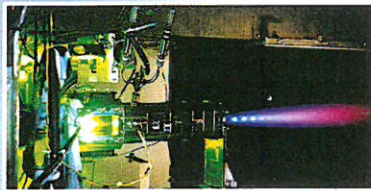
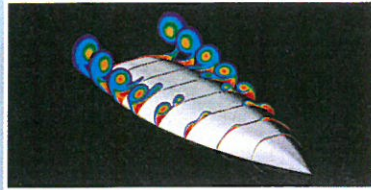


ONERA



DÉPARTEMENT AÉRODYNAMIQUE
FONDAMENTALE ET EXPÉRIMENTALE

Rapport Technique

Simulation numérique directe d'un tourbillon
de Lamb-Oseen 2D compressible refroidi au
centre

RT 31/08104 DAFE - Décembre 2003

L. Coquart ; D. Sipp ; L. Jacquin

SANS MENTION DE PROTECTION

MÉCANIQUE DES FLUIDES ET ÉNERGÉTIQUE

ONERA

DÉPARTEMENT AÉRODYNAMIQUE
FONDAMENTALE ET EXPÉRIMENTALE

Rapport Technique N° RT 31/08104 DAFE

Décembre 2003

Simulation numérique directe d'un tourbillon de Lamb-Oseen
2D compressible refroidi au centre

Rédigé par :

L. Coquart
D. Sipp
L. Jacquin

Approuvé par :

Le Directeur du Département
Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale
L. Jacquin

Ce document comporte 55 pages

SANS MENTION DE PROTECTION

**SANS MENTION
DE PROTECTION**

SMP

FICHE D'IDENTIFICATION du document ONERA N° RT 31/08104 DAFE

Emetteur : DÉPARTEMENT AÉRODYNAMIQUE FONDAMENTALE ET EXPÉRIMENTALE	Contractant : ONERA	Référence du contrat : Ressources Générales
	Fiche programme : AFE 106 D	Date : Décembre 2003
Titre : Simulation numérique directe d'un tourbillon de Lamb-Oseen 2D compressible refroidi au centre		
Auteur(s) : L. Coquart ; D. Sipp ; L. Jacquin		
PROTECTION : Civile		Calendrier de DÉPROTECTION
Titre : SANS MENTION DE PROTECTION		Titre : Sans objet
Fiche : SANS MENTION DE PROTECTION		Fiche : Sans objet
Document : SANS MENTION DE PROTECTION		Document : Sans objet

Résumé d'auteur :

L'objectif est d'étudier les effets thermiques sur les tourbillons de sillage d'un avion de transport lorsqu'ils sont en contact avec les gaz chauds des moteurs ou par refroidissement du coeur, en vue d'un possible contrôle. Le modèle de tourbillon retenu pour cette étude est le tourbillon de Lamb-Oseen.

Des études de stabilité linéaires ont montré qu'un tourbillon de Lamb-Oseen 2D compressible refroidi au centre présentait des modes instables bidimensionnels.

La Simulation Numérique Directe (DNS) 2D d'un tel tourbillon a été réalisée pour étudier l'évolution de ces instabilités au cours du temps dans le régime non linéaire.

La simulation prédit correctement leur taux de croissance dans la phase linéaire. Le calcul montre ensuite que les perturbations saturent non linéairement avant de décroître au cours du temps.

D'autre part, la dynamique des instabilités étudiée est proche de celle obtenue dans le cas d'instabilités plus classiques de type Rayleigh Taylor.

Cette étude doit se poursuivre par une simulation 3D pour analyser l'évolution des perturbations dans la troisième direction. Il s'agira de déterminer si le tourbillon refroidi au centre reste stable ou non au cours du temps.

Notions d'indexage :

TOURBILLON 2D ; LAMB-OSEEN ; DNS ; STABILITE ; COMPRESSIBLE

Table des matières

1	Introduction	5
2	Equations de Navier-Stokes résolues avec le code DNS	7
2.1	Adimensionnalisation des équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques	7
2.2	Interpolation des quantités	9
3	Méthodes numériques	10
3.1	Discrétisation des termes convectifs et de diffusion	10
3.2	Discrétisation des termes temporels	11
3.3	Conditions aux limites	11
4	Extraction des grandeurs statistiques	13
4.1	Grandeurs moyennes	13
4.2	Grandeurs fluctuantes	14
5	Tourbillon 2D refroidi au centre	15
5.1	Initialisation de l'écoulement	15
5.2	Quantités de référence utilisées dans la simulation	16
5.3	Solution initiale sans dimension	16
5.4	Perturbation de la solution initiale	17
5.5	Domaine de calcul	18
5.6	Comparaison des résultats avec l'analyse de stabilité linéaire	24
5.6.1	Résultats obtenus pour une perturbation du champ de base de 2%	24
5.6.2	Comparaison des résultats en perturbant la solution initiale à 0.2% et à 2%	36
5.6.3	Sensibilité des résultats au maillage	36
6	Conclusion	44
A	Annexe : Opérations en coordonnées cylindriques	45
A.1	Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques	45
A.2	Equations d'Euler en coordonnées cylindriques	46
A.3	Equation de la température obtenue à partir de l'équation de l'énergie dans les équations d'Euler	46
A.4	Equations d'Euler sans dimension	48
A.5	Relations entre la DNS, le code de stabilité non visqueux et le code de stabilité KANACOMP	50
A.5.1	Expression des caractéristiques physiques du tourbillon de Lamb Oseen incompressible sans dimension dans l'étude de stabilité non visqueuse	50
A.5.2	Correspondance entre les quantités de référence	50

1 Introduction

Le sillage généré par un avion est caractérisé par la présence de deux tourbillons intenses, régis par les équations 3D instationnaires de Navier Stokes. Ces tourbillons sont dus à l'écoulement de contournement de bout d'aile provenant des différences de pression entre l'intrados et l'extrados de l'aile. Leur intensité augmente avec le poids de l'avion. Ils sont visibles si les conditions sont favorables à la condensation ou si on observe l'enroulement des jets du moteur autour du cœur du tourbillon. Ce sont eux qui définissent les distances de sécurité à respecter entre deux avions au décollage et à l'atterrissage sur les aéroports, de façon à éviter qu'un avion ne rencontre le sillage d'un autre avion qui l'a précédé [10]. Les projets d'avions de plus en plus gros et l'augmentation du trafic aérien nécessitent de mieux comprendre la physique de ces écoulements tourbillonnaires, en vue d'un éventuel contrôle.

Il existe des études expérimentales qui ont permis de dégager au moins trois phases bien distinctes de l'évolution des sillages tourbillonnaires derrière le passage d'un avion, même si les sillages d'avion sont caractérisés par des nombres de Reynolds bien plus élevés que ceux que l'on parvient à reproduire dans les expériences et les calculs. La première phase correspond effectivement à l'enroulement de la nappe de vorticité. Dans la seconde phase, le tourbillon ainsi crée est axisymétrique et quasiment indépendant de la distance avale. Le champ correspondant mesuré expérimentalement par Green, [10], présente un profil qualitativement similaire à celui décrit par le modèle de Lamb-Oseen [15], [25] ou de Batchelor [2]. Il est possible de considérer qu'au delà de 10 envergures derrière l'avion, la composante de vitesse axiale est négligeable. L'approximation d'une distribution tourbillonnaire purement azimutale est alors justifiée pour étudier les tourbillons de sillage dans cette zone. La troisième phase d'évolution des tourbillons correspond l'interaction de la paire de tourbillons par diffusion visqueuse. Il peut en résulter deux types d'instabilités décrites par Crow [8] et par Tsai et Widnall [28]. Ces instabilités, de nature elliptique, ont également été étudiées très en détail par Sipp et al. [23]. La paire de tourbillon n'est détruite au final que par les instabilités de Crow. Les instabilités de Widnall, de très courte longueur d'onde ne semblent pas contribuer de manière significative à la dispersion finale des deux tourbillons.

Les instabilités de Crow se développent sur un temps basé sur l'envergure de l'avion, ce qui confèrent aux tourbillons leur très longue durée de vie [15]. Le tourbillon, lors de sa création, peut être le si ge d'instabilités de cœur, puisqu'il conserve une partie de la turbulence de l'écoulement amont. Il peut également interagir avec la turbulence externe des jets moteurs ou du fluide environnant [29]. L'objectif est de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu dans la seconde phase d'enroulement, en vue d'un meilleur contrôle de chaque tourbillon plus proche de l'avion pour réduire le temps nécessaire à leur dissipation.

Le modèle de tourbillon retenu pour cette étude est le tourbillon de Lamb-Oseen [10]. C'est une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes axisymétriques loin de la zone d'enroulement. Il existe de nombreuses études théoriques concernant la stabilité des tourbillons isolés en incompressible [1], [3], [9]. Leurs applications sont en effet nombreuses, aussi bien concernant les tourbillons de sillage d'avion, que les tourbillons observés dans l'hélium superfluide ou encore les filaments tourbillonnaires des écoulements turbulents. En général, on distingue les analyses visqueuses et les analyses réalisées en fluide parfait.

SANS MENTION DE PROTECTION

L'hypothèse de fluide parfait pose parfois plus de problème qu'elle n'en résout en permettant l'existence de solutions difficiles à interpréter. D. Sipp et al. ont défini un critère général d'instabilité centrifuge des écoulements plans non visqueux incompressibles dans un système en rotation [24]. Il se ramène au critère de Rayleigh dans le cas de tourbillons axisymétriques en repère fixe. Ce critère se traduit par le fait qu'il peut exister une instabilité centrifuge si la circulation $\Gamma(r)$ est non monotone. Concernant le modèle de Lamb-Oseen incompressible, D. Sipp a montré que la limite non visqueuse de tous les modes propres sont des modes propres oscillants. Ces ondes représentent l'équivalent des ondes d'inertie qui existent dans un milieu en rotation uniforme. Elles se situent le long du cœur du tourbillon et participent à la propagation des perturbations. D. Fabre, [10], a élargi cette analyse de stabilité en tenant compte de la viscosité. Il en résulte que le tourbillon bidimensionnel de Lamb-Oseen est stable. Mais dans le cas visqueux les ondes de Kelvin sont de deux types : des modes propres réguliers neutres qui se propagent comme les ondes inertielles, et des modes singuliers amortis par la viscosité.

Une étude de stabilité d'un tourbillon compressible de Lamb-Oseen chauffé ou refroidi au centre, réalisée au DAFE [18], [19], a montré qu'un réchauffement n'a aucun effet destabilisant sur le tourbillon. En revanche, un refroidissement peut entraîner une destabilisation des modes de grandes longueurs d'ondes et des modes 2D ($k = 0$). C'est ainsi que nous nous intéressons aux instabilités pouvant se développer dans un tourbillon compressible 2D isolé refroidi au centre.

Nous nous plaçons dans la zone du sillage où la distance entre la paire de tourbillons, d , est grande devant le rayon visqueux du tourbillon, a . Il s'agit d'analyser, à l'aide d'une Simulation Numérique Directe (DNS), les phénomènes qui peuvent se produire dans le sillage proche, bien avant le développement des instabilités coopératives capables de dissiper le tourbillon.

La première partie récapitule les équations de Navier-Stokes compressibles en coordonnées cylindriques. La méthode numérique de résolution des équations est ensuite présentée. Le cas test retenu pour la simulation 2D est décrit en détail dans la partie 5, puis les résultats obtenus sont discutés en les comparant à ceux de l'analyse de stabilité linéaire. Enfin nous concluons sur ce travail et sur les perspectives.

2 Equations de Navier-Stokes résolues avec le code DNS

Les équations de Navier-Stokes contenant les termes visqueux s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \underline{u}) &= \nabla \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\mu C_p}{Pr} \nabla T)\end{aligned}$$

Dans les équations ci dessus, nous avons implicitement fait l'hypothèse que la conductivité thermique du fluide est déduite de la viscosité à partir du nombre de Prandtl constant :

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Pour terminer, nous donnons les expressions des composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= 2\mu(\underline{\underline{\nabla u}}^S - \frac{1}{3}\nabla \cdot \underline{u} \mathcal{I}) \\ \sigma_{ij} &= 2\mu(\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k})\end{aligned}$$

Tous les opérateurs sont donnés en coordonnées cylindriques en annexe (A.1).

La résolution des équations est effectivement réalisée en coordonnées cartésiennes. Néanmoins le problème traite de l'évolution d'un tourbillon, naturellement décrit dans le système de coordonnées cylindriques. C'est ainsi que les quantités sont projetées sur le système de coordonnées cylindriques r, θ, y pour l'analyse des résultats.

2.1 Adimensionnalisation des équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques

Les quantités sont adimensionnées comme suit :

$$\begin{aligned}r &= L_{ref} \bar{r} \quad y = L_{ref} \bar{y} \quad t = \frac{L_{ref}}{U_{ref}} \bar{t} \\ u_r &= U_{ref} \bar{u}_r \quad u_\theta = U_{ref} \bar{u}_\theta \quad u_z = U_{ref} \bar{u}_z \\ \rho &= \rho_\infty \bar{\rho} \quad T = T_\infty \bar{T} \quad p = (\rho_\infty U_{ref}^2) \bar{p} \quad \rho E = (\rho_\infty U_{ref}^2) \bar{\rho} \bar{e} \quad \mu = \mu_\infty \bar{\mu}\end{aligned}$$

SANS MENTION
DE PROTECTION

Les équations de Navier Stokes compressibles sans dimension font apparaître le nombre de Reynolds, le nombre de Prantdl et le nombre de Mach :

$$Re = \frac{\rho_{\infty} U_{ref} L_{ref}}{\mu_{\infty}} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa_{\infty}} \quad \varepsilon = \frac{U_{ref}}{c_{\infty}}$$

Notons que la viscosité est rendue sans dimension en utilisant sa valeur définie à T_{∞} notée μ_{∞} . Elle est évaluée via une loi de puissance, moins coûteuse du point vu numérique que la loi de Sutherland :

$$\bar{\mu} = \bar{T}^{0.75}$$

De plus, la loi des gaz parfaits s'écrit adimensionnellement :

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} \bar{T}}{\gamma \varepsilon^2}$$

L'opération d'adimensionnalisation est indépendante du système de coordonnées et elle est détaillée en annexe en coordonnées cartésiennes. On s'attache ici à donner les équations sans dimensions en coordonnées cylindriques. Pour ne pas confondre les variables sans dimension et les variables moyennées, les variables sans dimension ne sont pas différenciées dans les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} &= -\frac{\rho u_r}{r} \\ \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_y u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_y u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_y u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\rho u_y u_r}{r} + \frac{\partial \sigma_{yr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{y\theta}}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yr}}{r} \\ \frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_r u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_r u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\rho (u_{\theta} u_{\theta} - u_r u_r)}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{ry}}{\partial y} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} \\ \frac{\partial \rho u_{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_{\theta} u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_{\theta} u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_{\theta} u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -2 \frac{\rho u_r u_{\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \sigma_{\theta y}}{\partial y} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \end{aligned}$$

SANS MENTION
DE PROTECTION

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon + p)u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \varepsilon + p)u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \varepsilon + p)u_y}{\partial y} = & -\frac{(\rho \varepsilon + p)u_r}{r} + \frac{u_y \sigma_{yr}}{r} + \frac{u_r \sigma_{rr}}{r} \\ & + \frac{u_\theta \sigma_{\theta r}}{r} + \frac{\partial u_y \sigma_{yr}}{\partial r} + \frac{\partial u_r \sigma_{rr}}{\partial r} \\ & + \frac{\partial u_\theta \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_y \sigma_{y\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_y \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial u_r \sigma_{ry}}{\partial y} \\ & + \frac{\partial u_\theta \sigma_{\theta y}}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_1 \mu}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \\ & \frac{\alpha_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{(\gamma - 1) Pr Re \varepsilon^2}$$

et

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2\mu}{Re} \left(\frac{\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^t}{2} - \frac{1}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{I} \right)$$

soit

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{I} \right) & \sigma_{r\theta} &= \frac{\mu}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \sigma_{ry} &= \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{I} \right) & \sigma_{\theta y} &= \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \right) & \sigma_{yy} &= \frac{2\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{I} \right) \end{aligned}$$

2.2 Interpolation des quantités

Le trièdre (x, y, z) est tel que (Oy) représente la direction axiale d'homogénéité. Cela modifie l'orientation du repère local (r, θ, y) et on a les relations :

$$\underline{e}_r = \cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_z \quad \underline{e}_\theta = \sin\theta \underline{e}_x - \cos\theta \underline{e}_z$$

Concernant la projection des vitesses :

$$U_x = U_r \cos\theta + U_\theta \sin\theta \quad U_z = U_r \sin\theta - U_\theta \cos\theta$$

avec

$$x = r \cos\theta \quad z = r \sin\theta$$

3 Méthodes numériques

3.1 Discrétisation des termes convectifs et de diffusion

La discrétisation spatiale des équations est découplée de la discrétisation temporelle. La discrétisation des termes convectifs est réalisée grâce à un schéma compact d'ordre six [16], et sous forme semi-conservative [4]. Ce type de discrétisation tente de se rapprocher des méthodes dites pseudo-spectrales, où les dérivées sont discrétisées en fonction de l'ensemble des points du maillage [10], [12].

La direction (Ox) est prise comme direction de référence pour expliciter l'écriture discrète des dérivées convectives.

Soit f une variable dont on souhaite évaluer la dérivée au point i à l'instant t , i variant de 1 à m_1 . Alors pour $3 \leq i \leq m_1 - 2$:

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} a$$

$$h = x_{i+1} - x_{i-1} \quad \alpha = \frac{1}{3} \quad a = \frac{14}{9} \quad b = \frac{1}{9}$$

Et le schéma en ces points est d'ordre six.

Sinon, ensuite en $i = 2$ et $i = m_1 - 1$, on a :

$$h = x_{i+1} - x_{i-1} \quad \alpha = \frac{1}{4} \quad a = \frac{3}{2} \quad b = 0$$

Et le schéma en ces points est d'ordre quatre.

Enfin, en $i = 1$ et $i = m_1$, le schéma est d'ordre trois et on calcule :

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{2f_2 + 0.5f_3 - 2.5f_1}{h}$$

$$f'_{m_1} + 2f'_{m_1-1} = \frac{+2.5f_1 - 2f_{m_1-1} - 0.5f_{m_1-2}}{h}$$

Les coefficients étant à chaque fois obtenus en égalant les coefficients des développements limités d'ordre successifs [16]. Le schéma numérique discret ainsi obtenu est représenté par une matrice tridiagonale. Le problème est ensuite résolu par une méthode de décomposition (LU). Pour conserver un ordre élevé de discrétisation, les gradient des quantités calculées sur les bords du domaine doivent être suffisamment faibles. Le domaine de calcul doit donc être suffisamment grand.

Pour minimiser l'erreur d'aliasing, [4], [12], une formulation semi-conservative des termes de convection est employée. On calcule :

$$\frac{\partial(\rho u_j q)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\rho u_j q)}{\partial x_j} + q \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial q}{\partial x_j} \right]$$

Pour la densité, on a :

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right]$$

Pour que l'ordre élevé du schéma soit conservé, une discrétisation à l'ordre six a été employée pour calculer les termes de diffusion. Les termes du type $\frac{\partial}{\partial x_i} \mu \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \neq j$ sont discrétisés avec le même type de schéma compact que les termes convectifs. Les termes dissipatifs tels que $i = j$ sont décomposés d'une autre façon pour éviter les oscillations :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mu \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

3.2 Discrétisation des termes temporels

Les équations sont intégrées en temps par un schéma de Runge-Kutta à l'ordre trois [12]. Symboliquement, on peut écrire les équations à résoudre comme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H(f) = SM_x(f) + SM_y(f) + SM_z(f)$$

Le schéma s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f_0 &= f^n \\ f_1 &= f_0 + \gamma_1 \Delta t H_0 \quad H_0 = H(f_0) \\ f_2 &= f_1 + \gamma_2 \Delta t H_1 \quad H_1 = H(f_1) + \epsilon_1 H_0 \\ f_3 &= f_2 + \gamma_3 \Delta t H_2 \quad H_2 = H(f_2) + \epsilon_2 H_1 \\ f^{n+1} &= f_3 \end{aligned}$$

Les coefficients sont tels que :

$$\gamma_1 = 0.5 \quad \gamma_2 = 0.9106 \quad \gamma_3 = 0.366 \quad \epsilon_1 = -0.683 \quad \epsilon_2 = 1.33$$

3.3 Conditions aux limites

La condition d'homogénéité dans la direction longitudinale s'écrit sur deux points :

$$f(1) = f(m_2 - 1) \quad f(m_2) = f(2)$$

Il faut donc un minimum de 5 points dans cette direction pour le calcul.

Sur les frontières transverses fluides, des conditions de non réflexion sont imposées [7], [21], [27]. Elles permettent d'évacuer les ondes de pression qui arrivent sur les bords du domaine de calcul.

On résout sur la frontière $x = cte$, un système de la sorte :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

où $U = [\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \rho E]^t$ et A_x est diagonalisable.

La méthode repose ensuite sur le calcul des variables caractéristiques $dW_i = \Psi_i dU$. Les vecteurs Ψ_i sont les vecteurs propres de la matrice A_x associés aux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = U \cdot n_x$$

**SANS MENTION
DE PROTECTION**

$$\lambda_4 = U \cdot n_x + c$$

$$\lambda_5 = U \cdot n_x - c$$

et

$$dW_1 = dp - c^2 d\rho$$

$$dW_2 = dU \cdot n_1$$

$$dW_3 = dU \cdot n_2$$

$$dW_4 = dp + c\rho dU \cdot n$$

$$dW_5 = dp - c\rho dU \cdot n$$

Le vecteur n correspond à la normale extérieure à la frontière. La base de vecteurs (n_1, n_2) est une base du plan tangentiel à la frontière considérée. c est la vitesse du son.

Dans un premier temps on utilise des conditions aux limites de Von Neumann (pente nulle), ce qui permet de calculer les variations de dW_i . Une procédure de correction est ensuite employée pour obtenir des conditions de non réflexion. Dans cette seconde phase, on annule les variations temporelles de chaque caractéristique entrante :

$$\lambda_i \leq 0 \implies dW_i = 0$$

On obtient au final les variations des variables sur les bords par :

$$dp = p^{n+1} - p^n \quad dU = U^{n+1} - U^n \quad d\rho = \rho^{n+1} - \rho^n$$

4 Extraction ~~des grandeurs statistiques~~

Nous allons décrire ici les méthodes de moyennage utilisées permettant d'obtenir les quantités moyennes et fluctuantes.

4.1 Grandeurs moyennes

La notion de moyenne statistique nécessaire à l'étude des écoulements turbulents repose sur la notion de moyenne d'ensemble d'un grand nombre d'échantillons N . D'une façon générale, on définit la moyenne d'ensemble d'une variable qui dépend du temps t et de l'espace x par :

$$\langle \alpha \rangle (t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t, x) \right\}$$

Deux cas particuliers d'écoulements turbulents sont importants : le cas d'un écoulement stationnaire en moyenne et le cas d'un écoulement homogène dans certaines directions de l'espace. Dans le premier cas, les propriétés statistiques de l'écoulement sont indépendantes du temps et dans le second cas elles sont indépendantes de la direction d'espace concernée. Dans notre étude du tourbillon de Lamb Oseen refroidi au centre, (Oy) est une direction d'homogénéité. Pour obtenir des grandeurs statistiques un moyennage dans cette direction est donc réalisé à chaque pas de temps [22]. Comme le tourbillon est axisymétrique, les quantités sont également moyennées selon θ après une interpolation entre le plan (x, z) et le plan (r, θ) . Le choix du nombre de points nécessaires selon θ pour réaliser la moyenne est arbitraire et dans la présente simulation $N_\theta = 100$. Comme l'écoulement est compressible, les moyennes utilisées sont plutôt les moyennes de Favre [11].

On obtient ainsi les quantités moyennes de l'écoulement étudié, qui ne dépendent plus que de la variable r et du temps. En continu, pour une moyenne d'ensemble, on peut écrire [15]:

$$\bar{\Phi}(r, t) = \frac{1}{2\pi L_y} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_y} \Phi(r, \theta, y, t)$$

Soit en variable de Favre :

$$\tilde{\Phi}(r, t) = \frac{1}{2\pi L_y \bar{\rho}} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_y} \rho(r, \theta, y, t) \Phi(r, \theta, y, t)$$

Donc sur notre maillage :

$$g_y(t, x, z) = \frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{j=N_y} (\rho f)(t, x, y, z)$$

puis

$$\tilde{f}(t, r) = \frac{1}{N_\theta \bar{\rho}} \sum_{l=1}^{l=N_\theta} g_y(t, r, \theta_l)$$

Les moyennes convergent beaucoup moins facilement lorsqu'on tend vers $r = 0$ puisqu'il y a de moins en moins de points selon θ .

4.2 Grandeurs fluctuantes

Les quantités fluctuantes sont obtenues en faisant la différence entre la quantités instantannée et la quantité moyenne :

$$f''(t,r,\theta,y) = f(t,r,\theta,y) - \widetilde{f}(t,r)$$

Ainsi pour calculer les tensions de Reynolds, une fois obtenue la fluctuation $f''(t,r,\theta,y)$, on réitère le processus de moyennage pour obtenir des quantités du type $\widetilde{f''^2}(t,r)$. Lors de l'analyse des résultats, il ne faudra néanmoins pas oublier que l'on a perdu les informations non axisymétriques contenues dans les tensions turbulentes.

$$g_y(t,x,z) = \frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{j=N_y} (\rho f'' h'')(t,x,y,z)$$

puis

$$\bar{\rho} \widetilde{f'' h''}(t,r) = \frac{1}{N_\theta} \sum_{l=1}^{l=N_\theta} g_y(t,r,\theta_l)$$

5 Tourbillon 2D refroidi au centre

L'analyse de stabilité linéaire d'un tourbillon de Lamb Oseen compressible, refroidi au centre, [18], [19], a montré que les modes $k = 0$ pouvaient présenter des taux de croissance positifs. Cette partie présente l'évolution spatiale du tourbillon, obtenue par une Simulation Numérique Directe 2D. Un champ de perturbations correspondant au mode propre le plus amplifié, et issu du calcul de stabilité, est superposé aux champs de base de la DNS pour initialiser les calculs.

L'écoulement est faiblement compressible, et le nombre de Mach est le même que celui de l'analyse de stabilité linéaire, $M = 0.1$. Le nombre de Reynolds vaut $Re = 10^4$. Il est assez élevé car on travaille en 2D.

5.1 Initialisation de l'écoulement

Le choix des champs initiaux repose sur les études réalisées en analyse de stabilité linéaire. Nous imposons des champs à l'initialisation qui sont les plus proches possibles des champs de base calculés en stabilité. Le modèle de tourbillon retenu pour cette étude est le tourbillon de Lamb-Oseen [26]. Ce modèle est caractérisé par une vitesse axiale nulle. Les lois de vitesse azimuthale et de vorticité axiale sont les suivantes :

$$U_{\theta_0}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} [1 - e^{(-\frac{r^2}{a^2})}]$$

$$\omega_0(r) = \frac{\Gamma}{\pi a^2} e^{(-\frac{r^2}{a^2})}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\rho_0 U_{\theta_0}^2}{r} \quad \longrightarrow \quad p_0 = p_\infty - \int_r^\infty \frac{\rho_0 U_{\theta_0}^2}{r} \quad (1)$$

Lorsque la densité est constante, la solution analytique s'écrit :

$$p_0(r) = p_\infty - \frac{\rho_0 \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \left[\frac{(1 - e^{-\eta})^2}{\eta} + 2Ei(\eta) - 2Ei(2\eta) \right] \quad \eta = \frac{r^2}{a^2}$$

$$\text{D'autre part, } p_0(r \rightarrow 0) = p_\infty - \frac{\rho_0 \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} (2 \ln(2)).$$

Ce modèle de Lamb Oseen est solution des équations d'Euler (avec un rayon visqueux a constant) mais présente de plus la particularité d'être une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes instationnaires bidimensionnelles pour $a^2(t) = a_0^2 + \frac{4 \mu t}{\rho_0}$.

Dans le cas d'un fluide compressible, pour tenir compte de la compressibilité du fluide, on impose soit la température, soit la densité. Cela permet ensuite de calculer le champ initial de pression en intégrant l'équation (1). Le régime thermique qui correspond aux conditions de l'écoulement dans un sillage d'avion est dit faible [19]. Dans ce cas l'évolution de la température est régie par les conditions extérieures mais sans réel couplage entre la dynamique et la thermique. Le paramètre s d'amplitude des variations de la densité, et donc de la température, est donc un petit paramètre, petit devant 1.

SANS MENTION
DE PROTECTION

Nous avons choisi d'appliquer un profil initial qui représente un refroidissement au centre du tourbillon :

$$\rho_0 = \rho_\infty (1 + s e^{-\frac{r^2}{b^2}}) \quad s > 0$$

Lorsque $a = b$, la solution analytique de la pression est obtenue facilement et vaut :

$$p_0(r) = p_\infty - \frac{\rho_\infty \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} \left[\frac{(1 - e^{-\eta})^2}{\eta} + 2Ei(\eta) - 2Ei(2\eta) \right. \\ \left. s(-e^\eta + Ei(\eta)\eta + 2e^{-2\eta} - 4Ei(2\eta)\eta - e^{-3\eta} + 3Ei(3\eta)\eta) / \eta \right]$$

On retrouve la partie incompressible de l'expression, suivie des effets de compressibilité. La limite lorsque r tend vers 0 vaut :

$$p_0(r \rightarrow 0) = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} (2 \ln(2) - 4 s \ln(2) + 3 s \ln(3))$$

Pour d'autres valeurs du paramètre b , l'expression générale est difficile à utiliser. La solution est calculée avec Maple pour chaque valeur de b étudiée.

Pour conclure, le profil de vitesse initial qui est imposé correspond à celui d'un tourbillon de Lamb-Oseen incompressible. Ensuite les effets de compressibilité donné par la distribution en densité ρ_0 ne sont pris en compte qu'au travers du calcul des variables thermodynamiques du fluide. Une fois obtenus les champs de pression et de température, on peut initialiser l'énergie totale dans le domaine de calcul en projetant le profil de la vitesse tangentielle dans chaque plan (x, z) .

5.2 Quantités de référence utilisées dans la simulation

Les champs thermodynamiques ont pour référence les champs à l'infini où le fluide est pris au repos. L'expression de la vitesse tangentielle du modèle de Lamb-Oseen montre que la vitesse maximale n'est pas atteinte en a mais en $r_c = 1.12 a$. Dans les simulations numériques, certains auteurs choisissent ainsi r_c comme longueur de référence et $U_{\theta_0max} = \frac{\Gamma}{8.79 r_c}$ comme vitesse de référence [13], [26]. Nous avons choisi $L_{ref} = a$ comme longueur de référence, et contrairement à ce qui est fait en stabilité, la vitesse de référence correspond à la vitesse maximum du tourbillon :

$$U_{ref} = U_{\theta_0max} = \frac{\Gamma}{9.845 a}$$

5.3 Solution initiale sans dimension

Les quantités initiales sans dimension s'écrivent donc :

$$\bar{U}_\theta = \frac{C_1}{2\pi \bar{r}} [1 - e^{(-\bar{r}^2)}]$$

$$C_1 = 9,845$$

$$\bar{U}_\theta = \frac{C_2}{\bar{r}} [1 - e^{(-\bar{r}^2)}] \quad C_2 = 1.567$$

SANS MENTION
DE PROTECTION

$$\bar{p} = 1 + s e^{-\frac{r^2}{b^2}}$$

A titre d'exemple, nous donnons l'expression sans dimension de la pression lorsque $a = b$, avec rappelons-le $\eta = \bar{r}^2$:

$$\bar{p}_0(r) = \frac{1}{\gamma \varepsilon^2} - C_3 \left[\frac{(1 - e^{-\eta})^2}{\eta} + 2Ei(\eta) - 2Ei(2\eta) \right. \\ \left. s(-e^\eta + Ei(\eta)\eta + 2e^{-2\eta} - 4Ei(2\eta)\eta - e^{-3\eta} + 3Ei(3\eta)\eta)/\eta \right]$$

$$C_3 = \frac{C_2^2}{2} \simeq 1.23$$

La circulation sans dimension est donnée par la formule :

$$\bar{c} = \frac{C}{U_{ref} L_{ref}}$$

où

$$C = 2 \pi r U_\theta(r)$$

Le profil de la vitesse tangentielle rendue sans dimension par la vitesse maximale est présenté sur la figure (1). Le maximum de la vitesse tangentielle adimensionnelle est bien égale à l'unité.

Les figures (2) à (5) représentent les profils initiaux de la pression, de densité, de la quantité de mouvement selon (Ox) et selon (Oz) correspondant à un tourbillon de Lamb Oseen 2D refroidit au centre. Les champs ne sont pas perturbés. Ils sont équivalents aux champs de base calculés dans l'analyse de stabilité linéaire. La densité est maximale au centre où la température est la plus faible et le fluide plus lourd.

5.4 Perturbation de la solution initiale

Les perturbations calculées par l'analyse de stabilité linéaire sont de la forme [10] :

$$(\rho', i u'_x, u'_z, T') = A \text{Real}[(\hat{\rho}, \hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{T})] \exp(i(m\theta - \omega t)) \quad (2)$$

avec

$$\omega = \omega_r + i \sigma$$

La figure (6) représente le mode propre 2D le plus amplifié en vorticité en vorticité d'un tourbillon de Lamb-Oseen compressible refroidit au centre, pour $m = 3$, $b = 0.3$ et $s = 0.2$. Elle correspond au mode propre le plus amplifié compte tenu des paramètres choisiss. Le choix du mode $m = 3$, $b = 0.3$ et $s = 0.2$ est un bon compromis entre la discrétisation du pic de densité et la valeur des taux de croissance des modes [18], [26]. Le taux de croissance σ décroit lorsque b croit. Pour $b = 0.4$, le mode le plus amplifié est le mode $m = 2$ avec $\sigma = 0.12$. Pour $b = 0.3$ et $b = 0.2$, le mode le plus amplifié est le mode $m = 3$ avec respectivement $\sigma = 0.2042$ et $\sigma = 0.2504$. On voit donc que le choix $m = 3$, $b = 0.3$ et $s = 0.2$ permet de simuler une instabilité avec un bon taux de croissance.

La figure (7) représente le profil de vitesse du tourbillon de Lamb-Oseen avec le profil de densité pour les différentes valeurs de b . C'est principalement la pente du profil de densité qui varie lorsque b varie.

5.5 Domaine de calcul

Le domaine de calcul est rectangulaire. Toutes les données définies ci-dessous sont sans dimension. Le maillage est uniforme dans la direction axiale, repérée par l'axe (Oy) . Dans chaque plan (x,z) , le maillage est resserré au centre selon les deux directions pour discrétiser correctement le cœur visqueux du tourbillon et capturer la plus petite échelle de l'écoulement qui correspond à l'échelle de Kolmogorov :

$$\eta \simeq \frac{L}{a Re^{(3/4)}} \simeq \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{(1/4)}$$

L caractérisant les mouvements à grande échelle. Pour un nombre de Reynolds $Re = 10000$ et avec $L = a$, on obtient

$$\eta \simeq 10^{-3}$$

En réalité, l'échelle de Kolmogorov n'est définie qu'en turbulence 3D, mais cela donne un ordre de grandeur pour les calculs bidimensionnels. En se basant sur la simulation numérique directe réalisée par C. Pantano et L. Jacquin [15], un calcul a été réalisé avec un domaine allant de $-30a$ à $30a$ avec 681 points dans chaque direction. Un plus petit domaine aurait entraîné des problèmes de conditions aux limites au bord et la réflexion des ondes de pression sur la frontière. Avec $x_{min} = -30$ et $x_{max} = 30$ les ondes de pression sont correctement évacuées et ne viennent pas perturber le tourbillon. Les gradients étant concentrés au centre du domaine de calcul, l'ordre du schéma plus faible sur les frontières n'influe pas sur la solution obtenue au centre. Avec cette distribution de points, la valeur minimum de l'échelle de Kolmogorov vaut $\eta = 0.1 \Delta x$. Cette valeur est cohérente avec les valeurs préconisées par Moin et Mahesh [20].

La distribution des points sur une ligne horizontale est précisée sur la figure (8). Nous ne décrivons que la distribution des points selon (Ox) pour $x > 0$, la distribution selon $x < 0$ s'obtenant par simple symétrie. Les points sont équidistants sur une distance de $3a$, puis le pas suit une expansion en tangente hyperbolique. Le pas d'espace entre les points équidistants vaut $\Delta x = 0.01$. C'est aussi le pas initial de la distribution hyperbolique, le pas final vallant $df = 0.088$.

Contrairement au cas incompressible, ou compressible à densité constante, [26], il y a deux échelles différentes présentes dans le tourbillon de Lamb-Oseen refroidi. Il y a a , le rayon du tourbillon, et il y a b , distance sur laquelle la densité varie. Avec le maillage 681×681 il y a 30 points sur la plus petite échelle du problème b [26].

La figure (9) représente le maillage obtenu dans le plan $y = 0$. La dimension longitudinale vaut $L_y = 0.348$, discrétisée par 8 points. Le pas d'espace est donc égal à $\Delta y = 0.0435$. La taille du domaine dans la direction longitudinale a ainsi une longueur 100 fois plus petite que les dimensions transverses, justifiant l'utilisation d'un code écrit pour résoudre les équations de Navier-Stokes 3D en quasi 2D.

La simulation est réalisée par rapport à un repère se déplaçant avec la vitesse de l'avion l'avion. L'hypothèse d'homogénéité dans cette direction implique que l'évolution temporelle de l'écoulement selon y est une bonne représentation de son évolution spatiale. Cela est vrai dans la mesure où les gradients du champ de vitesse sont faibles sur la longueur L_y dans la zone où l'on peut approximer les tourbillons par une distribution de Lamb-Oseen.

SANS MENTION
DE PROTECTION

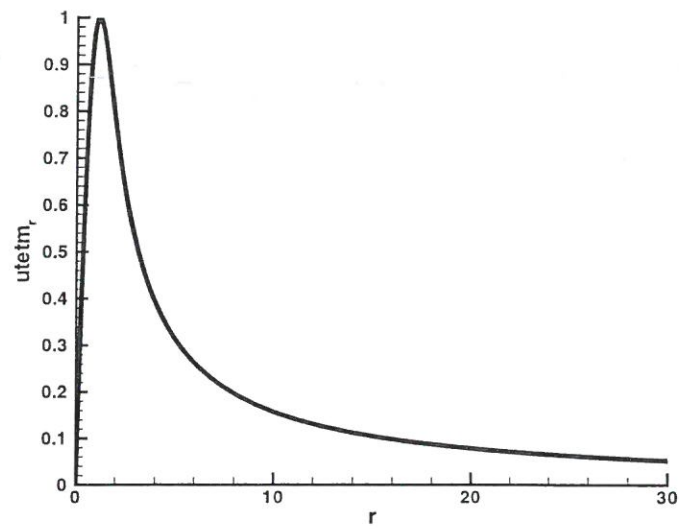


FIG. 1 – *Vitesse tangentielle du tourbillon sans dimension*

Les résultats présentés dans la section suivante correspondent au maillage $681 \times 8 \times 681$ points.

SANS MENTION
DE PROTECTION

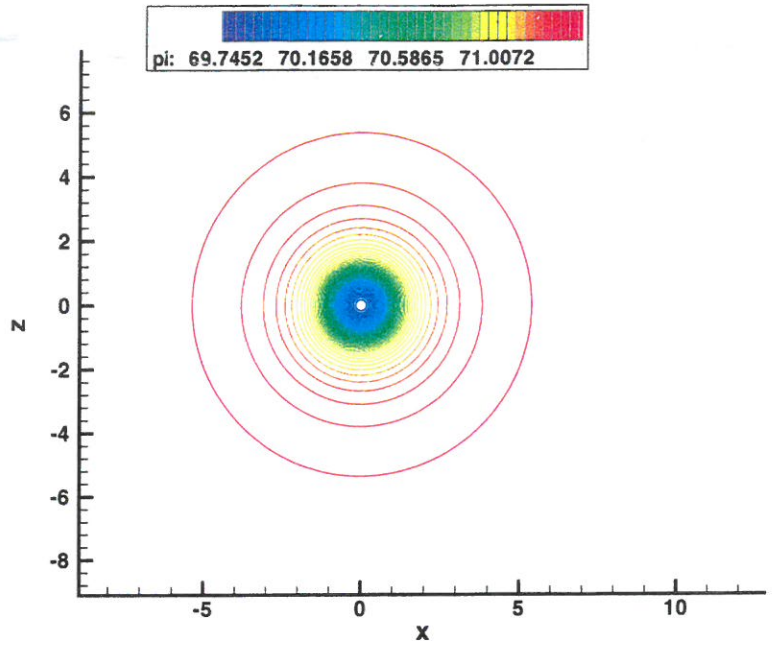


FIG. 2 – Distribution initiale de la pression dans le tourbillon de Lamb Oseen refroidit en son centre, profil non perturbé

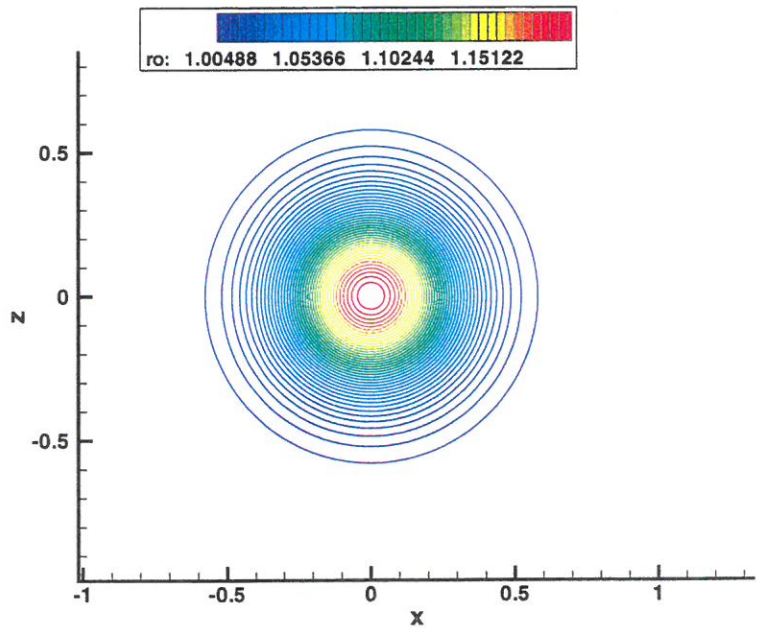


FIG. 3 – Distribution initiale de la densité dans un tourbillon refroidit au centre, profil non perturbé

SANS MENTION
DE PROTECTION

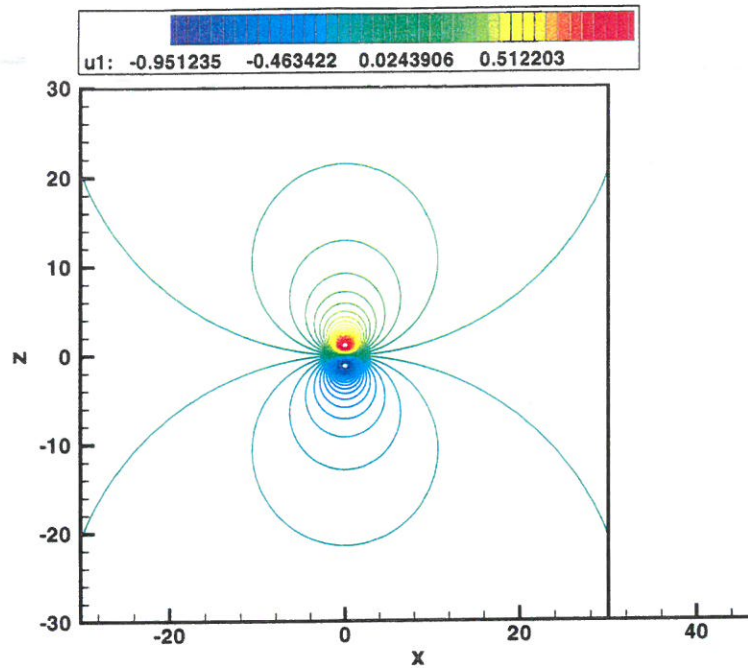


FIG. 4 – Distribution initiale de la quantité de mouvement u_x du tourbillon de Lamb Oseen isotherme

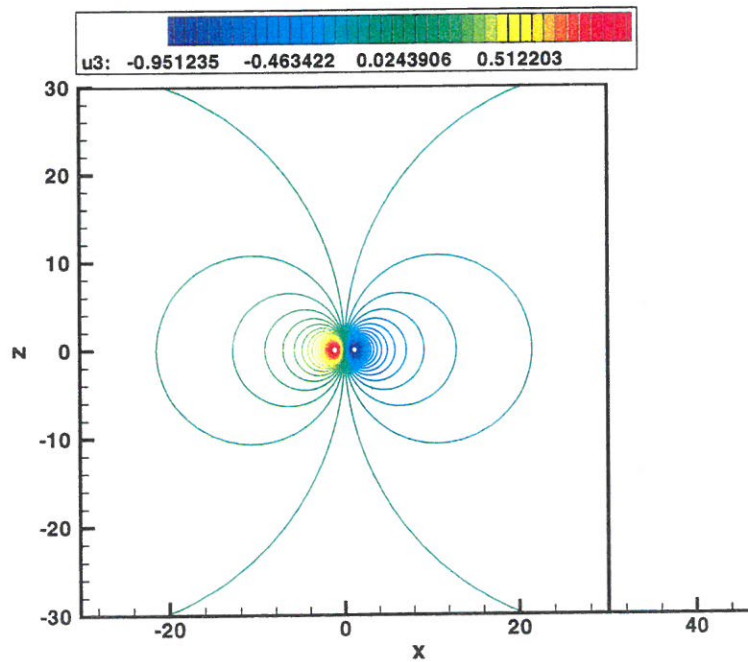


FIG. 5 – Distribution initiale de la quantité de mouvement u_z du tourbillon de Lamb Oseen refroidit au centre, non perturbé

SANS MENTION
DE PROTECTION

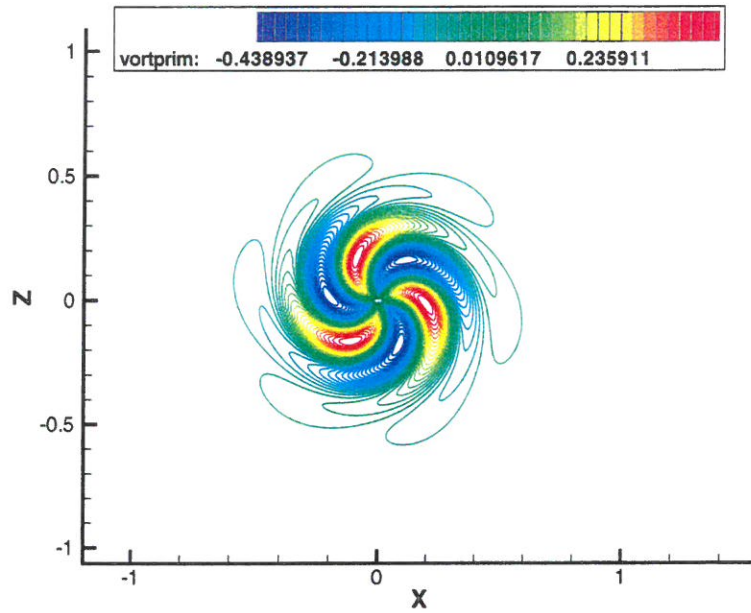


FIG. 6 – Distribution initiale de la perturbation en vorticité, mode $m = 3$

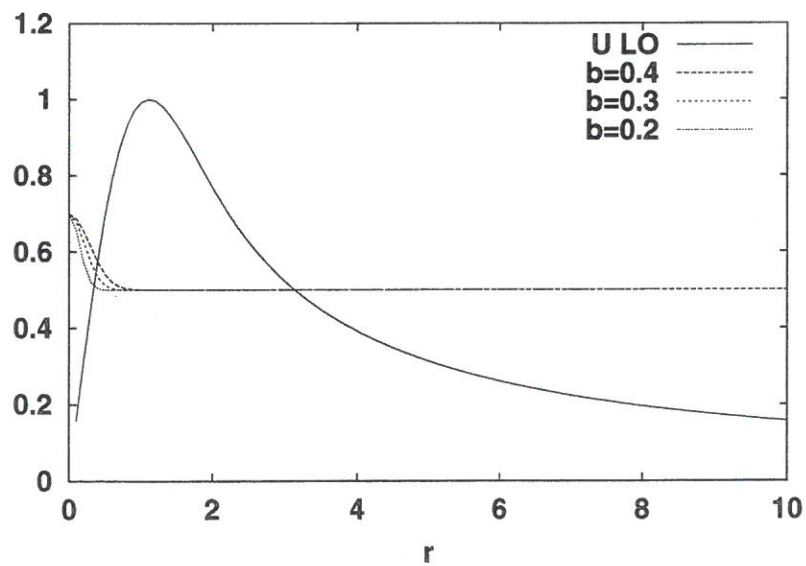


FIG. 7 – Densité et vitesse du Lamb-Oseen pour différentes valeurs de b

SANS MENTION
DE PROTECTION

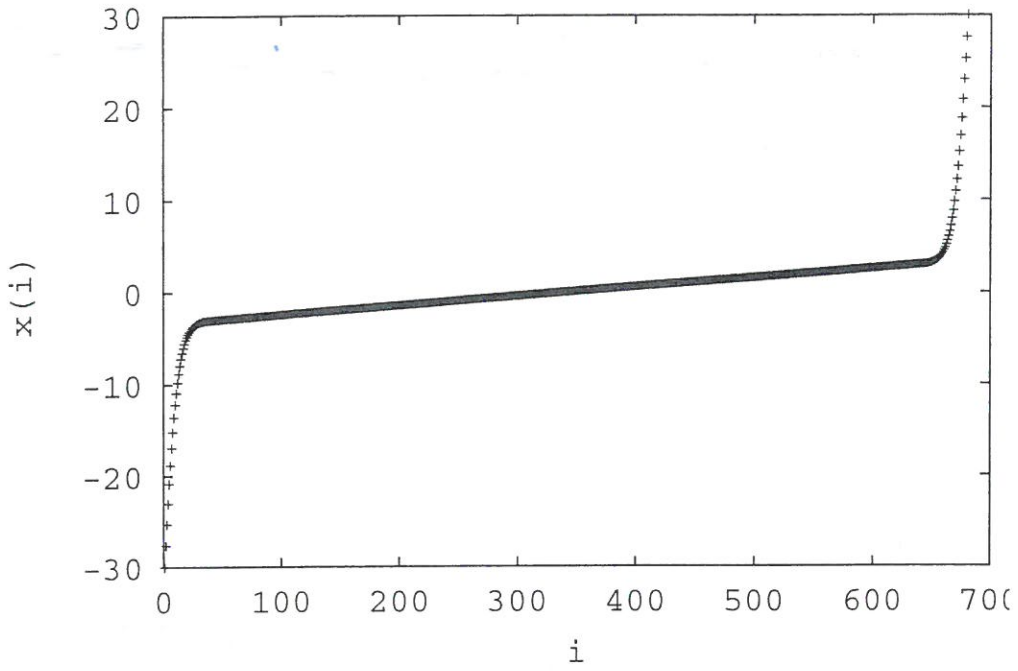


FIG. 8 - *Distribution de x (ou z) sur une longueur*

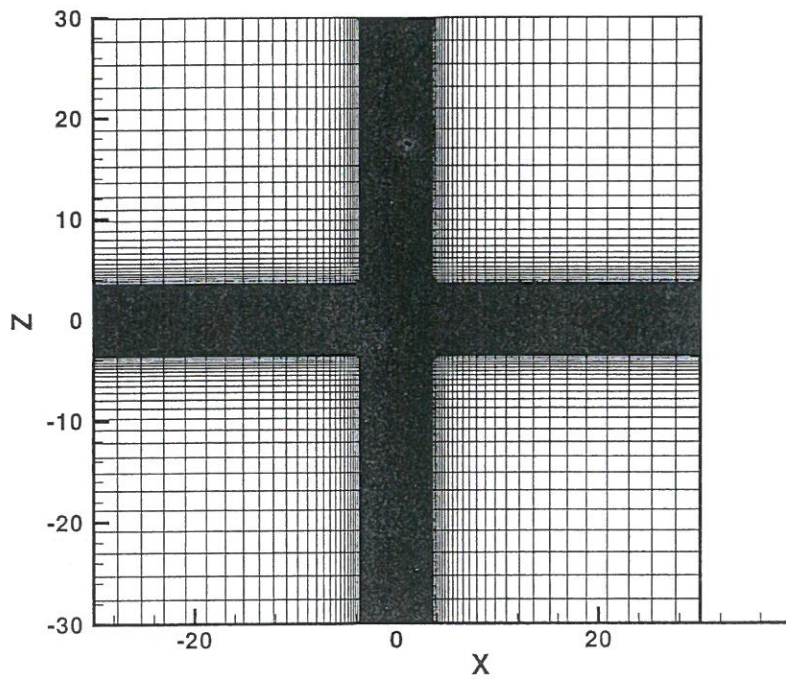


FIG. 9 - *Maillage dans un plan (x, z)*

5.6 Comparaison des résultats avec l'analyse de stabilité linéaire

Les champs $(\rho, \rho u_x, \rho u_z, \rho E)$ sont initialisés avec les champs de base axisymétriques correspondant au tourbillon de Lamb-Oseen, auxquels on a superposé les modes propres bidimensionnels $m = 3$. On rappelle que le paramètre s caractérisant la variation de densité vaut $s = 0.2$ et que $b = 0.3$. Toutes les quantités et équations utilisées en stabilité sont données en annexe. Toutes les relations reliant les variables utilisés dans les adimensionnements y sont également précisées.

Le calcul a été mené en superposant à la solution initiale des perturbations de 0.2% et des perturbations de 2%. Ils ont également été réalisés sur deux maillages différents pour tester la sensibilité des résultats au nombre de points sur le domaine de calcul.

5.6.1 Résultats obtenus pour une perturbation du champ de base de 2%

Le taux de croissance calculé numériquement est comparé aux résultats de la stabilité linéaire, de même que la période de rotation. La mesure du taux de croissance n'est pas réalisée à partir de l'énergie cinétique mais à partir du carré des fluctuations de densité. En effet l'utilisation de l'énergie cinétique, [6], implique des erreurs supplémentaires puisque cela entraîne des projections des composantes de la vitesse sur le maillage polaire. D'autre part, comme l'écoulement est 2D, et qu'il y a peu de points dans la direction d'homogénéité, une analyse en modes de Fourier est exclue [17], [26].

La figure (10) représente une moyenne du carré des fluctuations de densité sur toute la boîte de calcul en échelle logarithmique. Le taux de croissance du mode $m = 3$ le plus amplifié pour $s = 0.2$ et $b = 0.3$ vaut $\sigma = 0.2042$. Le taux de croissance du carré des fluctuations vaut donc $2\sigma = 0.4084$. On observe sur la figure (10) le très bon accord entre la droite de pente 0.4 et la pente du carré de la fluctuation de densité lors de la phase de croissance linéaire du mode. L'énergie atteint ensuite un maximum autour de $t = 7$ avant de décroître au cours du temps.

Les modes propres instables du tourbillon de Lamb-Oseen refroidi sont des modes oscillants [19], tels que $\omega_r \simeq m \simeq 3$. La période du mode considéré vaut ainsi $T = \frac{2\pi}{3} \simeq 2.1$. C'est effectivement ce qui est mesuré sur les courbes représentées figure (11) entre deux minimas. On obtient ainsi entre les deux premiers minimas : $T_{DNS} = 3.1339 - 0.94 = 2.1939$. On retrouve également sur cette figure la croissance exponentielle des perturbations à chaque passage au point $z = 0, x = 0.289$. On a ensuite entre le deuxième et le troisième extremum la valeur : $T_{DNS} = 5.406 - 3.1339 = 2.2721$. De même pour deux suivants : $T_{DNS} = 7.5216 - 5.406 = 2.1156$. Ces valeurs sont en très bon accord avec la théorie. On observe également sur ces courbes la saturation du mode pour la perturbation initiale de 2%.

L'évolution des perturbations de vorticité, ω'' au cours du temps, est représentée sur les figures (12) à (24). Les maximas et les minimas sont fixés par les valeurs minimales et maximales de ω'' sur la totalité du calcul. Les perturbations croissent au cours du temps tout en tournant comme cela est prédit par la stabilité linéaire. La croissance est linéaire et la forme des modes change peu jusqu'à $t = 7$. On observe ensuite une saturation des modes et une redistribution spatiale des perturbations, qui se répercute sur les champs de base. La dynamique des instabilités est très proche de ce que l'on peut observer avec des instabilités plus classiques de type Rayleigh-Taylor [5]. Les îlots de vorticité positive et

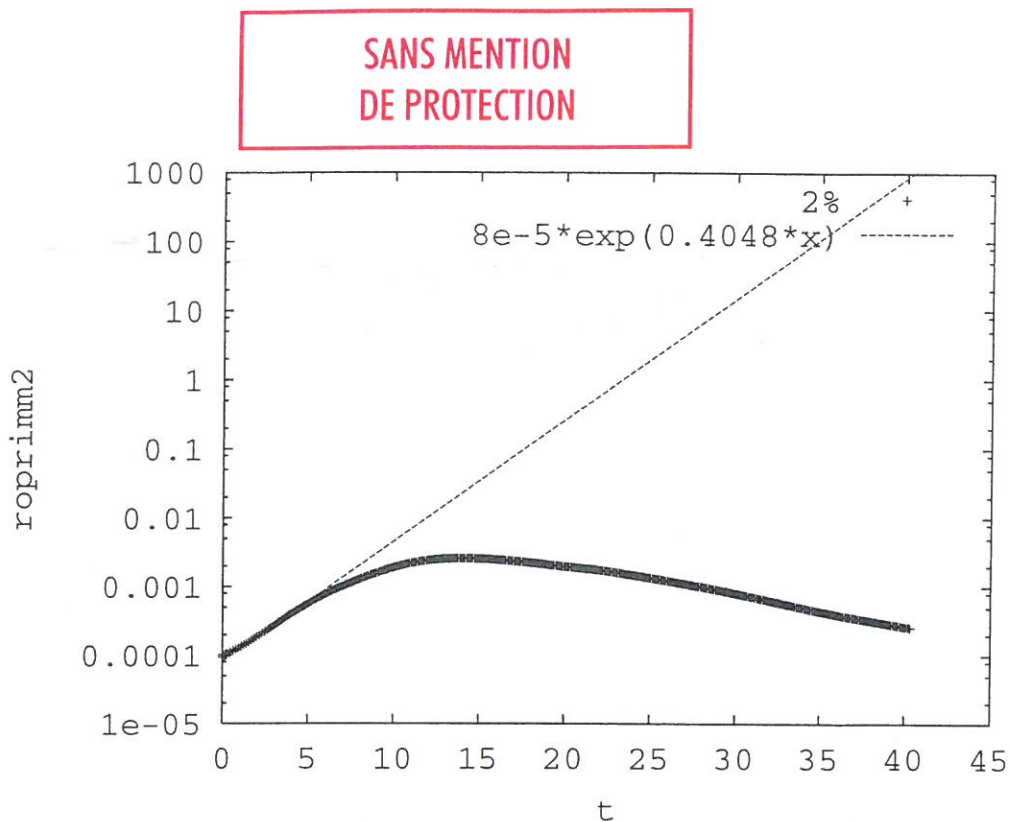


FIG. 10 – Fluctuation en densité, moyennée sur la totalité de la boîte en échelle log

négative, figure (15) sont expulsées du cœur pour être ensuite étirés dans le champ de vitesse azimutale du tourbillon de Lamb Oseen, figure (16). C'est ce que l'on observe à nouveau figures (18) à (21) lorsque les trois bras de vorticit   ont tendance    s'  loigner du c  ur avant d'  tre   tir  s dans le champ de vitesse azimutale. Cela complexifie la structure du mode au cours du temps. Cependant, on peut remarquer que le mode    $t = 34$, figure (24), a conserv   la m  me sym  trie $m = 3$ que le mode initial.

L'instabilit   se créée et croit aux d  pends du champ de base. L'  volution du champ de base $\rho(r)$ en fonction du temps est repr  sent   sur la figure (25). On peut observer le 'pompage' du champ de base par l'instabilit  . Le champ de vitesse $v_\theta(r)$ est repr  sent   sur la figure (26). Toutes les courbes coïncident    partir de $r = 1.5$. Par contre on peut observer la variation lente du profil au cours du temps pour $r \leq 1$. Enfin la courbe figure (27) qui repr  sente la circulation totale au cours du temps indique que toutes les courbes sont confondues pour $r \leq 1$ et qu'il n'y a pas d'overshoot [15].

SANS MENTION
DE PROTECTION

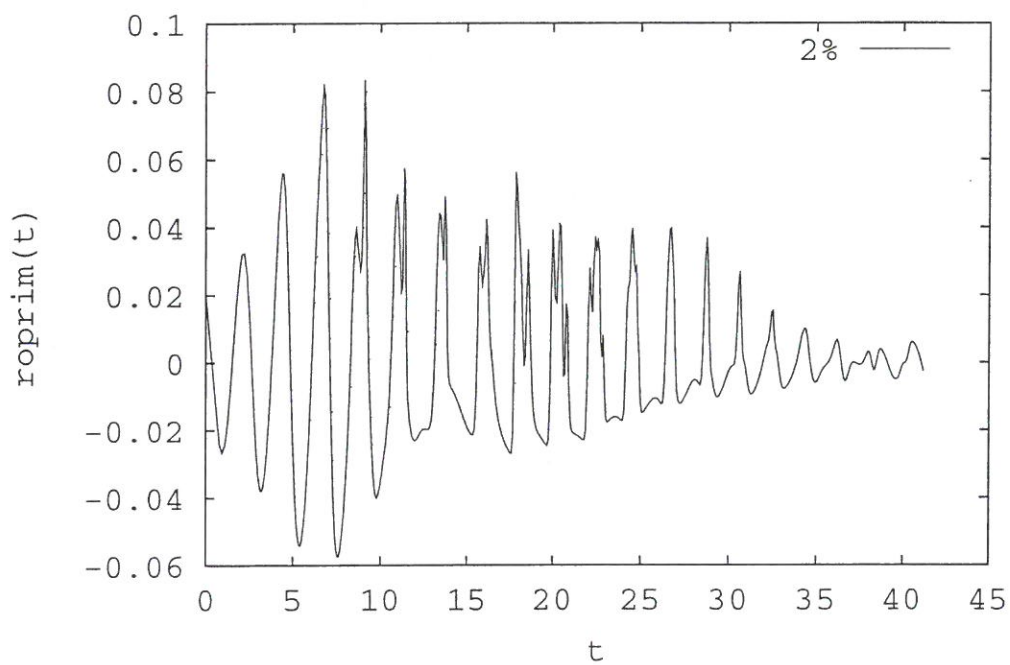


FIG. 11 - Fluctuation en densité au cours du temps en $z=0$ et $x = 0.289$

SANS MENTION
DE PROTECTION

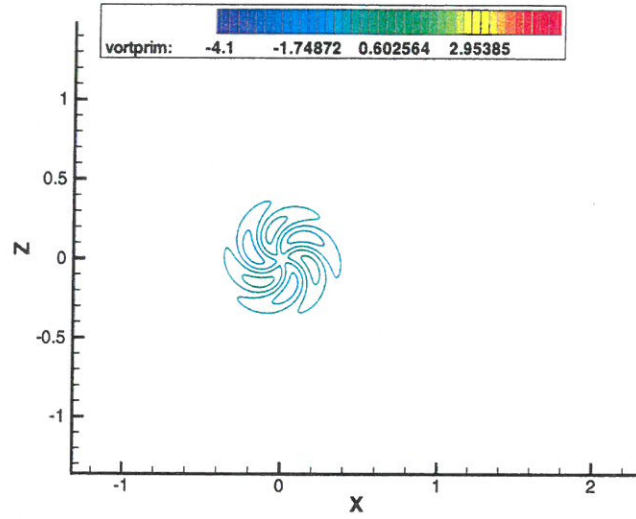


FIG. 12 - *Fluctuations de vorticité à $t = 0.157$*

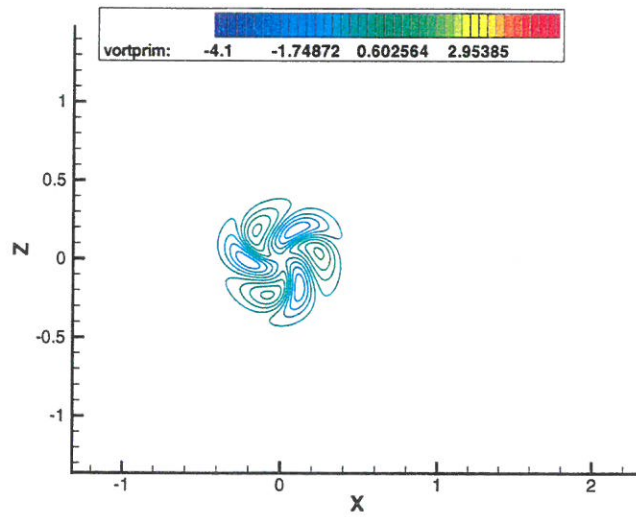


FIG. 13 - *Fluctuations de vorticité à $t = 3.918$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

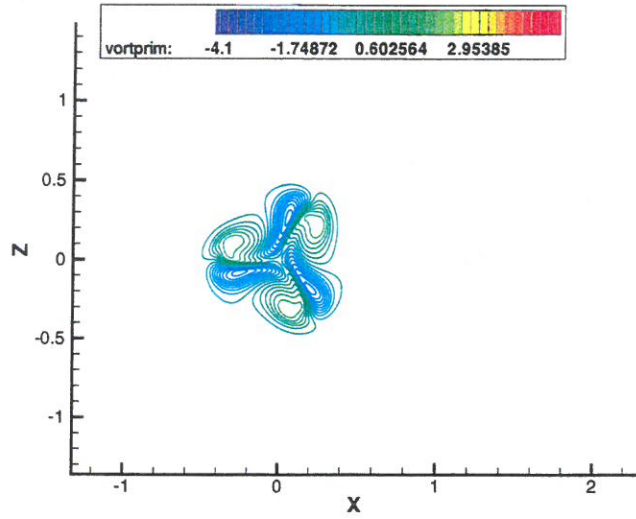


FIG. 14 - *Fluctuations de vorticité à $t = 7.835$*

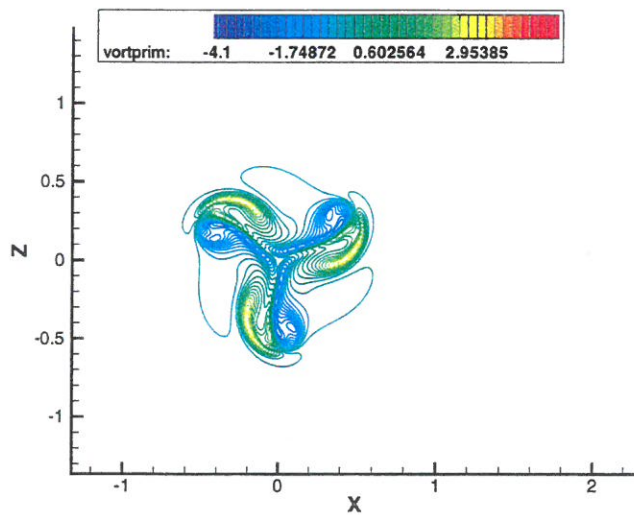


FIG. 15 - *Fluctuations de vorticité à $t = 10.969$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

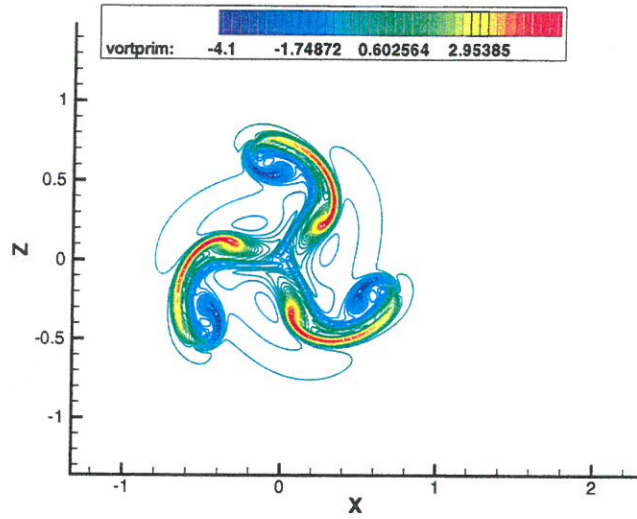


FIG. 16 - *Fluctuations de vorticité à $t = 14.88$*

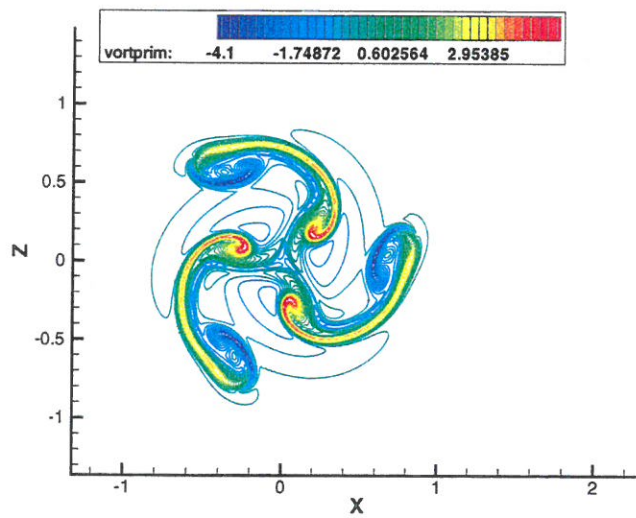


FIG. 17 - *Fluctuations de vorticité à $t = 17.23$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

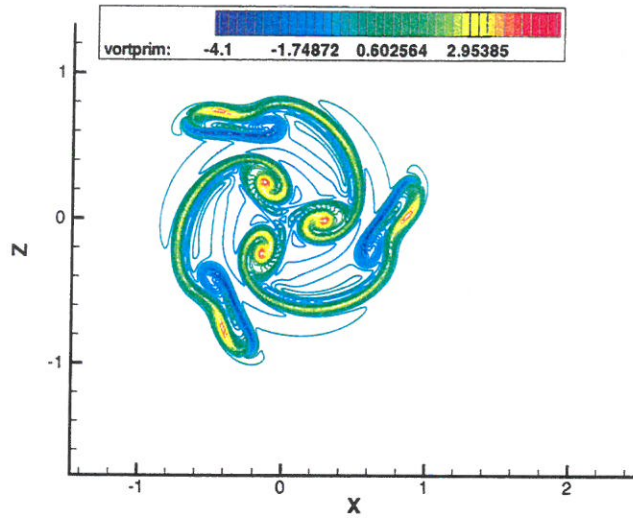


FIG. 18 - *Fluctuations de vorticité à $t = 20.37$*

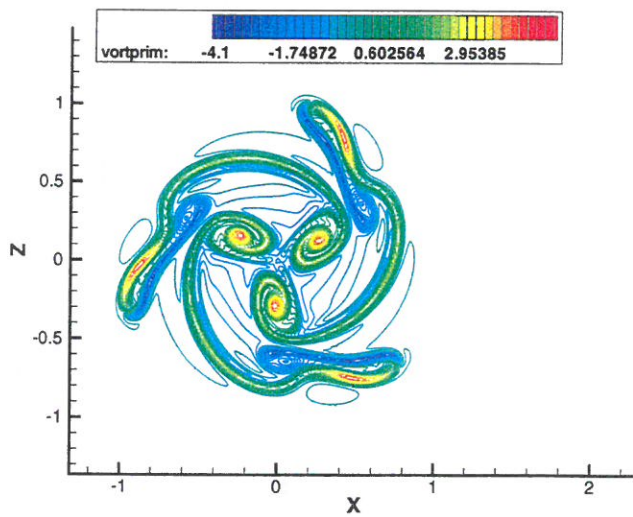


FIG. 19 - *Fluctuations de vorticité à $t = 21.938$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

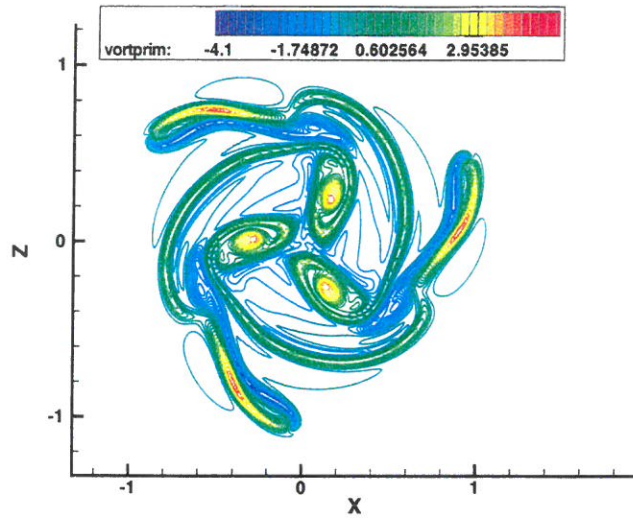


FIG. 20 - *Fluctuations de vorticité à $t = 23.5$*

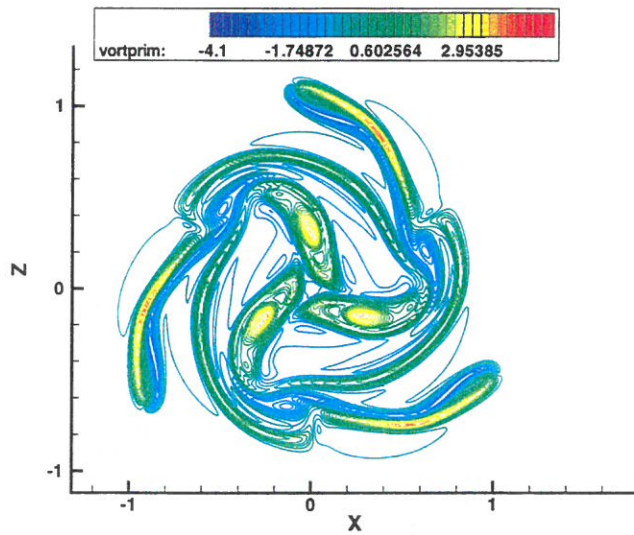


FIG. 21 - *Fluctuations de vorticité à $t = 25$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

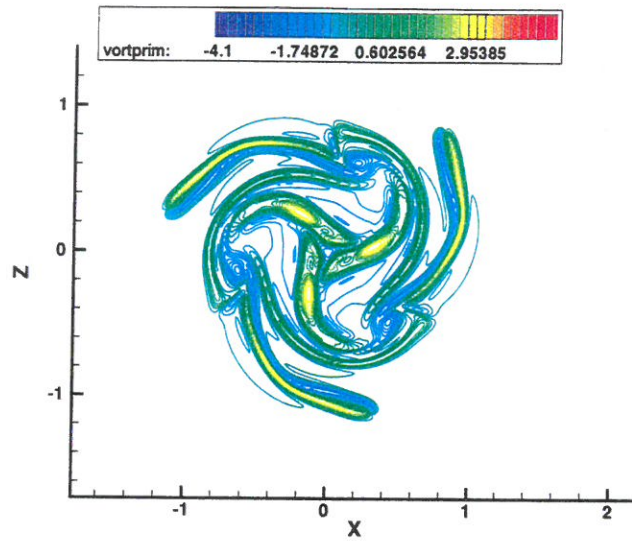


FIG. 22 – *Fluctuations de vorticité à $t = 26.63$*

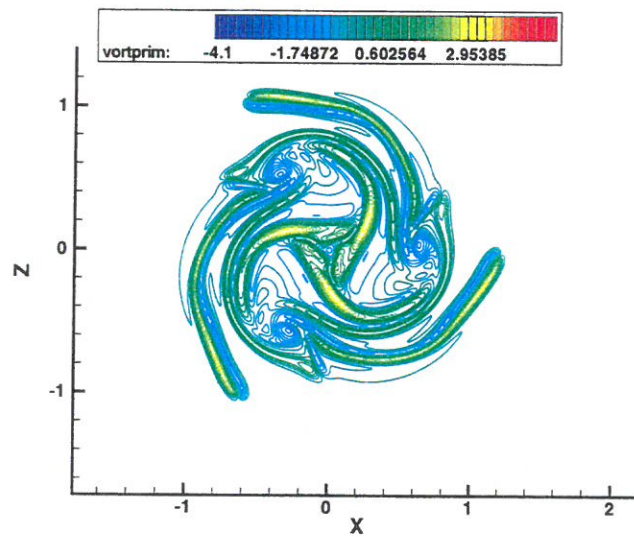


FIG. 23 – *Fluctuations de vorticité à $t = 28.2$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

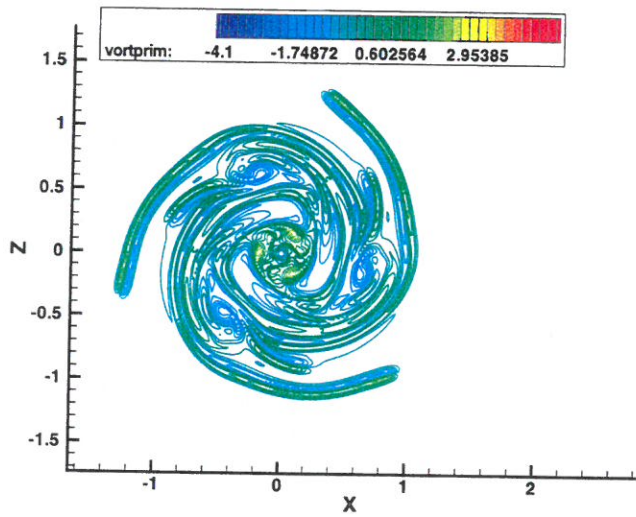


FIG. 24 - *Fluctuations de vorticité à $t = 34$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

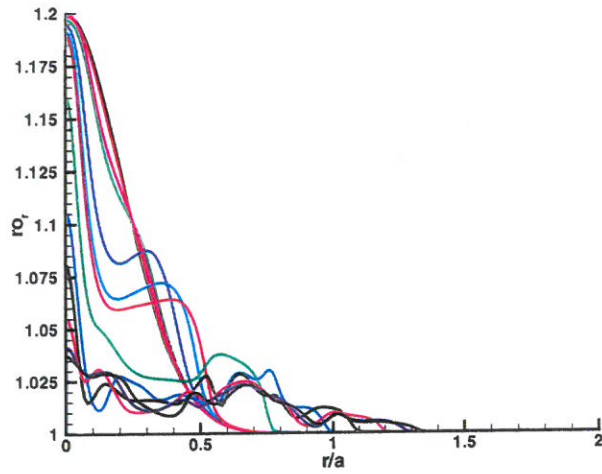


FIG. 25 - Variation de la densité moyenne selon r , au cours du temps

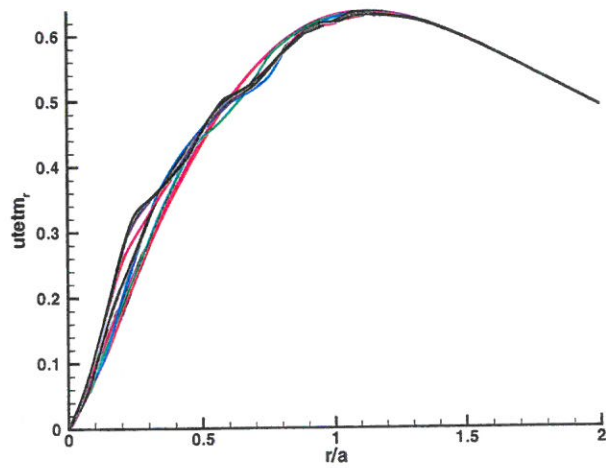


FIG. 26 - Variation de la vitesse angulaire selon r , pour $0 < t < 34$

SANS MENTION
DE PROTECTION

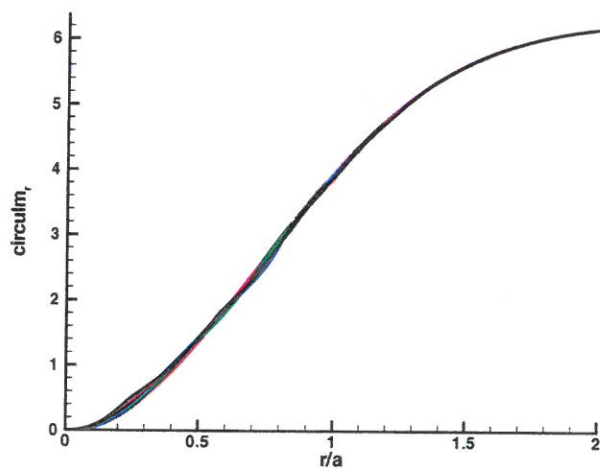


FIG. 27 – Evolution de la circulation selon r au cours du temps

5.6.2 Comparaison des résultats en perturbant la solution initiale à 0.2% et à 2%

Nous comparons maintenant les résultats obtenus en superposant deux perturbations d'amplitude différente, 2% et 0.2% à la solution initiale.

La figure (28) représente la fluctuation de densité en $z = 0$ et $x = 0.289$ pour les deux perturbations imposées. On retrouve qu'entre deux passages la période vaut : $T_{DNS} = 3.1339 - 0.94 = 2.1939$. On retrouve également sur cette figure la croissance exponentielle des perturbations à chaque passage. On a ensuite entre le deuxième et le troisième extremum la valeur : $T_{DNS} = 5.406 - 3.1339 = 2.2721$. De même pour les deux suivants : $T_{DNS} = 7.5216 - 5.406 = 2.1156$. Seule les amplitudes différentes et une saturation plus rapide de l'écoulement le plus perturbé différencient les courbes obtenues. La figure (29) présente ainsi les deux signaux mais en ayant décalé le plus faible en amplitude de $\Delta t = -9$. On peut ainsi observer que l'on passe continûment d'un signal à l'autre à $t = 0$. Ceci s'explique par le fait qu'on applique une perturbation qui n'a pas la même amplitude mais qui a la même phase. Ce type de courbe, [14] caractérise une saturation du mode après une croissance linéaire, visible à travers l'enveloppe globale du signal.

La figure (30) représente l'évolution de la perturbation en densité au carré, en fonction du temps, sur une échelle logarithmique, pour $\Delta\rho' = 0.2\%$ et $\Delta\rho' = 2\%$. Le signal correspondant à $\Delta\rho' = 0.2\%$ a de même été décalé de $\Delta t = -9$. On peut observer le passage d'une courbe à une autre avec la même pente en $2\sigma = 0.4084$ autour de $t = 0$. Le signal initialement de plus faible amplitude rejoint ensuite la courbe caractérisée par $\Delta\rho' = 2\%$. A partir de $t = 7$, on observe également la saturation du mode, avant la décroissance lente des fluctuations.

En revanche, la courbe pour laquelle les perturbations sont de 0.2% pour $t \ll 0$, n'a pas exactement la bonne pente mais il est probable que ceci soit dû aux erreurs de discrétisation.

Les figures (31) et (32) et (33) représentent les fluctuations de vorticité sur la boîte de calcul à différents instants pour une perturbation initiale de 0.2%. On peut observer, en les comparant aux champs obtenus pour une perturbation de 2% que la phase linéaire est plus longue. Comme cela a d j a été mis en évidence sur les précédentes courbes, la structure du champ pour $t = 21.938$ figure (32) est plus proche de la structure du champ figure (16) correspondant à $t = 14.88$, que celle du champ figure (19) correspondant à $t = 21.938$. Ceci reste vrai au cours du temps, si l'on observe par exemple la figure (33)   $t = 26$. D'un point de vue global, la dynamique reste identique à ce qui a été observé avec une plus forte amplitude de perturbation. On peut notamment encore le voir en comparant la figure (34)   la figure (18).

5.6.3 Sensibilité des résultats au maillage

Un calcul a été réalisé avec $281 \times 8 \times 281$ points, pour tester la sensibilité des résultats au maillage. Le pas d'espace initial, dans la zone où les points sont équidistants, vaut $\Delta x = 0.025$. Les points sont équidistants sur une longueur de $3a$ puis la distribution est en tangente hyperbolique. Le pas d'espace initial vaut $d_i = 0.025$ et le pas d'espace final vaut $d_f = 0.214$. Le domaine de calcul ainsi obtenu est représenté sur la figure (35). Il y a ainsi 12 points sur la plus petite distance du problème b .

Une perturbation $m = 3$ d'amplitude de 0.2% est superposée au champ initial.

SANS MENTION
DE PROTECTION

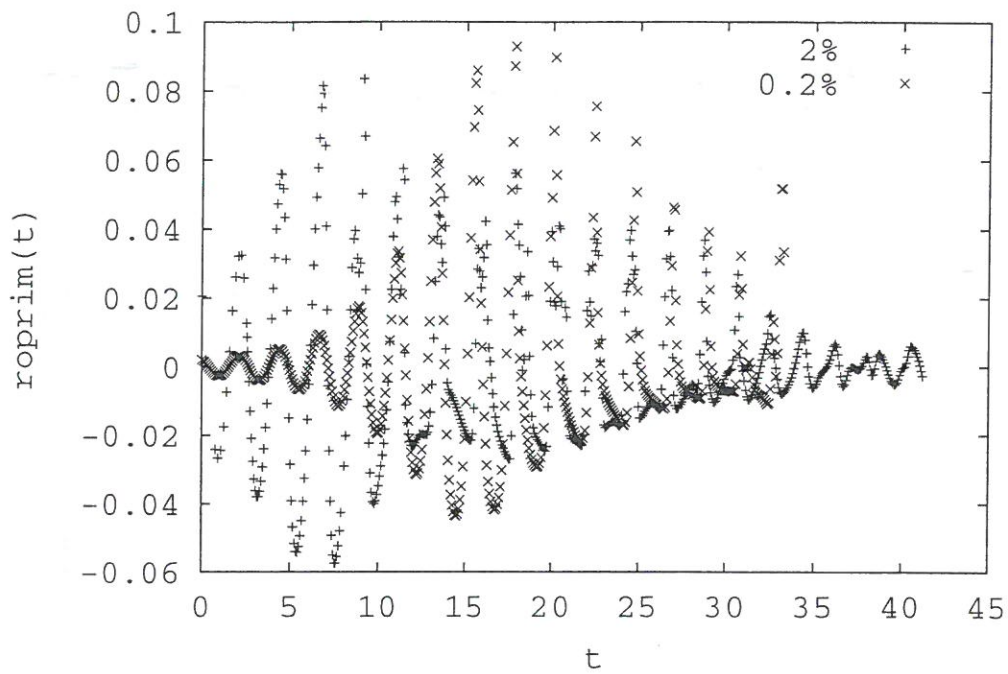


FIG. 28 – Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte en fonction du temps, en $z=0$ et $x = 0.289$, \times : 2%; $+$: 0.2%;

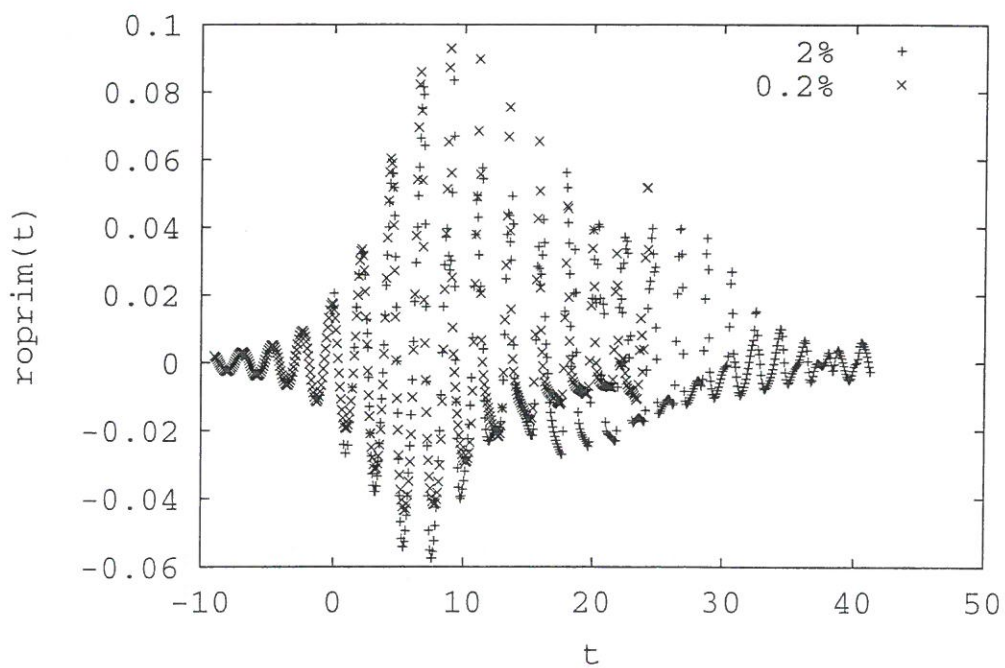


FIG. 29 – Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte en fonction du temps, en $z=0$ et $x = 0.289$

SANS MENTION
DE PROTECTION

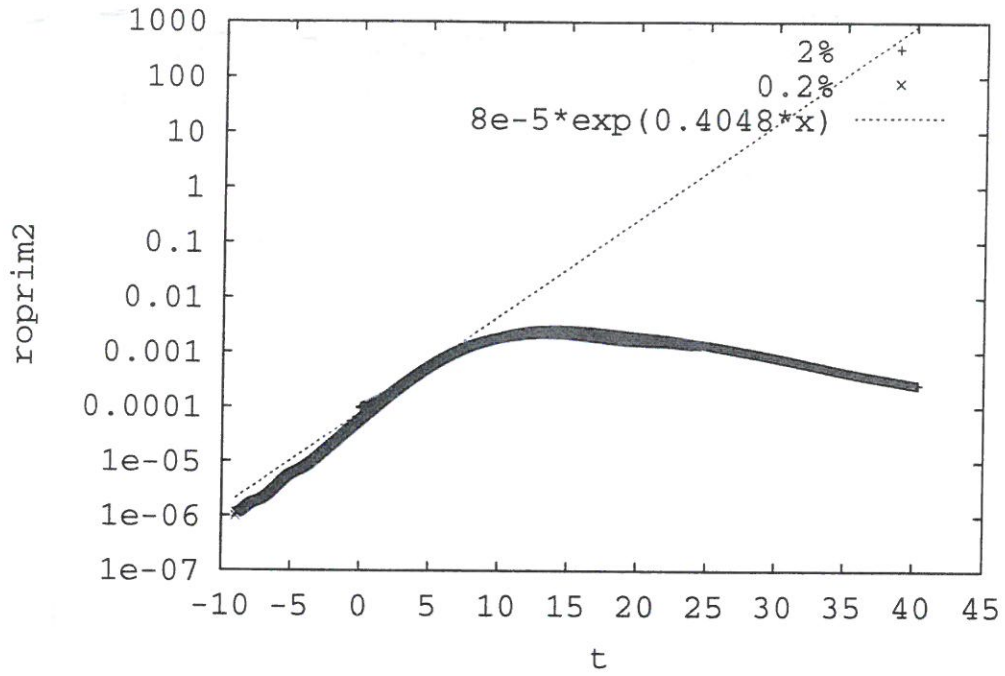


FIG. 30 – Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte

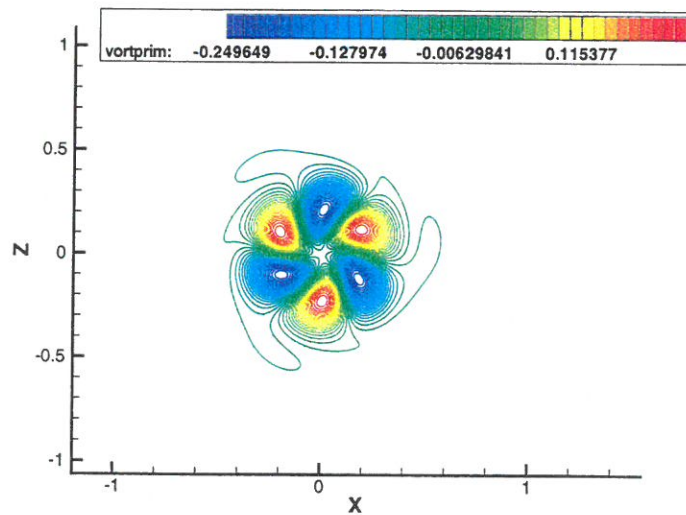


FIG. 31 – Perturbations en vorticité à $t = 7.835$

SANS MENTION
DE PROTECTION

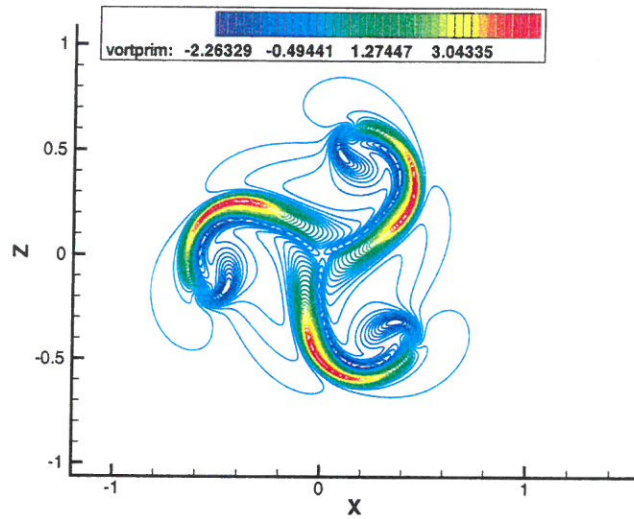


FIG. 32 - *Perturbations en vorticité à $t = 21.938$*

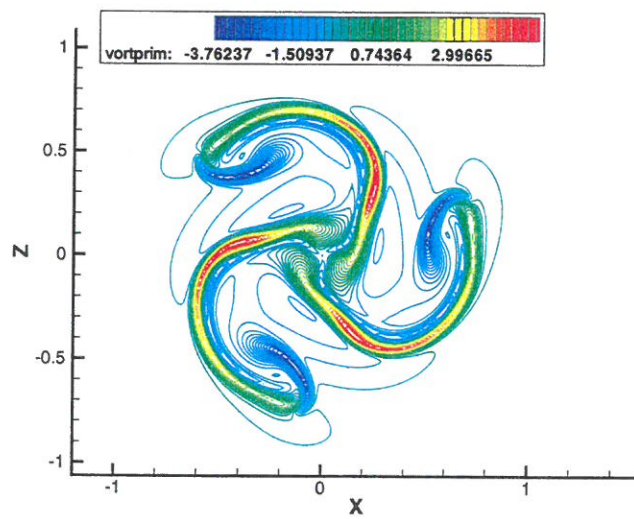


FIG. 33 - *Perturbations en vorticité à $t = 26$*

SANS MENTION
DE PROTECTION

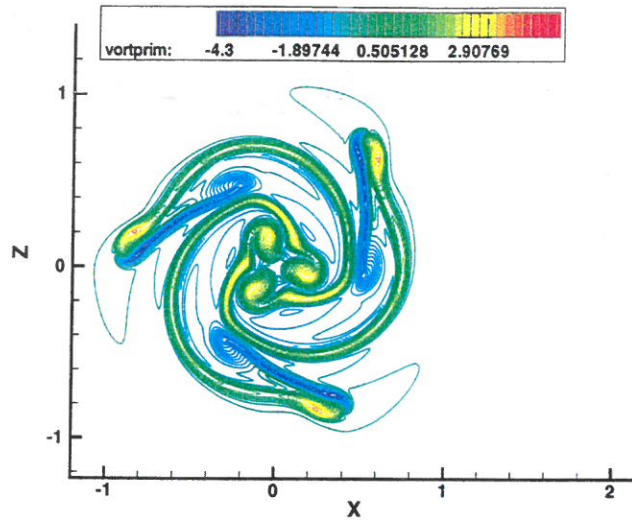


FIG. 34 – Perturbations en vorticité à $t = 31.4$

Les résultats obtenus sur la fluctuation de densité en $x = 0.289$ au cours du temps sont comparés aux résultats obtenus sur le maillage 681×681 , figure (36). On observe un très bon accord entre les deux courbes.

La figure (37) représente la fluctuation de la densité au carré selon le temps sur une échelle logarithmique calculée sur les deux maillages pour une même perturbation. A nouveau les résultats sont présentés avec un décalage en temps de $\Delta t = -9$ pour pouvoir les comparer au calcul perturbé à 2%. On peut observer une légère fluctuation du signal sur le maillage le plus grossier pour $t < 0$. Tant que les perturbations sont faibles, elles sont moins bien évaluées sur le maillage 281×281 . Ensuite leur intensité devient supérieure aux erreurs de discrétisation et l'on retrouve les mêmes résultats que sur le maillage 681×681 . Les courbes se superposent autour de $t = 0$. La figure (38) présente la fluctuation de la densité au carré selon le temps sur une échelle logarithmique pour les trois calculs. On observe une décroissance légèrement plus rapide des perturbations initialisées à 0.2% qu'à 2%.

Enfin la figure (39) représente le champ des fluctuations de vorticité à $t = 31.4$ et l'on observe la même dynamique que sur le maillage raffiné, même si le signal est légèrement plus bruité que sur la figure (34).

SANS MENTION
DE PROTECTION

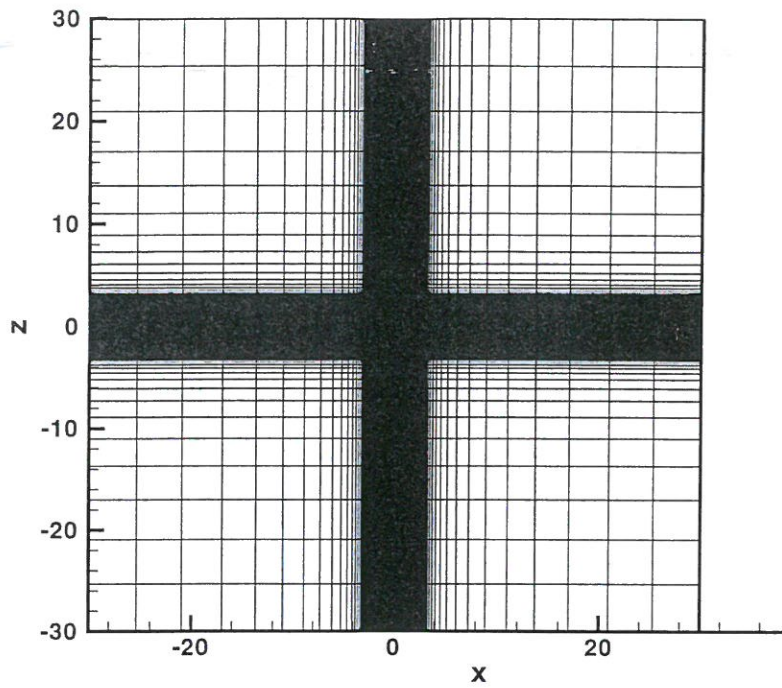


FIG. 35 - nouveau maillage dans un plan (x,z)

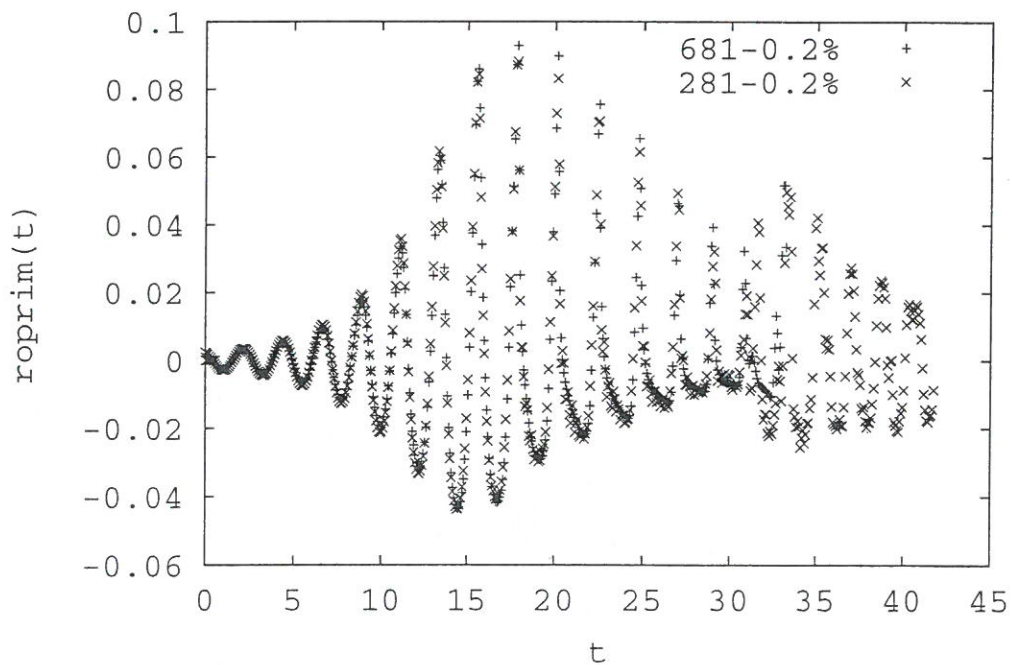


FIG. 36 - Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte en fonction du temps, en $z=0$ et $x = 0.289$, \times : 2%; $+$: 0.2%;

SANS MENTION
DE PROTECTION

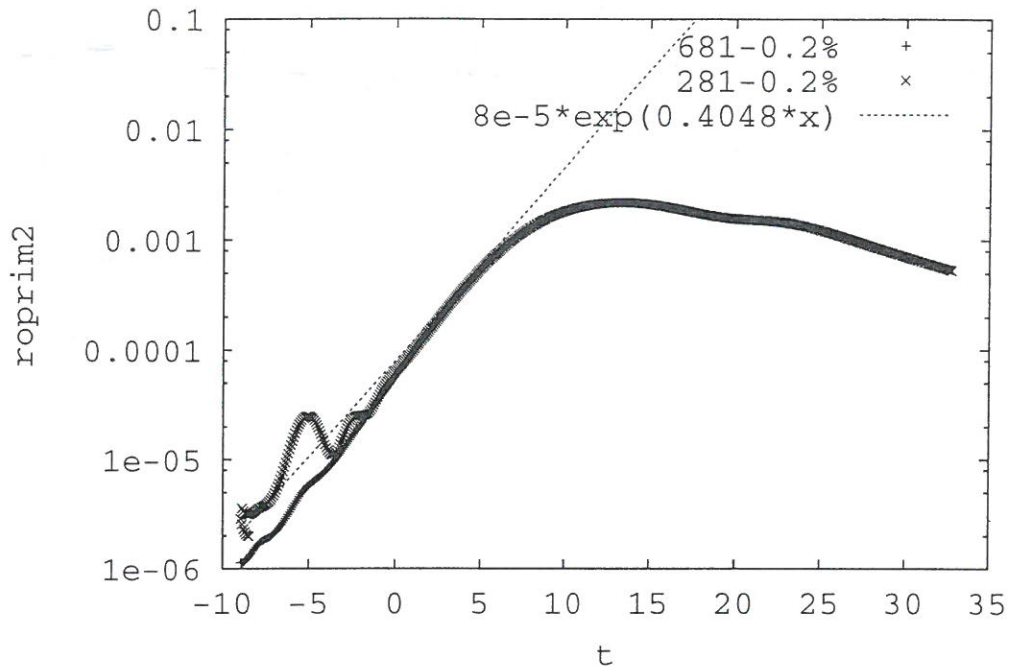


FIG. 37 - Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte

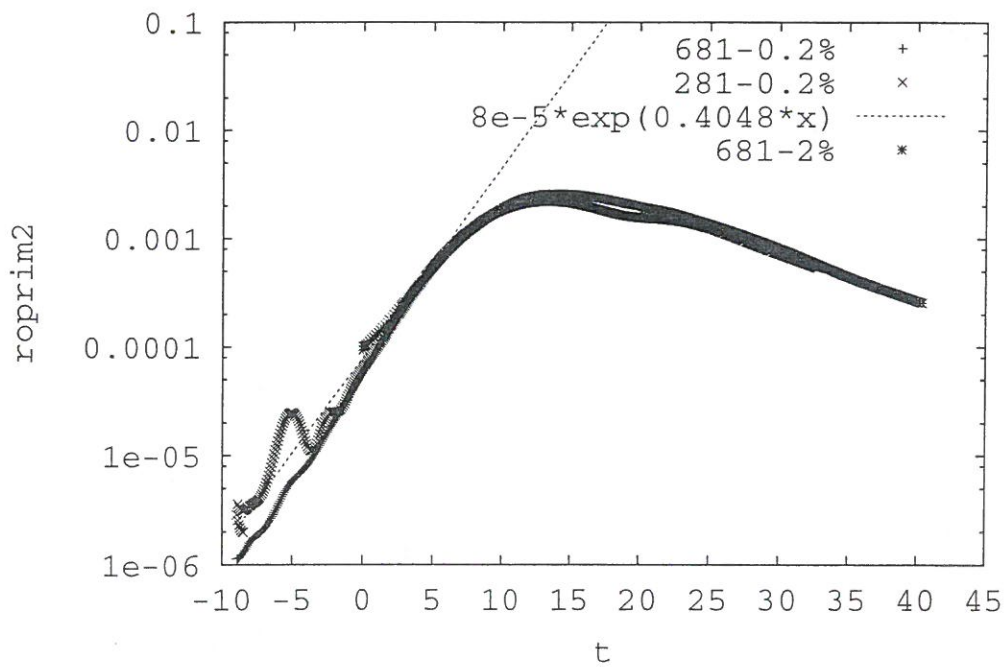


FIG. 38 - Fluctuation en densité moyennée sur la totalité de la boîte

SANS MENTION
DE PROTECTION

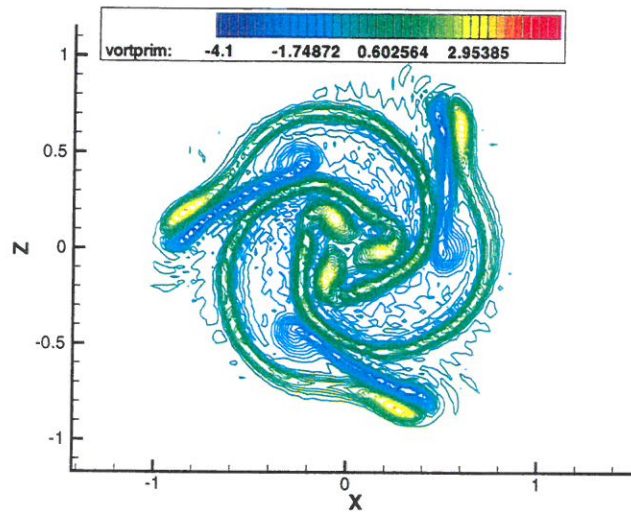


FIG. 39 – Perturbations en vorticité sur le maillage 281 à $t = 31.4$

6 Conclusion

La simulation directe 2D d'un tourbillon compressible a été entreprise pour analyser la structure et la croissance des instabilités pouvant se développer en son cœur, les résultats étant comparés à ceux de la stabilité linéaire.

La simulation a été réalisée avec un code d'une grande précision, utilisant un schéma compact d'ordre six en espace et un schéma d'ordre trois en temps. Après une rapide présentation des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, les méthodes de résolution numériques ont été présentées avec les conditions aux limites associées. Nous avons également détaillé l'obtention des quantités moyennes et fluctuantes. L'initialisation du calcul par le profil du tourbillon de Lamb-Oseen auquel on a superposé un mode instable $m = 3$ a également été présentée avant de décrire le domaine de calcul.

Les résultats montrent, d'un point de vue global, que l'instabilité croît au cours du temps et au détriment du champ de base, avant de saturer, d'autant plus rapidement que les perturbations initiales sont importantes. Le taux de croissance calculé numériquement dans la phase linéaire de croissance des perturbations est, d'autre part, en très bon accord avec la valeur théorique prédite par la théorie de la stabilité linéaire. Nous avons également montré que les résultats, aux temps longs, étaient stables vis à vis du niveau initial de perturbations, et du maillage utilisé dans la simulation.

Dans la phase non linéaire du calcul, on peut observer plusieurs étapes. Les filaments de vorticité sont expulsés du cœur par la force centrifuge, puis ils sont étirés dans le champ azimutal de vitesse du Lamb Oseen. Les bras les plus extérieurs sont à nouveau expulsés radialement un peu plus loin puis étirés à nouveau et ainsi de suite. On obtient au final une structure assez complexe des instabilités secondaires au cœur du tourbillon, structure qui semble néanmoins garder la symétrie initiale $m = 3$ du mode injecté.

Ce travail doit se poursuivre par la simulation numérique directe d'un tourbillon de Lamb Oseen refroidi au centre en 3D pour analyser les interactions et la structure tridimensionnelle des modes étudiés en 2D. Il s'agit de déterminer si de telles perturbations peuvent entraîner une dissipation rapide du tourbillon de Lamb Oseen par destruction de la structure du cœur grâce à la présence des instabilités.

A plus long terme, une étude d'un tourbillon chauffé annulairement est également envisagée. Elle correspond physiquement à la phase d'enroulement des jets des moteurs de l'avion autour du tourbillon. D'autres études ont montré une interaction forte entre les jets et le cœur, [12], et cela pourrait constituer un autre moyen pour contrôler l'évolution des tourbillons de sillage derrière l'avion, bien avant l'apparition des instabilités coopératives de Crow.

A Annexe : Opérations en coordonnées cylindriques

A.1 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

La transformation de la dérivée particulaire d'une fonction scalaire $f(r, \theta, y, t)$ des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques s'écrit [5] :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial f}{\partial y}$$

Gradient

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial y} e_y$$

Divergence

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Laplacien

$$\Delta f = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} f) = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Laplacien d'un vecteur

$$\Delta \underline{u} = \Delta_r \underline{u} e_r + \Delta_\theta \underline{u} e_\theta + \Delta_y \underline{u} e_y$$

$$\Delta_r \underline{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}$$

$$\Delta_\theta \underline{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial y^2}$$

$$\Delta_y \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_y) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}$$

et

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial y} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^S = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r} \right) \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \right) \\ & & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

et

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{A}})_y = \frac{\partial A_{yr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{y\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{A_{yr}}{r}$$

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{A}})_r = \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{ry}}{\partial y} + \frac{(A_{rr} - A_{\theta\theta})}{r}$$

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{A}})_\theta = \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta y}}{\partial y} + \frac{2 A_{r\theta}}{r}$$

A.2 Equations d'Euler en coordonnées cylindriques

Les équations d'Euler peuvent s'écrire à l'aide de l'opérateur divergence $\underline{\nabla}$. et de l'opérateur gradient $\underline{\nabla}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \underline{\nabla} p &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot ((\rho E + p) \underline{u}) &= 0\end{aligned}$$

Lorsqu'on développe on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{\rho u_r}{r} \\ \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_y u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_y u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_y u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\rho u_y u_r}{r} \\ \frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_r u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_r u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\rho (u_\theta u_\theta - u_r u_r)}{r} \\ \frac{\partial \rho u_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\theta u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u_\theta u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u_\theta u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -2 \frac{\rho u_r u_\theta}{r} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_y}{\partial y} + \frac{\partial (\rho E + p) u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho E + p) u_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{(\rho E + p) u_r}{r}\end{aligned}$$

On donne l'équation équivalente en température dont l'obtention est détaillée dans le paragraphe ci dessous :

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

A.3 Equation de la température obtenue à partir de l'équation de l'énergie dans les équations d'Euler

On donne ici le calcul détaillé pour obtenir l'équation de l'énergie totale équivalente en température.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u_\theta^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u_r^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_v T u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_v T u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_v T u_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_r}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{\partial p u_y}{\partial y} + \frac{\partial p u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + \frac{\rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_r}{2r} &= 0\end{aligned}$$

SANS MENTION
DE PROTECTION

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(-u_y \frac{\partial \rho u_y u_r}{\partial r} - \frac{u_y}{r} \frac{\partial \rho u_y u_\theta}{\partial \theta} - u_y \frac{\partial \rho u_y u_y}{\partial y} - u_y \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho u_y^2 u_r}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} \\
 & + \frac{1}{2} \left(-u_\theta \frac{\partial \rho u_\theta u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho u_\theta u_\theta}{\partial \theta} - u_\theta \frac{\partial \rho u_\theta u_y}{\partial y} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2 \frac{\rho u_r u_\theta^2}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \\
 & + \frac{1}{2} \left(-u_r \frac{\partial \rho u_r u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \frac{\partial \rho u_r u_\theta}{\partial \theta} - u_r \frac{\partial \rho u_r u_y}{\partial y} - u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho (u_\theta^2 u_r - u_r^3)}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{p u_r}{r} \\
 & + \frac{\partial \rho c_v T u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_v T u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_v T u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_r}{\partial r} \\
 & + \frac{1}{2r} \frac{\partial \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + \frac{\rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_r}{2r} + \frac{\partial p u_y}{\partial y} + \frac{\partial p u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p u_\theta}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} - \frac{\rho u_y^2 u_r}{2r} + \frac{1}{2} \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\rho u_r u_\theta^2}{r} + \frac{1}{2} \rho u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{\rho (u_\theta^2 u_r - u_r^3)}{2r} \\
 & + \frac{1}{2} \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_v T u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_v T u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_v T u_\theta}{\partial \theta} + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + \frac{\rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_y^2) u_r}{2r} + \frac{1}{2} \left(\rho u_r u_y \frac{\partial u_r}{\partial y} + \rho u_\theta u_y \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \rho u_y u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\rho u_r u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_\theta u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \rho u_r u_y \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\rho u_\theta u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho u_\theta u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho u_\theta u_y}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{p u_r}{r} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_v T u_y}{\partial y} \\
 & + \frac{\partial \rho c_v T u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_v T u_\theta}{\partial \theta} + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\rho u_r u_y \frac{\partial u_r}{\partial y} + \rho u_\theta u_y \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \rho u_y u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\rho u_r u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho u_\theta u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \rho u_r u_y \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\rho u_\theta u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho u_\theta u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho u_\theta u_y}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{p u_r}{r} = 0
 \end{aligned}$$

En remplaçant alors $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ par leurs expression on arrive à la formule :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_v T u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_v T u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_v T u_\theta}{\partial \theta} + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + \frac{p u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2} \left(u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \\ & \frac{u_\theta^2 u_r}{2r} - \frac{u_\theta^2 u_r}{2r} = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - c_v T \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - c_v T \frac{\partial \rho u_r}{\partial r} - \frac{c_v T}{r} \frac{\partial \rho u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\rho c_v T u_r}{r} \\ & + \text{div}(\rho c_v T) + \frac{\rho c_v T u_r}{r} + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Soit au final :

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

A.4 Equations d'Euler sans dimension

Les équations sont rendues sans dimension pour réaliser l'étude de stabilité linéaire en non visqueux.

On note respectivement ρ_∞ , p_∞ , T_∞ et c_∞ , la densité, la pression, la température et la vitesse du son de référence. Ces quantités correspondent à un écoulement uniforme non perturbé. En particulier on a $c_\infty = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}$.

On note L_{ref} la longueur de référence (qui sera en fait le rayon visqueux du tourbillon a). Le nombre de Mach sera noté $\varepsilon = \frac{U_{ref}}{c_\infty}$.

L'échelle de temps utilisée n'est pas basée sur la vitesse du son mais sur la vitesse convective. Si on travaillait sur une autre échelle de temps, les phénomènes observés seraient très différents. Ainsi, $t_{ref} = \frac{L_{ref}}{c_\infty \varepsilon}$.

On obtient ainsi en coordonnées cylindriques :

SANS MENTION
DE PROTECTION

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_\infty c_\infty}{L_{ref}} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_\theta}{\partial \bar{\theta}} \right) &= - \frac{\rho_\infty c_\infty}{L_{ref}} \frac{\bar{\rho} \bar{u}_r}{\bar{r}} \\
 \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_y \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_y \bar{u}_\theta}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_y \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \frac{\bar{\rho} \bar{u}_y \bar{u}_r}{\bar{r}} \\
 \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_r}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_r \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_r \bar{u}_\theta}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_r \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) &= \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \frac{\bar{\rho} (\bar{u}_\theta^2 - \bar{u}_r^2)}{\bar{r}} \\
 \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_\theta}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_\theta \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_\theta \bar{u}_\theta}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_\theta \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\gamma \bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) &= -2 \frac{\rho_\infty c_\infty^2}{L_{ref}} \frac{\bar{\rho} \bar{u}_r \bar{u}_\theta}{\bar{r}} \\
 \frac{r \rho_\infty T_\infty c_\infty}{L_{ref}} \left(\frac{1}{(\gamma - 1)} \bar{\rho} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_\theta}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \right. \\
 \left. + \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r} \bar{u}_r)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \bar{\theta}} \right) \right) &= 0
 \end{aligned}$$

On peut réécrire les équations sous la forme non conservative, en enlevant les barres au dessus des variables pour ne pas les confondre avec les variables moyennées :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= 0 \\
 \rho \left(\varepsilon \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_y}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
 \rho \left(\varepsilon \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial u_r}{\partial y} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\
 \rho \left(\varepsilon \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \\
 \frac{1}{(\gamma - 1)} \rho \left(\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

SANS MENTION
DE PROTECTION

A.5 Relations entre la DNS, le code de stabilité non visqueux et le code de stabilité KANACOMP

A.5.1 Expression des caractéristiques physiques du tourbillon de Lamb Oseen incompressible sans dimension dans l'étude de stabilité non visqueuse

Nous rappelons ici les équations de Navier Stokes satisfaites par une distribution tourbillonnaire purement azimutale pour définir les quantités nécessaires à la description des tourbillons. En toute généralité, un tourbillon axisymétrique se caractérise par une loi de vitesse azimutale $U_{\theta_0}(r)$ et par une loi de vitesse axiale $U_{y(r)_0}$. Si on note U_o la vitesse de croisière de l'avion, on peut décomposer $U_{y(r)_0} = U_o + U_{y1_0}$. Un tourbillon axisymétrique vérifie les équations de Navier Stokes :

$$\begin{aligned}\frac{U_{\theta_0}^2}{r} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ \frac{\partial U_{\theta_0}}{\partial t} &= \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r U_{\theta_0}}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial U_{y1_0}}{\partial t} &= \left(-\frac{1}{U_o} \frac{\partial p_0}{\partial t} \right) + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_{y1_0}}{\partial r} \right)\end{aligned}$$

Il faut souligner qu'un couple de fonctions $U_{\theta_0}(r)$ et $U_{y1_0}(r)$ arbitraires définit toujours une solution stationnaire des équations incompressibles d'Euler bidimensionnelles. Par contre, du fait des conditions aux limites $\lim_{r \rightarrow \infty} (2\pi r U_{\theta_0}(r)) = \Gamma$, il n'existe pas de solution stationnaire des équations de Navier Stokes bidimensionnelles.

Le modèle de tourbillon axisymétrique de Lamb Oseen sans vitesse axiale, est solution des équations d'Euler (avec un rayon visqueux a constant) mais présente de plus la particularité d'être une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes instationnaires bidimensionnelles pour $a^2(t) = a_0^2 + \frac{4\mu t}{\rho}$.

En utilisant les quantités de référence de l'étude de stabilité non visqueuse (cf paragraphe B.3) et en prenant un champ de densité constant par exemple, les champs initiaux s'écrivent sans dimension:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\theta_0} &= \frac{1}{\bar{r}} [1 - e^{(-\bar{r}^2)}] \\ \bar{p}_0 &= 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - e^{-\eta})^2}{\eta} + 2ei(\eta) - 2ei(2\eta) \right] \quad \eta = \frac{r^2}{a^2}\end{aligned}$$

A.5.2 Correspondance entre les quantités de référence

Les correspondances entre les quantités utilisées dans la DNS et dans la stabilité linéaire sont présentées sous forme de tableau. On rappelle que $C_2 = 1.567$. On a également exprimé les grandeurs réelles importantes en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Mach et des grandeurs à l'infini :

SANS MENTION
DE PROTECTION

Paramètres de référence	DNS	Stabilité non visqueuse	Stabilité générale
Longueur	$L_{ref} = a$	$L'_{ref} = a$	$L''_{ref} = a$
Vitesse	$U_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi C_2 a}$	$U'_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi a}$	$U''_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi a}$
Circulation	$C_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi C_2}$	$C'_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi}$	$C''_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi}$
Nombre de Mach	$\varepsilon = \frac{\Gamma}{2 \pi C_2 a c_\infty}$	$\varepsilon' = \frac{\Gamma}{2 \pi a c_\infty}$	$\varepsilon'' = \frac{\Gamma}{2 \pi a c_\infty}$
Temps (convectif)	$t_{ref} = \frac{2 \pi C_2 a^2}{\Gamma}$	$t'_{ref} = \frac{2 \pi a^2}{\Gamma}$	$t''_{ref} = \frac{2 \pi a^2}{\Gamma}$
Fréquence	$\omega_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi C_2 a^2}$	$\omega'_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi a^2}$	$\omega''_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi a^2}$
Pression	$p_{ref} = \rho_\infty \left(\frac{\Gamma}{2 \pi C_2 a} \right)^2$	$p'_{ref} = p_\infty$	$p''_{ref} = p_\infty$
Densité	$\rho_{ref} = \rho_\infty$	$\rho'_{ref} = \rho_\infty$	$\rho''_{ref} = \rho_\infty$
Température	$T_{ref} = T_\infty$	$T'_{ref} = T_\infty$	$T''_{ref} = T_\infty$
Viscosité	$\mu_{ref} = \mu_\infty$	$\mu'_{ref} = \mu_\infty$	$\mu''_{ref} = \mu_\infty$
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{\rho_\infty \Gamma}{2 \pi C_2 \mu_\infty}$	∞	$Re = \frac{\rho_\infty \Gamma}{2 \pi \mu_\infty}$

TAB. 1 – Correspondance entre les quantités de référence

SANS MENTION
DE PROTECTION

Grandeurs	Relations
Longueur	$\bar{r} = \bar{r}' = \bar{r}''$
Vitesse	$\frac{\bar{U}}{C_2} = \bar{U}' = \bar{U}''$
Circulation	$\frac{\bar{C}}{C_2} = \bar{C}' = \bar{C}''$
Nombre de Mach	$C_2 \varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$
Temps (convectif)	$C_2 \bar{t} = \bar{t}' = \bar{t}''$
Fréquence	$\frac{\bar{\omega}}{C_2} = \bar{\omega}' = \bar{\omega}''$
Pression	$\gamma \varepsilon^2 \bar{p} = \bar{p}' = \bar{p}''$
Densité	$\bar{\rho} = \bar{\rho}' = \bar{\rho}''$
Température	$\bar{T} = \bar{T}' = \bar{T}''$
Viscosité	$\bar{\mu} = \bar{\mu}' = \bar{\mu}''$
Nombre de Reynolds	$C_2 Re = Re'$

TAB. 2 – Relations entre grandeurs adimensionnelles

SANS MENTION
DE PROTECTION

Paramètres de référence	DNS	Stabilité non visqueuse	Stabilité générale
Longueur $r =$	$\frac{\mu_{\infty}}{\gamma p_{\infty}} \frac{Re}{\varepsilon} \bar{r}$	$\frac{\Gamma}{2 \pi c_{\infty}} \frac{1}{\varepsilon'} \bar{r}'$	$\frac{\mu_{\infty}}{\gamma p_{\infty}} \frac{Re''}{\varepsilon''} \bar{r}''$
Vitesse $U =$	$c_{\infty} \varepsilon \bar{U}$	$c_{\infty} \varepsilon' \bar{U}'$	$c_{\infty} \varepsilon'' \bar{U}''$
Circulation $\mathcal{C} =$	$a c_{\infty} \varepsilon \bar{U}$	$a c_{\infty} \varepsilon' \bar{U}'$	$a c_{\infty} \varepsilon'' \bar{U}''$
Temps $t =$	$\frac{\mu_{\infty}}{\gamma p_{\infty} c_{\infty}} \frac{Re}{\varepsilon^2} \bar{t}$	$\frac{\Gamma}{2 \pi c_{\infty}^2} \frac{1}{\varepsilon'^2} \bar{t}'$	$\frac{\mu_{\infty}}{\gamma p_{\infty} c_{\infty}} \frac{Re''}{\varepsilon''^2} \bar{t}''$
Fréquence $\omega =$	$\frac{\gamma p_{\infty} c_{\infty}}{\mu_{\infty}} \frac{\varepsilon^2}{Re} \bar{\omega}$	$\frac{2 \pi c_{\infty}}{\Gamma} \varepsilon'^2 \bar{\omega}'$	$\frac{\gamma p_{\infty} c_{\infty}}{\mu_{\infty}} \frac{\varepsilon''^2}{Re''} \bar{\omega}''$
Pression $p =$	$\rho_{\infty} c_{\infty}^2 \varepsilon^2 \bar{p}$	$p_{\infty} \bar{p}'$	$p_{\infty} \bar{p}''$
Densité $\rho =$	$\rho_{\infty} \bar{\rho}$	$\rho_{\infty} \bar{\rho}'$	$\rho_{\infty} \bar{\rho}''$
Température $T =$	$T_{\infty} \bar{T}$	$T_{\infty} \bar{T}'$	$T_{\infty} \bar{T}''$
Viscosité $\mu =$	$\mu_{\infty} \bar{\mu}$	$\mu_{\infty} \bar{\mu}'$	$\mu_{\infty} \bar{\mu}''$
Relation GP $p = \rho r T$	$\gamma \varepsilon^2 \bar{p} = \bar{\rho} \bar{T}$	0	$\bar{p}'' = \bar{\rho}'' \bar{T}''$

TAB. 3 – *Grandeurs réelles*

Références

- [1] S. Arendt, D. C. Fritts, and O. Andreassen. The initial value problem for kelvin vortex waves. *J. Fluid Mech.*, 344:181–212, 1997.
- [2] G. K. Batchelor. Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, 20(4):645–658, 1964.
- [3] P. Billant, P. Brancher, and J. M. Chomaz. Three-dimensional stability of a vortex pair. *Physics of fluids*, 11(8):2069–2077, 1999.
- [4] G. A. Blaisdell, E. T. Spyropoulos, and J. H. Qin. The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods. *Applied Numerical mathematics*, 21:207–219, 1996.
- * [5] Jean Coirier. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1997. **(Annexe)**
- [6] Fabien Coppens. *Simulations numériques sur le développement de la turbulence dans un tourbillon*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Toulouse, 1998.
- [7] L. Coquart. Simulation numérique de l'écoulement dans une tuyère T. O. C. à choc interne, sans film de refroidissement, testée dans la soufflerie R2Ch de l'ONERA. Technical report, LIMSI-CNRS, 2003-08, 2003.
- [8] S. Crow. Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA Journal*, 8:2172–2179, 1970.
- [9] C. Eloy and S. Le Dizès. Instability of the burgers and the lamb-oseen vortices in a strain field. *J. Fluid Mech.*, 378:145–166, 1999.
- [10] David Fabre. *Instabilités et instationnarités dans les tourbillons: application aux sillages d'avions*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2002.
- [11] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles; ii.- méthode des vitesses moyennes, méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique. *Journal de Mécanique*, 4, 1965.
- [12] C. Ferreira Gago, S. Brunet, and F. Garnier. Numerical investigation of turbulent mixing in a jet/wake vortex interaction. *AIAA Journal*, 40(2):276–284, 2002.
- [13] C. Ferreira Gago, F. Garnier, and F. Utheza. Large eddy simulation of a hot round jet: assessment of subgrid scale modeling. In *Advances in Turbulence, Proceedings of the Ninth European Turbulence Conference, Southampton UK*, 2002.
- [14] Laurent Graftiaux. *Etude expérimentale de l'instabilité d'un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [15] L. Jacquin and C. Pantano. On the persistence of trailing vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 471:159–168, 2002.
- [16] S. Lele. Compact finite differences schemes with spectral resolution. *Journal of computational physics*, 103:16–42, 1992.
- [17] S. K. Lele. Direct numerical simulation of compressible free shear flows. *AIAA Paper 89 0374*, 1989.
- [18] Manuel Lombardini. Analyse des effets thermiques sur la stabilité des tourbillons de sillage d'avion. Technical report, Ecole Polytechnique, 2003.
- [19] Sébastien Michelin. Etude des effets thermiques sur la stabilité des tourbillons de sillage d'avion de transport. Rapport de stage de l'école polytechnique, 2002.

- [20] P. Moin and K. Mahesh. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 539–578, 1998.
- [21] T. J. Poinso and S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129, 1992.
- [22] D. Sipp, F. Coppens, and L. Jacquin. Theoretical and numerical analysis of vortex wake and vortices. In *Proceedings, 3rd Int. Workshop on vortex flows and related numerical methods, Toulouse*. ESAIM, 1998.
- [23] D. Sipp, L. Jacquin, and C. Cossu. Self-adaptation and viscous selection in concentrated 2d vortex dipoles. *Physics of fluids*, 12(2), 2000.
- [24] D. Sipp, E. Lauga, and L. Jacquin. Vortices in rotating systems: centrifugal, elliptic and hyperbolic type instabilities. *Physics of fluids*, 11(12), 1999.
- [25] P. R. Spalart. Airplane trailing vortices. *Annu. Rev. Journal of Fluid Mechanics*, 30:107–138, 1998.
- [26] M. Sreedhar and S. Ragab. Large eddy simulation of longitudinal stationary vortices. *Physics of Fluids*, 6:2501–2514, 1994.
- [27] Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68:1–24, 1987.
- [28] C. Y. Tsai and S. E. Widnall. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.*, 73(4):721–733, 1976.
- [29] O. Zeman. The persistence of trailing vortices: A modeling study. *Physics of fluids*, 7(1), 1994.

- * [5] Timothy T. Clark. A numerical study of the statistics of a 2d mixing layer. *Physics of Fluids*, 15(8), 2003. (corps du texte)