



Rapport de stage de fin d'étude

Assimilation de données sur un modèle d'ondes de crues



Crédit photo : JL- Gironde, Mascaret, Saint-Pardon

Stage encadré par **Sophie Ricci (CERFACS)** et **Olivier Pannekoucke (CNRM-GAME)**

Master Ingenierie & Mathématiques A Toulouse

NINOVE Floriane

Avril, 2011 - Septembre, 2011

Table des matières

Resume	5
Abstract	6
Introduction	8
I Assimilation de données, Concepts, Méthodes et Applications	9
1 L'assimilation de données	10
1.1 Généralités	10
1.2 Méthode d'assimilation BLUE	11
1.3 Définition et Rôle de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche	12
1.3.1 Définition et caractéristiques	12
1.3.2 Difficultés de modélisation	13
1.3.3 Rôle de B	13
1.4 Diagnostic de la longueur de portée	16
1.5 Filtre de Kalman	17
1.5.1 Présentation et comparaison avec le BLUE	17
1.5.2 Principe	18
1.5.3 Propriétés du filtre de Kalman	19
1.6 Filtre de Kalman d'ensemble	19
II Présentation du contexte physique et mathématiques	21
2 Modèle d'onde de crue	22
2.1 Physique du problème	22
2.2 Schéma numérique de l'équation d'advection-diffusion	24
2.2.1 Schéma de discrétisation	24
2.2.2 Méthode d'Euler	25
2.2.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	28
2.2.4 Euler vs Runge-Kutta	29
3 Construction du forçage amont	32
3.1 Construction de la réponse impulsionnelle et fonction d'auto-covariance	32
3.1.1 Mise en évidence des coefficients de coloration Gaussienne.	32
3.1.2 Expression explicite à l'aide de la fonction d'auto-covariance.	33
3.2 Influence du temps caractéristique τ	34

4	Dynamique des covariances : évolution des longueurs de portée	36
4.1	Dynamique des covariances sans observations	36
4.1.1	Cas de l'advection pure	37
4.1.2	Cas de l'advection diffusion	38
4.1.3	Bilan de la dynamique des longueurs de portée sans assimilation	40
4.2	Dynamique des covariances avec observation	40
III	Système d'assimilation de données pour la dynamique du mo-	
	dèle	42
5	Méthode d'ensemble	43
5.1	Diagnostic de B et des longueurs de portée sans assimilation	43
5.1.1	Calcul de la matrice de covariances d'erreurs d'ébauche	44
5.1.2	Calcul des longueurs de portée	44
5.2	Résultats des expériences sans assimilation	45
5.3	Calibration des paramètres du modèle d'advection-diffusion	46
5.3.1	Choix du coefficient de diffusion.	46
5.3.2	Choix de la longueur de portée initiale minimale	48
5.3.3	Résultats pour le modèle avec advection et diffusion sans assimilation. . .	50
6	Estimation du tenseur local de diffusion et normalisation pour la modélisation	
	des opérateurs de corrélations hétérogènes issus de l'équation de diffusion	51
6.1	Modèle basé sur l'équation de diffusion homogène	51
6.1.1	Représentation formelle de l'opérateur de covariance issu d'un filtre dit diffusif	52
6.1.2	Formulation et normalisation	52
6.1.3	Opérateur de diffusion discret	53
6.2	Modèle basé sur l'équation de diffusion hétérogène	55
6.2.1	Tenseur de diffusion hétérogène	55
6.2.2	Discrétisation de l'équation non-homogène	56
6.2.3	Et en pratique	56
7	Système d'assimilation de données pour le modèle.	59
7.1	Présentation du système d'assimilation de données pour le modèle.	59
7.1.1	Schéma général	59
7.1.2	Le problème d'assimilation des lignes d'eau	60
7.2	L'implémentation du filtre de Kalman d'ensemble	61
7.2.1	Résultats d'une simulation du KF	62
7.2.2	Le Filtre de Kalman d'ensemble	62
7.2.3	Tests de sensibilité et résultats	63
7.2.4	EnKF, et après...	64
	Conclusion	66
A		67
A.1	Condition de stabilité du schéma numérique	67
A.2	Influence du schéma numérique	68
A.3	Discrétisation de l'équation de diffusion non-homogène	70

A.4	Methode d'Euler	71
A.5	Résultats d'une simulation du KF	72
A.6	Experience Jumelle	74

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le CERFACS¹ et l'équipe GLOBC² de m'avoir accueillie durant ces six mois et de m'avoir donné l'opportunité, à travers mon stage, de découvrir le domaine de la recherche scientifique à travers une étude très intéressante.

Je remercie tout particulièrement mes deux directeurs de stage, de m'avoir encadrée et conseillée tout au long de ce stage. Je suis très reconnaissante du temps qu'ils m'ont consacré.

Je remercie aussi toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de connaître et qui ont pu m'aider durant toute la durée de mon stage à ne pas perdre espoir.

Je remercie très spécialement mes collègues stagiaires qui m'ont aidé durant mon stage à résoudre tous les problèmes que j'ai rencontrés.

Enfin, je voudrais aussi remercier ma famille et mes amis, pour leur soutien inconditionnel.

¹Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calculs Scientifiques

²Global Change

Résumé

La prévision des crues demeure un domaine incontournable lorsque l'on parle de sécurité des biens et des personnes. La multiplication des sites à risques, à enjeux économiques et environnementaux (les centrales hydroélectriques ou nucléaires) ainsi que le développement de zones urbaines proches de zones inondables ne font que renforcer l'importance d'une bonne prévision. Des efforts dans le domaine de la modélisation et de l'observation permettent d'améliorer la prévision de la propagation d'une crue et d'en limiter les risques humains et technologiques. En France, c'est le Service Central d'Hydrométéorologie et d'Appui à la Prévision des Inondations (SCHAPI), rattaché au Ministère de l'Ecologie, du Développement Durable, des Transports et du Logement, en lien avec le Service de Prévision de crues (SPC) qui assure une surveillance des crues ³. Les enjeux sont également économiques. En effet, une prévision fiable de la hauteur d'eau permet une gestion optimale des ressources en eau notamment pour la production électrique par Électricité de France (EDF). Ce projet s'inscrit dans le cadre de la mise en œuvre de la prévision hydraulique en temps réel. Il s'agit ici de travailler sur l'assimilation des observations de hauteurs d'eau et de débits afin d'améliorer les prévisions.

Lors de l'implémentation d'un algorithme d'assimilation de données, il est important de bien modéliser la matrice de covariance des erreurs d'ébauche que l'on ne sait pas estimer exactement. En effet, ce sont les covariances d'erreurs d'ébauche qui déterminent l'amplitude et la forme de l'incrément d'analyse. A l'aide d'un modèle physique simple codé à partir de l'équation d'ondes de crues diffusantes on cherche à déterminer et à reproduire les caractéristiques de la matrice des erreurs de prévision. Deux méthodes l'une d'ensemble, la seconde basée sur l'opérateur généralisé de diffusion sont utilisées pour générer la matrice de covariance d'erreur d'ébauche lors de l'approche faite en assimilation. Enfin on comparera les résultats issus du filtre de Kalman et ceux du BLUE⁴

³<http://www.vigicrues.ecologie.gouv.fr/>

⁴Best Linear Unbiased Estimator

Abstract

River streamflow forecast is a challenging topic for the security of the persons and the infrastructures. Because of the increasing number of insecure sites, with economical and environmental issues (hydrological or nuclear) and the development of urban areas close to flood ones, a accurate forecasting is more and more important. Efforts on modeling and observation can improve the prediction of propagation of a flood wave and minimize human and technological risks. In France, the Service Central d'Hydrométéorologie et d'Appui à la Prévision des Inondations (SCHAPI) part of the Ministry of Ecology, Sustainable Development, Transports and Housing, in conjunction with the Service Prévision de Crues (SPC) provides a flood monitoring on the French territory.⁵ The issues are also economic. Indeed, a reliable prediction of the water depth allows for the optimal management of water resources in particular for electricity production by Electricité de France (EDF). Here the computing execution of the forecast hydraulic real time system is at stake. This study describes the assimilation of the river water level observations and the resulting improvement of the river flood forecast. The key point of the assimilation procedure is to model the forecast error covariances matrices that are not accurately estimated. Indeed, it is the background error covariance that determines the amplitude and the shape of the analysis increment. The characteristics of the forecast error matrix are determined and emulated thanks to a simple physical model representing the physics of the flood wave equation. To model the background covariances matrix for assimilation scheme one can use ensemble method or generalized diffusion operator method. A discussion is finally given about Kalman filter and BLUE⁶ results.

⁵<http://www.vigicrues.ecologie.gouv.fr/>.

⁶Best Linear Unbiased Estimator

Introduction

Depuis la fin des années 80, le CERFACS⁷ est un centre de recherche connu pour le calcul de haute performance, qui vise à développer des méthodes avancées de simulation numérique ainsi que les solutions algorithmiques qui ciblent les plus grands problèmes scientifiques et techniques abordés dans la recherche publique et industrielle. De plus le CERFACS est un noyau central d'activités orientées vers certains domaines d'applications tels que l'Aviation et l'Environnement, la Modélisation du climat et de son changement global, la Mécanique des fluides numérique, l'Electromagnétisme et acoustique et enfin l'Algorithmique numérique parallèle. L'ensemble de ces applications requièrent l'utilisation des moyens de calcul parmi les plus puissants. La prévision de phénomènes naturels complexes fait appel à une modélisation mathématique précise. Pour cela on est contraint d'émettre des hypothèses relatives à l'information disponible sur le système étudié. L'information découle généralement d'observations peu nombreuses, imprécises et des équations réduites, discrétisées de la physique. Ce système d'équations, le modèle d'onde de crues, propage l'état de l'écoulement dans le temps. Le modèle est par définition entaché d'erreur lors de sa représentation (approximation linéaire, discrétisation plus ou moins grossière). Par ailleurs, les observations, sujettes aux erreurs de mesure et de représentativité ne peuvent pas être directement utilisées dans le modèle numérique. L'algorithme d'assimilation doit donc tenir compte de l'erreur existante au sein de l'information provenant du modèle comme des observations. Les incertitudes sur les modèles numériques proviennent des conditions aux limites (état initial, forçages extérieurs), des simplifications et paramétrisations de la physique (paramètres numériques, géométriques, physiques) et ainsi que de la connaissance inexacte des variables nécessaires au modèle. Estimer l'état d'un système dynamique en associant des informations d'origines diverses, voilà le principal atout de l'assimilation de données. Cette technique appartient au domaine très vaste de l'estimation statistique et de la théorie du contrôle. En effet, en résolvant un problème inverse, l'algorithme d'assimilation de données combine les informations issues de l'observation et de la simulation pour estimer des paramètres du modèle ou corriger l'état initial. Ainsi l'assimilation de données permet de réduire l'incertitude sur la simulation et sur la prévision. Cette technique est communément utilisée en météorologie, océanographie, et tend à être utilisée dans d'autres domaines d'applications.

Dans le cadre de ce stage, on s'intéresse à l'apport de l'assimilation de données pour la modélisation de la dynamique d'un écoulement à surface libre, plus précisément à la modélisation des crues. Le Centre d'Etudes Techniques Maritimes et Fluviales (CETMEF) et le Laboratoire national d'Hydraulique et Environnement (LNHE, service R&D d'EDF) ont développé un code numérique visant à modéliser ces phénomènes hydrauliques : MASCARET. Ce code numérique 1D, basé sur les équations de Saint-Venant, est capable de représenter une large gamme de phénomènes hydrauliques (ondes de crues, ondes de marées, etc). Cette étude se place dans le

⁷Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique

TABLE DES MATIERES

cadre d'une collaboration entre le Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS), le SCHAPI, le CETMEF et le LNHE. Cette collaboration vise à construire un système d'assimilation pour le modèle MASCARET.

Une difficulté rencontrée lors de la mise en place de la plupart des systèmes d'assimilation de données est de spécifier les statistiques des erreurs d'ébauche associées à une prévision : variance et covariances des erreurs. L'estimation directe des statistiques de l'erreur de prévision est impossible en raison de la dimension de la matrice de covariances d'erreurs d'ébauche et parce que le vecteur d'état reste inconnu. Enfin l'algorithme lié au filtre de Kalman ([Evensen, 1994]) requiert la propagation explicite des covariances, ce qui est difficile à mettre en œuvre.

Dans le projet proposé ici, l'utilisation du Filtre de Kalman est envisagée en spécifiant la matrice de covariances des erreurs d'ébauche des hauteurs d'eau et écoulements afin de réduire le coût de calcul. Cette dernière est représentée par le biais de fonctions de corrélations inhomogènes. Elles sont telles que la longueur de portée en amont est supérieure à celle en aval afin de représenter les corrélations spatiales d'erreur. Ce choix rend alors le coût de calcul du filtre plus raisonnable. Ceci est justifié par la mise œuvre d'un filtre de Kalman à partir d'un modèle jouet d'advection-diffusion. Les processus opérés par le modèle originel sont par hypothèse considérés comme identiques ou proches de ceux faits par ce modèle plus simple. Celui-ci est alors basé sur l'équation de propagation des ondes de crues diffusantes et à partir des équations de Saint-venant. Cela permet enfin, de montrer que l'analyse et la dynamique de la physique modifie bien une fonction de corrélation gaussienne en une fonction inhomogène au point d'observation. Par ailleurs toujours dans le but de s'affranchir des contraintes des systèmes de grande taille, la représentation de la forme paramétrée des fonctions de covariance est aussi réalisée indirectement en utilisant un opérateur généralisé de diffusion.

La première partie de ce document a pour objectif de présenter le contexte général de la méthode d'assimilation utilisée. La deuxième partie est consacrée à la présentation des modèles physique et mathématiques en jeux. La troisième partie détaille le système d'assimilation de données pour la dynamique du modèle. En prolongement du travail effectué par des élèves de l'Ecole Nationale de la Météorologie([Delplanque et al., 2011]), elle comporte une méthode dite ensembliste mais aussi un outil utilisant un opérateur de diffusion. Cependant, à ce jour nous présenterons qu'une partie des résultats attendus suite à l'émulation du filtre de Kalman.

Première partie

Assimilation de données, Concepts, Méthodes et Applications

Chapitre 1

L'assimilation de données

1.1 Généralités

L'assimilation de données est un processus mathématique qui permet d'obtenir la représentation la plus probable de l'état d'un système à partir de toutes les sources d'informations disponibles. En pratique, sous l'hypothèse de Gaussiannité, il s'agit de trouver la meilleure combinaison entre un état a priori du système que l'on appelle l'ébauche et les observations. L'utilisation de l'ébauche permet de pallier le problème de sous-détermination dans le cas où le nombre d'observations est inférieur à la dimension du problème. Le critère d'optimalité pour obtenir le meilleur estimateur statistique de cette combinaison est la détermination du minimum de variance d'erreur d'estimation. Enfin l'hypothèse de Gaussiannité permet de profiter des résultats d'équivalence entre le BLUE¹ et l'estimateur.

Les informations issues de l'ébauche et des observations sont entachées d'erreur. La combinaison des deux par le biais de divers algorithmes d'assimilation (BLUE, filtre de Kalman...) permet de se rapprocher de l'état réel de notre système. L'état vrai du système, généralement inconnu, est représenté par le vecteur \mathbf{X}^t . Contrairement à l'état vrai, "true", l'ébauche est une variable aléatoire. Elle est notée \mathbf{X}^b et est souvent nommée "background". C'est donc une variable aléatoire égale à \mathbf{X}^t aux erreurs d'ébauche près. Ces deux vecteurs sont de dimension n . L'erreur d'ébauche est définie par le vecteur ε^b telle que

$$\mathbf{X}^b = \mathbf{X}^t + \varepsilon^b, \quad (1.1)$$

\mathbf{Y}^o désigne le vecteur d'observations, il est de dimension p . Par le processus d'assimilation de données on obtient l'analyse \mathbf{X}^a de dimension n .

Les observations diffèrent également de l'état réel. L'erreur d'observation est définie par ε^o où

$$\mathbf{Y}^o = \mathcal{H}\mathbf{X}^t + \varepsilon^o, \quad (1.2)$$

avec \mathcal{H} l'opérateur permettant de passer de l'espace du modèle à celui des observations. Par exemple si \mathbf{Y}^o contient des mesures de débit et que les observations ne sont pas faites en un point de la discrétisation de la rivière, \mathcal{H} correspond à une interpolation spatiale du vecteur d'état vers les points d'observations. Cet opérateur peut être non-linéaire. Par exemple en météorologie, l'assimilation des mesures de radiances satellitaires implique un opérateur \mathcal{H} non linéaire lié à l'équation de transfert radiatif.

Toutes les erreurs, d'observations ou d'ébauche, sont considérées comme non-biaisées. Dans de nombreux domaines d'application on émet l'hypothèse qu'elles suivent une loi gaussienne.

¹Best Linear Unbiased Estimator

Les matrices de covariances d'erreurs sont notées

$$\mathbf{B} = \mathbb{E} [\varepsilon^b(\varepsilon^b)^T], \quad (1.3)$$

pour l'ébauche et $\mathbf{R} = \mathbb{E} [\varepsilon^o(\varepsilon^o)^T]$ pour les observations. Par construction, ces matrices sont symétriques, définies et positives. Elles conditionnent la qualité de l'état réel à partir des mesures et des modèles. Mais ceci sera détaillé au paragraphe 1.3. Enfin on considère qu'il n'y a pas de corrélation entre erreurs d'ébauche et erreurs d'observation.

$$\mathbb{E} [\varepsilon^o(\varepsilon^b)^T] = \mathbf{0}_{n \times p} \quad (1.4)$$

1.2 Méthode d'assimilation BLUE

Présentons brièvement l'approche du BLUE² qui permet d'obtenir le meilleur estimateur linéaire non biaisé de l'état vrai du système. De nombreuses chaînes de prévision reposent sur la répétition de cette méthode d'assimilation BLUE à travers une récurrence temporelle détaillée à la section 1.5. L'état analysé, ici à un instant t donné est une combinaison linéaire de l'ébauche et des observations. Pour construire un estimateur linéaire, deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{K} de tailles respectives $n \times n$ et $n \times p$ doivent être déterminées. Elles sont telles que :

$$\mathbf{X}^a = \mathbf{L}\mathbf{X}^b + \mathbf{K}\mathbf{Y}^o.$$

Comme l'estimateur linéaire recherché est non biaisé, cela introduit des contraintes sur \mathbf{L} et \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\varepsilon^a] &= \mathbb{E} [(\mathbf{X}^a - \mathbf{X}^t)] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{L}\mathbf{X}^t + \mathbf{L}\varepsilon^b + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{X}^t + \mathbf{K}\varepsilon^o - \mathbf{X}^t] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Où \mathbf{H} est l'opérateur d'observation linéaire, ceci est détaillé au chapitre 7 section 7.1.2. De plus les erreurs d'observation et d'ébauche sont supposées non biaisées, l'équation 1.5 devient alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} - \mathbf{I}_{n \times n})\mathbb{E} [\mathbf{X}^t] + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbb{E} [\mathbf{X}^t] &= (\mathbf{L} - \mathbf{I}_{n \times n} + \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbb{E} [\mathbf{X}^t] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La condition pour que l'estimateur \mathbf{X}^a soit non biaisé devient donc :

$$\mathbf{L} + \mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

L'estimateur optimal, minimise la trace de la matrice de covariance d'erreurs d'analyse $\mathbf{A} = E(\varepsilon^a \varepsilon^a)^T$. Elle s'exprime [Bouttier and Courtier, 1999] :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B}((\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}\mathbf{H}))^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T.$$

²Best Linear Unbiased Estimator

La minimisation permet d'établir une expression de la matrice \mathbf{K} :

$$\min(\text{Tr}(\mathbf{A})) \implies \mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (1.7)$$

Ce qui nous mène enfin à l'expression

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{B}. \quad (1.8)$$

Sous les hypothèses de linéarité des opérateurs ainsi que de non-corrélation entre les erreurs d'ébauche et d'observation (voir l'expression 1.4), la minimisation de la variance de l'écart entre l'analyse \mathbf{X}^a et l'état vrai permet donc d'exhiber l'estimateur du BLUE sous la forme d'une correction de l'ébauche par un terme proportionnel à l'écart entre les observations.

\mathbf{X}^a s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^a &= \mathbf{X}^b + \mathbf{K}(\mathbf{Y}^o - \mathcal{H}\mathbf{X}^b) \\ &= \mathbf{X}^b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{Y}^o - \mathcal{H}\mathbf{X}^b). \end{aligned} \quad (1.9)$$

La matrice \mathbf{K} , appelée matrice de gain, permet de définir l'état assimilé comme la somme de l'ébauche et de l'incrément d'analyse (terme correctif)

$$\delta\mathbf{X}^a = \mathbf{K}(\mathbf{Y}^o - \mathcal{H}\mathbf{X}^b) = \mathbf{K}d, \quad (1.10)$$

avec d le vecteur d'innovation qui représente la mesure résiduelle dans l'espace des observations.

1.3 Définition et Rôle de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

1.3.1 Définition et caractéristiques

La modélisation *a priori* des erreurs et de leurs caractéristiques de variabilité repose entièrement sur les matrices de variance-covariance, qui sont donc fondamentales. Le rôle de \mathbf{B} est capital en assimilation de données car elle détermine la façon dont les observations sont prises en compte et dont l'information qu'elles apportent est propagée dans le vecteur d'état. Lorsque celui-ci est formé de plusieurs variables de natures différentes le problème est dit multivarié. Dans ce cas, la matrice représente non seulement les covariances *univariées* d'erreur spatiales de chaque variable mais également les covariances d'erreur existant entre chacune des variables (dites multivariées).

Par définition,

$$\mathbf{B} \equiv \mathbb{E} [(\mathbf{X}^b - \mathbf{X}^t)(\mathbf{X}^b - \mathbf{X}^t)^T], \quad (1.11)$$

la matrice de covariance est donc par construction symétrique, positive.

De manière plus concrète, dans le cas univarié et pour de petites dimensions des vecteurs de hauteurs d'eau contenus dans le vecteur d'état :

- ★ Les termes diagonaux représentent les variances des erreurs d'ébauche en un point de grille.

- ★ Enfin les termes extra-diagonaux contiennent les covariances univariées entre les erreurs à différents points du maillage

Plus précisément, en considérant une assimilation faite au point d'observation, la variance détermine quel "poids" donner à l'observation face à la hauteur d'eau simulée par l'ébauche. Les covariances permettent, elles de propager spatialement l'information du point d'observation vers les autres points de grille, pour cette variable de hauteur d'eau.

1.3.2 Difficultés de modélisation

Plusieurs raisons font qu’il nous est difficile de déterminer la matrice \mathbf{B} . En effet cela impliquerait le calcul statistique de tous les termes d’erreur liés aux différences entre \mathbf{X}^b et \mathbf{X}^t . Et aussi pour d’autres raisons :

- l’état vrai n’est pas directement observable.
- De plus, concernant des systèmes de très grande dimension :
- La taille importante de \mathbf{B} implique un coût de calcul, trop élevé, pour chaque terme.
- Enfin stocker une telle matrice n’est pas envisageable.

A défaut d’utiliser une description exacte de la matrice \mathbf{B} , on fait alors le choix d’estimer et de modéliser cette matrice par une méthode d’ensemble capable de fournir néanmoins les statistiques d’erreurs significatives pour le système (ceci sera détaillé au cours du chapitre 5). Dans notre étude, les **covariances univariées** sont modélisées par des fonctions de corrélation³. Les variances et covariances *univariées* sont représentées par un modèle de covariance dit *univarié*. En particulier, les simplifications faites dans le modèle physique permettent de passer d’un problème multivarié (h, U) à un problème univarié (h) (détaillé dans le chapitre 2). Les **covariances multivariées** sont alors inexistantes.

Dans le but d’obtenir une analyse de qualité, le modèle de covariance d’erreur doit suivre un certain nombre de conditions :

- les variances doivent être représentatives de la variabilité des variables d’état.
- les corrélations spatiales pour chaque variable doivent être lisses et les échelles de corrélations représentatives des phénomènes physiques dominants

Enfin négliger les covariances entre variables permet aussi une analyse dynamiquement cohérente avec la physique du modèle.

1.3.3 Rôle de \mathbf{B}

Dans l’approche séquentielle du BLUE (voir section 1.2), la construction de l’analyse implique la connaissance de la matrice de covariance d’erreur d’ébauche. \mathbf{B} représente les statistiques sur l’incertitude lié à l’état du système prévu à un instant donné. L’équation (1.10) de $\delta\mathbf{X}^a$ met en évidence le rôle primordial de la matrice de covariances d’erreurs d’ébauche :

$$\delta\mathbf{X}^a = \mathbf{B} \underbrace{\mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{Y}^o - \mathbf{H} \mathbf{X}^b)}_{\delta\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{B} \delta\hat{\mathbf{X}}.$$

Sous l’hypothèse où les observations sont réalisées aux points du maillage⁴, le vecteur $\delta\hat{\mathbf{X}}$ contient des 0 sauf aux points du maillage où sont réalisées les observations. C’est la seule matrice \mathbf{B} qui répartit l’information contenue dans ce vecteur sur tout le domaine spatial. Elle filtre une partie des erreurs des observations et propage des corrections de l’ébauche apportées par les observations. Pour faciliter la compréhension des caractéristiques de \mathbf{B} , on utilise une fonction dite de covariance dont voici la définition.

³Weaver et Courtier, 2001.

⁴Ici, \mathbf{H} est une indicatrice.

Fonction de covariance et de corrélation

Définition : Une fonction de covariance relative à un point du domaine i est définie comme étant l'ensemble des covariances $cov(i,j)=\mathbb{E} [\varepsilon^b(i)\varepsilon^b(j)]$ pour un point courant j sur le domaine.

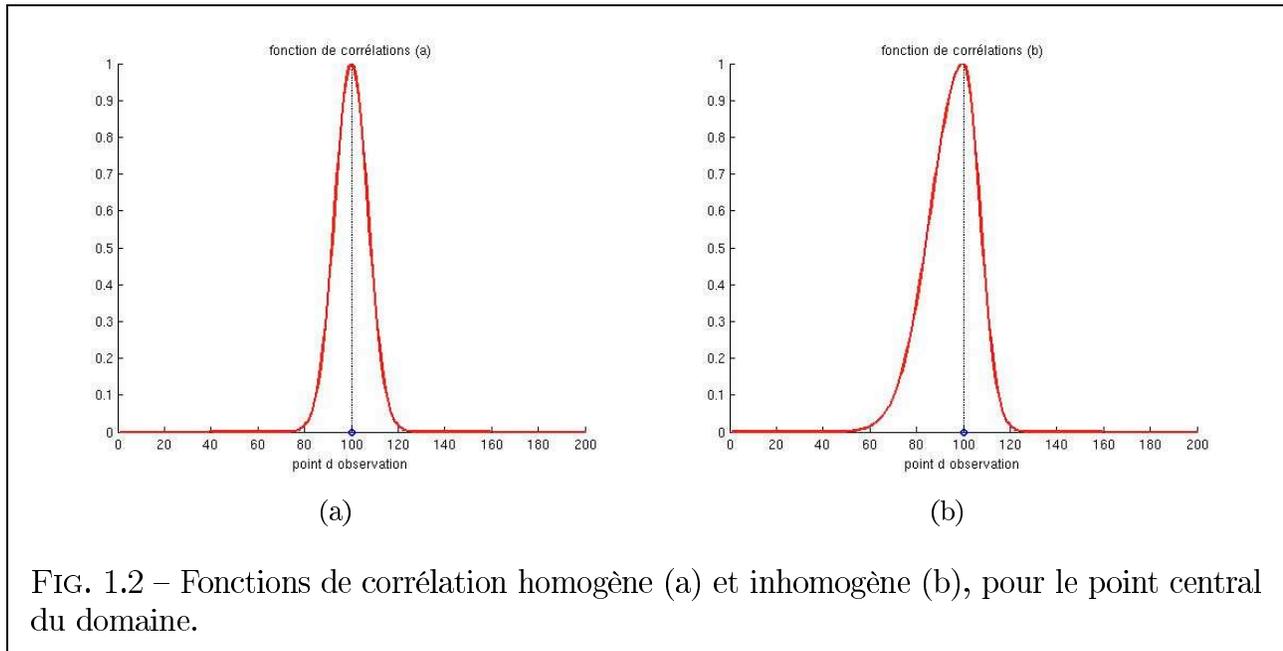
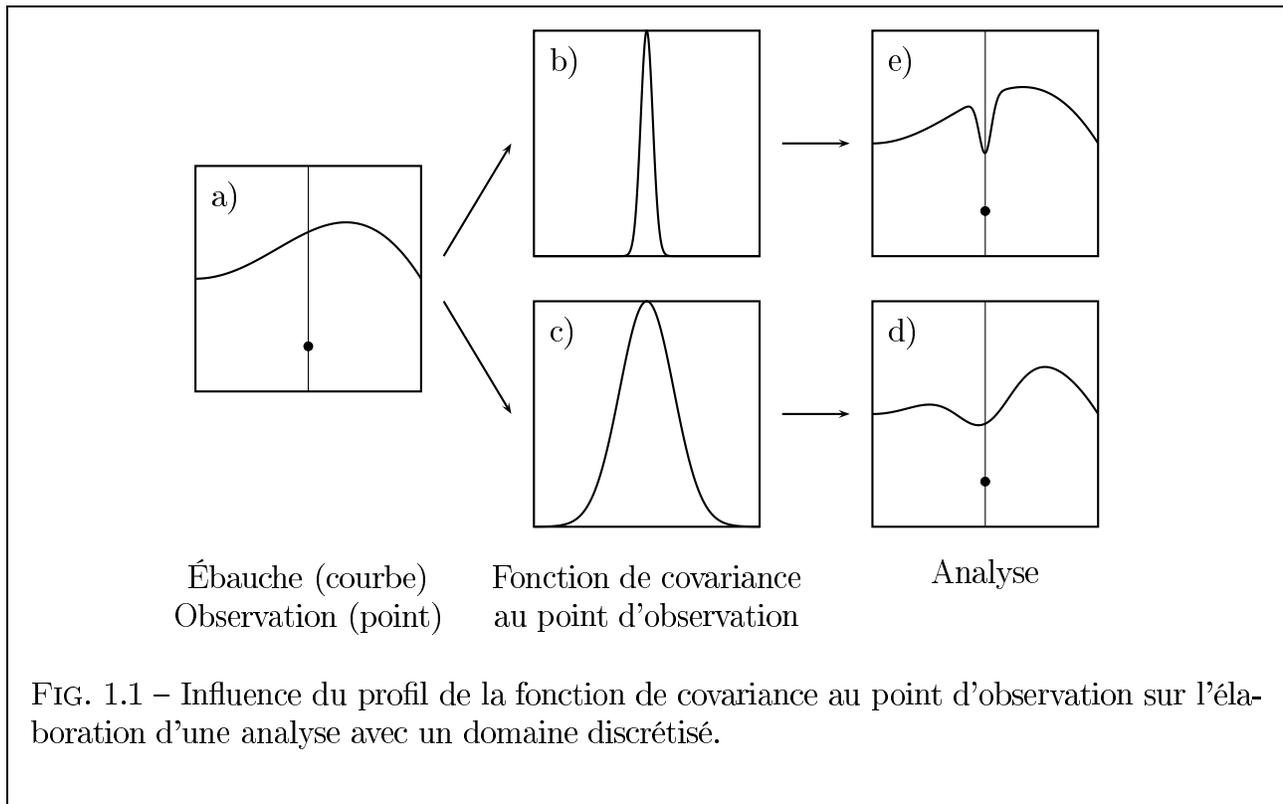
Exemple : Nous allons formuler comme exemple la matrice \mathbf{B} pour le modèle hydraulique dans la configuration à surface libre dérivé des équations de Saint-Venant, où le vecteur d'état contient les hauteurs d'eau réelles. Ici c'est un vecteur colonne de 200 points d'espace. Les fonctions de covariances correspondent aux colonnes de la matrice \mathbf{B} .

Les fonctions de corrélations découlent des fonctions de covariance après normalisation de ces dernières à l'aide des écart-types⁵. Ces fonctions permettent de mettre en avant deux types d'information indépendants. ([Pannekoucke et al., 2007]). D'une part l'amplitude de l'incertitude correspondant au maximum de la fonction, et d'autre part l'extension spatiale caractérisée par la longueur de portée (détaillé au paragraphe 1.4).

La figure 1.1 montre, à partir d'une ébauche (a), et de deux fonctions de covariances de largeur à mi-hauteur petite (b), puis grande (c), la correction faite sur l'ébauche donnant lieu à l'analyse. Les états analysés (d) et (e) montrent que plus l'extension spatiale de la fonction de covariance est grande plus la correction apportée au point d'observation se répercute sur des points éloignés.

Pour notre étude, nous allons nous concentrer sur l'extension spatiale des fonctions de covariance. Cette information est contenue dans les corrélations spatiales. La figure 1.2.(a) montre une fonction de corrélation gaussienne. Celle-ci étant **homogène**, l'information apportée par une assimilation au i^{ieme} point sera répartie de manière *identique* de part et d'autre du point. Autrement dit la fonction de corrélation est la même en tout point du domaine. Il peut parfois être judicieux de rendre ces fonctions de corrélation inhomogènes (dans le sens des x). La figure 1.2.(b) illustre dans un cas unidimensionnel le caractère inhomogène des fonctions de corrélation.

⁵racine carrée de la variance d'erreur d'ébauche σ^b , située sur la diagonale de la matrice \mathbf{B} .



1.4 Diagnostic de la longueur de portée

L'extension spatiale se caractérise par une échelle de longueur : elle permet de tenir compte de l'influence d'une erreur en un point sur les points voisins. Il est important de respecter une certaine cohérence en fonction de la structure spatiale du domaine et du type de champ observé. Notamment les longueurs de portée seront d'autant plus grandes pour des champs de grande échelle (par exemple la pression de surface) que pour des champs de petite échelle.

De manière formelle, Daley ([Daley, 1991]) propose une définition⁶ de la longueur de portée :

$$L_p = \sqrt{\frac{-1}{\nabla^2 \rho(0)}} \iff {}^7 L_p = \sqrt{\frac{-1}{\frac{d^2 \rho}{dx^2}(0)}} \iff \frac{d^2 \rho}{dx^2}(0) = \frac{-1}{L_p^2}. \quad (1.12)$$

Soit ρ une fonction de corrélation admettant pour développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de l'origine :

$$\rho(\delta x) \approx \rho(0) + \frac{\delta x^2}{2} \frac{d^2 \rho(0)}{dx^2}. \quad (1.13)$$

On obtient alors :

$$\forall \rho, \frac{d^2 \rho(0)}{dx^2} \approx \frac{2}{\delta x^2} [\rho(\delta x) - \rho(0)] \quad (1.14)$$

D'après l'expression (1.12),

$$\frac{-1}{L_p^2} \approx \frac{2}{\delta x^2} [\rho(\delta x) - \rho(0)] \quad (1.15)$$

En notant que $\rho(0) = 1$ car ρ est une fonction de corrélation :

D'où l'expression de L_p :

$$L_p = \frac{\delta x}{\sqrt{2(1 - \rho(\delta x))}}, \forall \rho.$$

La figure 1.3 permet de donner une interprétation géométrique en utilisant la parabole osculatrice⁸ de la fonction de corrélation à l'origine. La longueur de portée correspond à la distance pour laquelle cette parabole vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi spécifiée, cette échelle de longueur permet d'évaluer l'allure de la fonction de corrélations à l'origine.

En effet, ce diagnostic est utile pour caractériser *l'inhomogénéité spatiale* des fonctions de corrélation. La variation géographique de la longueur de portée détermine le caractère inhomogène d'une matrice de corrélation⁹. Si cette dernière est homogène, alors la portée est constante sur le domaine. La réciproque est fautive : l'homogénéité de la longueur de portée n'implique pas le caractère homogène de la matrice de covariance considérée.

La figure (1.4) présente une illustration des fonctions de corrélations avec des longueurs de corrélation inhomogènes : en entrée du domaine, elles sont de l'ordre de 3 km, puis en milieu de domaine atteignent les 7 km.

⁶cette définition est en pratique limitée car le calcul du laplacien nécessite, en théorie, la connaissance de l'ensemble de la fonction de corrélation.

⁷équivalence possible car L_p est une quantité positive.

⁸elle correspond au développement de Taylor à l'ordre 2 de cette fonction.

⁹matrice déduite de la matrice de covariance après normalisation à l'aide des écarts types.

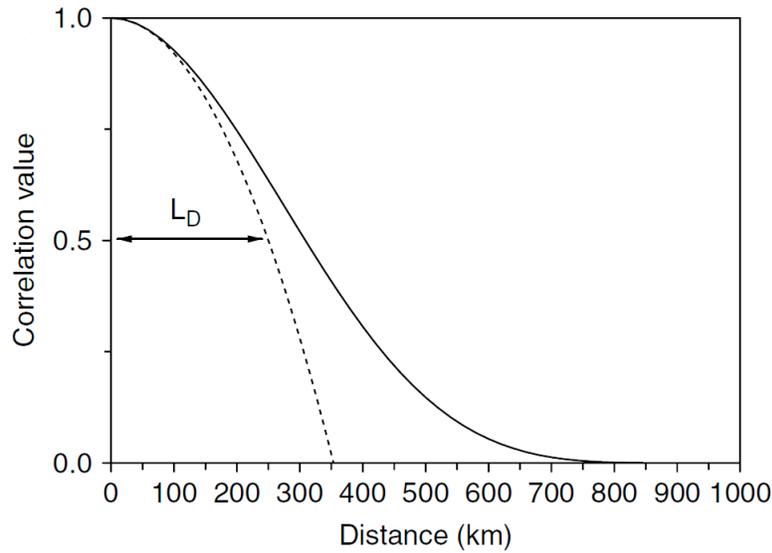


FIG. 1.3 – Représentation de la longueur de portée notée L_D à l'aide la parabole osculatrice (courbe tiretée) et diagnostic de la forme de la fonction de corrélation en son origine (courbe noire) [Pannekoucke et al., 2007].

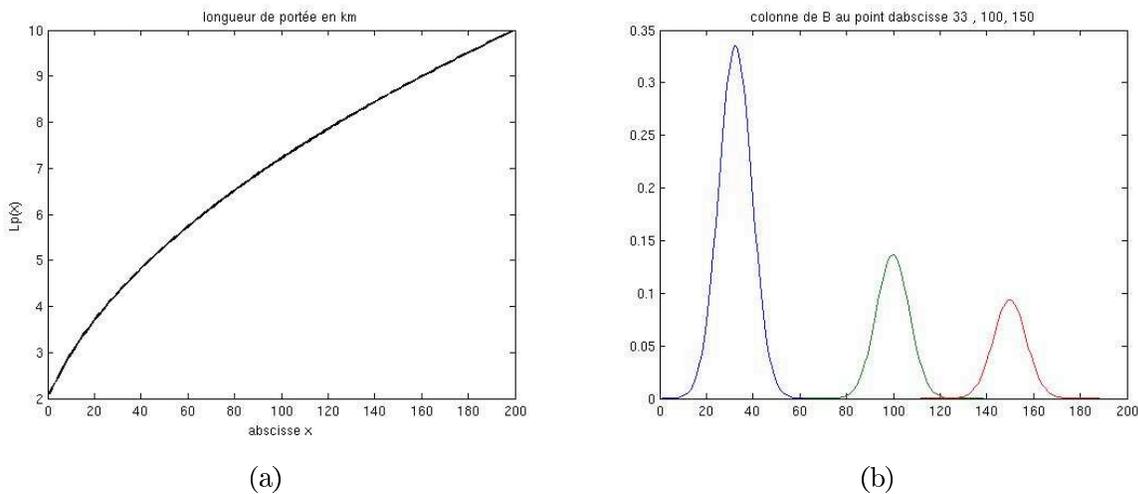


FIG. 1.4 – Champ de longueur de portée pour la matrice de covariance hétérogène.

1.5 Filtre de Kalman

1.5.1 Présentation et comparaison avec le BLUE

En 1960, Rudolf.E Kalman fut à l'origine d'un algorithme qui se présente comme une extension de l'estimation optimale (BLUE) pour les systèmes dynamiques (autrement dit, il comprend un modèle dynamique tenant compte de la propagation des signaux.). Le filtre de Kalman est en effet un [estimateur récursif](#). Tout comme le BLUE, il fournit l'incertitude sur l'analyse par le calcul de la matrice de covariances d'erreur d'analyse. Cependant, le coût en mémoire et en

temps de calcul dû à l'expression de la matrice de gain (inversion de matrices voir l'expression 1.7) et à la mise à jour de la matrice de covariance d'erreur d'analyse représente un réel inconvénient. Certaines variantes du filtre de Kalman visent à réduire le coût de calcul [Evensen, 1994].

1.5.2 Principe

Dans le filtre de Kalman le calcul de l'analyse est similaire à celui fait dans l'algorithme du BLUE (voir l'expression 1.8). L'algorithme du filtre de Kalman comprend trois étapes : la phase de prévision utilise l'état estimé au temps t_{i-1} pour produire une estimation de l'état courant au temps t_i . Celle du calcul du gain. Dans l'étape de mise à jour (analyse), les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prévu dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

étape prévision

On remarque une différence importante dans la suite des algorithmes : le code du BLUE paramétrise la matrice \mathbf{B} au début du processus de cyclage. Puis cette matrice restera statique durant toute la phase d'assimilation (Paragraphe. 1.2). Le filtre de Kalman permet lui, l'évolution à chaque cycle d'assimilation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathcal{M}\mathbf{A}_i\mathcal{M}^T + \mathbf{Q}_i, \quad (1.16)$$

où \mathbf{Q}_i est la matrice de covariance d'erreurs modèle, ici supposé parfait, donc \mathbf{Q}_i sera nulle, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{i,i+1}$ est l'opérateur modèle de prévision depuis l'instant i jusqu'à l'instant $i + 1$. On notera pas la suite \mathbf{M} le linéaire tangent. Cette méthode permet en particulier aux différentes matrices entrant en jeu de "suivre" la dynamique du problème.

De manière identique aux étapes de l'algorithme du BLUE : l'analyse sert d'ébauche au cycle d'assimilation suivant. Et donc, l'estimation de l'état courant et sa matrice d'erreur sont calculées à partir de l'analyse précédente. En effet on choisit nommer le terme **d'ébauche** *prévision* (ou *forecast* en anglais) car celui-ci provient donc de l'analyse précédente :

$$\mathbf{X}^f(t_{i+1}) = \mathbf{X}^b(t_{i+1}) = \mathbf{M}_{i,i+1}\mathbf{X}^a(t_i). \quad (1.17)$$

Ensuite l'expression 1.16 nous fournit la matrice d'erreur de prévision.

calcul du gain de Kalman

Cette étape est donc semblable à celle implémentée dans le BLUE :

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{B}_{i+1}\mathbf{H}_{i+1}^T (\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{B}_{i+1}\mathbf{H}_{i+1}^T + \mathbf{R}_{i+1})^{-1} \quad (1.18)$$

étape analyse

Cette étape fait, entre autre, intervenir la notion d'incrément d'analyse à l'instant i .

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{Y}_i^o - \mathcal{H}_i\mathbf{X}_i^b, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{B}_i\mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i\mathbf{B}_i\mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}, \quad (1.20)$$

$$\delta\mathbf{X}_i^a = \mathbf{K}_i(\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{H}_i\mathbf{X}_i^b) = \mathbf{K}_i\mathbf{d}_i \quad (1.21)$$

$$\mathbf{A}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathcal{H}_i)\mathbf{B}_i \quad (1.22)$$

où \mathbf{A}_i est la matrice de covariance d'erreurs de prévision.

A chaque nouveau temps t_i , on calcule l'analyse optimale $\mathbf{X}^a(t_i)$, à partir des termes d'ébauche et d'observation au temps t_i . Les observations de l'état courant sont utilisées pour corriger l'état prévu.

$$\mathbf{X}^a(t_{i+1}) = \mathbf{X}^f(t_{i+1}) + \mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{Y}^o(t_{i+1}) - \mathcal{H}_i \mathbf{X}^f(t_{i+1})) \quad (1.23)$$

.

1.5.3 Propriétés du filtre de Kalman

Optimalité

Sous les hypothèses suivantes le filtre de Kalman, au sens de la variance minimale, représente le meilleur filtre linéaire non biaisé :

- ▷ le modèle \mathbf{M} , et l'opérateur d'observation \mathbf{H} sont linéaires.
- ▷ les erreurs sont des bruits blancs (i.e indépendantes en temps et non corrélées entre elles). De plus, les erreurs du système suivent des lois gaussiennes.

$$\varepsilon^b \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{B}), \varepsilon^o \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \quad (1.24)$$

Implémentation et coût

Lorsque la dimension de l'analyse est beaucoup plus grande que le nombre d'observations (i.e $n \gg p$ ce qui est le cas ici), l'étape la plus coûteuse du filtre correspond au calcul de la matrice d'erreur de prévision (en $\mathcal{O}(n^3)$) suivie de celle du calcul de la matrice gain.

Dans le cadre de notre étude la matrice de covariance d'erreurs modèle \mathbf{Q} est considérée comme nulle. Cette hypothèse est forte et entraîne une diminution progressive des fonctions de covariances contenues dans \mathbf{B} . Concrètement l'erreur d'ébauche diminue peu à peu. On prend donc de moins en moins en compte les observations. Cependant, dans la mesure où cette étude s'intéresse aux longueurs de portée, un travail sur les fonctions de corrélation est satisfaisant.

1.6 Filtre de Kalman d'ensemble

L'objectif du filtre de Kalman d'ensemble [Evensen, 1994] reste identique au filtre de Kalman vu précédemment, soit prendre en compte dans l'assimilation de données la dynamique d'évolution des erreurs associées à une prévision. Pour atteindre cet objectif, le filtre de Kalman applique les équations du modèle caractérisées par l'opérateur \mathbf{M} à la matrice \mathbf{B} , au travers de l'équation 1.16.

Le principe du filtre de Kalman d'ensemble est différent, il consiste à établir la matrice \mathbf{B} de covariance d'erreurs d'ébauche d'un point de vue statistique à partir d'un ensemble de couples ébauche–analyse représentant une même réalité et évoluant parallèlement. De plus il permet aussi de s'affranchir du lourd calcul du linéaire tangent \mathbf{M} du modèle de prévision : $\mathcal{M}\mathbf{A}_i\mathcal{M}^T$. Il faut aussi prendre en compte le coût de calcul issu de la génération de tels ensembles :

Il opère sur un ensemble comportant N_e analyses, $\mathfrak{E}^a = \{x^{a,k}, 1 \leq k \leq N_e\}$, dont chacun des membres représente une même réalité perturbée par une erreur propre supposée non biaisée. Selon le même principe, un ensemble d'ébauche, $\mathfrak{E}^b = \{x^{b,k}, 1 \leq k \leq N_e\}$, est associé aux analyses.

Ensemble Kalman Filter

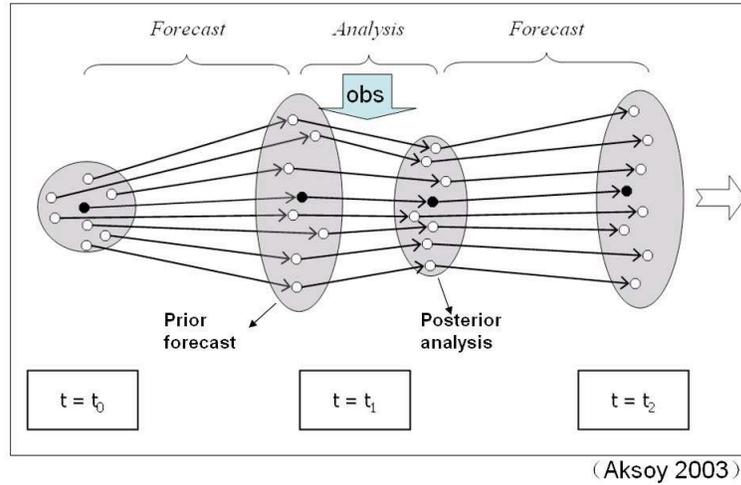


FIG. 1.5 – Principe de fonctionnement d'un filtre de Kalman d'ensemble, les ellipses autour des états schématisent la variance des différents membres.

Un cycle d'assimilation au temps t_i se déroule tel qu'illustré par la figure 1.5. Tout d'abord, un ensemble d'ébauche est obtenu en appliquant le modèle à chacun des membres de l'ensemble d'analyse du pas de temps précédent. De même que dans le BLUE et le filtre de Kalman, cette matrice fournit la matrice de gain selon l'équation 1.20.

La convergence de la matrice \mathbf{B} s'effectue en $1/\sqrt{N_e}$ selon le théorème central limite. La taille de l'ensemble est déterminée par la précision souhaitée, ainsi que par la complexité des calculs d'ébauche et d'analyse de chacun des membres.

Le filtre de Kalman d'ensemble, en permettant le calcul séparé des différentes analyses et ébauches, est particulièrement bien adapté aux machines massivement parallèles.

Deuxième partie

Présentation du contexte physique et mathématiques

Chapitre 2

Modèle d'onde de crue

Ce chapitre introduit dans un premier temps le modèle d'écoulement à surface libre dérivé des équations de Saint-Venant, utilisé dans cette étude [Thual, 2010a], avant de présenter sa résolution numérique. Lors des écoulements dans les rivières, la profondeur de la couche d'eau est faible devant l'extension horizontale des phénomènes observés. On se restreint donc ici au cas où la largeur du domaine l est grande devant la profondeur.

2.1 Physique du problème

Un bief est un canal à pente faible utilisant la gravité pour acheminer l'eau. On s'intéresse à la modélisation des ondes de crues sur un bief incliné d'un angle γ avec l'horizontale (Fig.2.1). En choisissant l'axe $\mathcal{O}x$ parallèle au plan incliné, on note (e_x, e_z) les vecteurs orthonormés du plan (x, z) . Le vecteur gravité s'écrit $\underline{g} = g \sin \gamma e_x - g \cos \gamma e_z$. On considère que le fluide est incompressible¹ et on note ρ sa masse volumique constante. On choisit l'origine des axes au fond de telle sorte que $z = 0$ soit l'équation du plan incliné.

On note enfin, $\underline{U}(x, z, t) = u(x, z, t)e_x + w(x, z, t)e_z$ le champ de vitesse et la hauteur d'eau h . On suppose de plus une invariance selon y , c'est à dire $\forall h, \frac{\partial h}{\partial y} = 0$.

Pour un écoulement turbulent, les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme suivante, avec p_t la pression turbulente et ν_t la viscosité turbulente, de façon à traiter la turbulence d'une manière paramétrée

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x} + g \sin \gamma + \nu_t \Delta u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial z} - g \cos \gamma + \nu_t \Delta w. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

A partir des équations 2.1 précédentes, le système d'équations de Saint-Venant se déduit à l'aide de différentes hypothèses :

- l'équation de la surface libre est de la forme $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$, ce qui permet d'exclure les déformations de type déferlement.
- Au niveau de la couche limite de fond, z_{lim} est considéré comme très petit.
- La profondeur est supposée faible devant l'échelle de variation des phénomènes dans la direction de l'écoulement.

¹son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe.

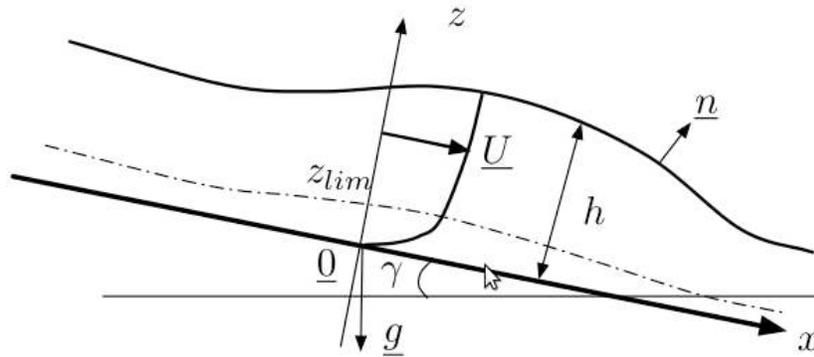


FIG. 2.1 – Canal incliné à fond plat. [Thual, 2010a]

- La vitesse longitudinale moyenne U devient une variable du problème, en intégrant les équations sur la hauteur du canal.
- Les frottements sont paramétrés par la relation : $\tau_{frot} = \frac{1}{2}C_f\rho U|U|$, avec C_f un coefficient de frottement qui dépend de la structure de la rivière (rugosité du fond, hauteur, etc).²

Les équations de Saint-Venant qui est le système d'équations codées dans le modèle MAS-CARET [Ricci et al., 2010] sont alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \cos \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \gamma - \frac{C_f U |U|}{2 h}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Cependant, dans le cadre de ce projet, des approximations supplémentaires sont réalisées afin de simplifier le problème. En particulier, ces simplifications permettent de passer d'un problème multivarié (h, U) à un problème univarié (h) .

- La pente est supposée faible, c'est à dire que le terme en $g \sin \gamma$ est négligeable dans le système de Saint-Venant.
- Le nombre de Froude³ est également supposé faible, ce qui signifie physiquement que la vitesse de l'écoulement est faible devant la vitesse des ondes de surface en milieu peu profond.

Pour de petites perturbations autour d'un état de référence (h_r, U_r) on écrit :

$$h = h_r + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_r + \tilde{U}.$$

En réalisant cette approximation et en négligeant les termes d'ordre 2 dans les équations 2.2, apparaît finalement l'équation des ondes de crues diffusantes, avec $\kappa_n = \frac{U_n h_n}{2 \tan \gamma}$, U_n la vitesse moyennée sur la verticale et h_n la hauteur d'eau moyenne :

²Il existe plusieurs manières de modéliser ce coefficient. Nous considérons ici l'approximation de Manning-Strickler.

³Le nombre de Froude est le rapport entre la vitesse de l'écoulement U et la vitesse c de propagations des ondes de surface en milieu peu profond.

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5U_n}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = \kappa_n \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2}.$$

Dans le cadre d'ondes de crues diffusantes⁴, une faible crue sera par exemple, advectée à une vitesse égale à $\frac{5}{3}$ de celle de l'écoulement. L'amplitude de la crue sera déterminée par le terme supplémentaire κ_n . En effet l'équation régissant les ondes de crues diffusantes est une équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2.3)$$

Pour plus de simplicité, \tilde{h} est remplacé par h , et on raisonnera en terme d'anomalies de hauteurs d'eau.

2.2 Schéma numérique de l'équation d'advection-diffusion

L'étude physique précédente permet de modéliser l'écoulement dans un cadre continu : les anomalies de hauteur d'eau sont régies par l'équation d'advection-diffusion (Eq. 2.3). Sa modélisation numérique nécessite une discrétisation spatiale et temporelle, puis une approximation des dérivées. La méthode retenue est celle des différences finies, en approximant les dérivées par des taux d'accroissement sur des intervalles de petites dimensions. Nous avons ici, utilisé deux méthodes d'intégration numérique par développements de Taylor : la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta [Bastien and Martin, 2003].

Considérons donc l'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \text{ pour } (x, t) \in [0, l] \times \mathbb{R}^+ \\ h(0, t) = q(t) \\ h(x, 0) = h_0(x), x > 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t}(l, t) + c \frac{\partial h}{\partial x}(l, t) = 0, x = l \end{cases} \quad (2.4)$$

En aval, *i.e.* lorsque $x = l$, on suppose le terme source nul, ce qui correspond à des conditions aux limites ouvertes (encore appelées sortie libre).

En amont, on impose une condition de Dirichlet $h(0, t) = q(t)$, où la quantité $q(t)$ est le forçage amont (détaillé à la section 3).

2.2.1 Schéma de discrétisation

Pour discrétiser le domaine $[0, l]$ on introduit :

- ✦ un pas d'espace $\Delta x = \frac{l}{N}$ (avec N un entier positif)
- ✦ un pas de temps $\Delta t > 0$

On définit ainsi les noeuds d'un maillage régulier (voir la figure 2.2) :

$$(t_i, x_j) = (i\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } i \geq 1, 1 \leq j \leq N$$

On note h_j^i la valeur d'une solution discrète approchée au point $(i\Delta t, j\Delta x)$ et $h(t, x)$ la solution exacte de l'équation (2.4).

⁴*i.e.* lorsque la vitesse de l'écoulement est faible et la pente de la rivière est négligeable.

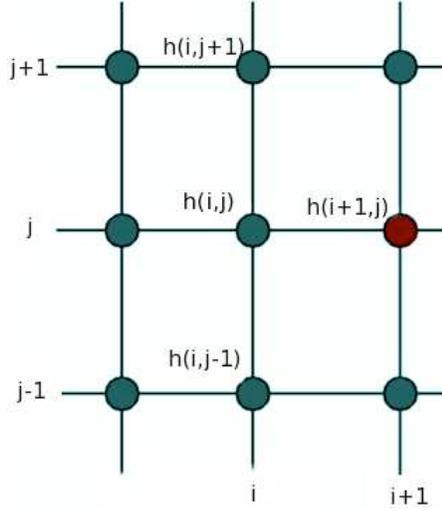


FIG. 2.2 – Maillage d'un rectangle en différences finies

2.2.2 Méthode d'Euler

Pour plus de détails sur la méthode d'Euler, on pourra consulter, [Bastien and Martin, 2003] ainsi que l'annexe A.4. La modélisation de cet écoulement consiste à établir une relation $\mathbf{h}^{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{h}^i$.

Pour cela en utilisant les formules de Taylor nous avons :

Le schéma d'Euler explicite d'ordre 1 ,

$$\begin{aligned} h_j^{i+1} &= h_j^i + (\partial_t h)_j^i \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t). \\ \text{d'où} \quad (\partial_t h)_j^i &= \frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

puis le schéma centré d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} h_{j+1}^i &= h_j^i + \Delta x (\partial_x h)_j^i + \frac{\Delta x^2}{2} (\partial_x^2 h)_j^i + \frac{\Delta x^3}{3!} (\partial_x^3 h)_j^i + \mathcal{O}(\Delta x^4). \\ h_{j-1}^i &= h_j^i - \Delta x (\partial_x h)_j^i + \frac{\Delta x^2}{2} (\partial_x^2 h)_j^i - \frac{\Delta x^3}{3!} (\partial_x^3 h)_j^i + \mathcal{O}(\Delta x^4). \\ \text{d'où} \quad (\partial_x h)_j^i &= \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

De même le schéma centré d'ordre 1 :

$$(\partial_x^2 h)_j^i = \frac{h_{j+1}^i - 2h_j^i + h_{j-1}^i}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.7)$$

Le schéma explicite obtenu est :

$$\begin{cases} \frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} + c \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} = \kappa \frac{h_{j+1}^i - 2h_j^i + h_{j-1}^i}{\Delta x^2}. \\ h_j^i = q(t), \text{ pour } j = 1 \\ \frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} + c \frac{h_j^i - h_{j-1}^i}{\Delta x} = 0, \text{ pour } j = N \end{cases} \quad (2.8)$$

En l'absence de forçage, la condition limite en $x = 0$ est modélisée par $h_1^i = 0$.

Les équations du modèle du temps i au temps $i + 1$ s'écrivent matriciellement $\mathbf{h}^{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{h}^i$ avec la matrice \mathbf{M} du modèle :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Les coefficients a_0, \dots, a_4 dépendent des paramètres de la modélisation physique, c et κ , ainsi que des paramètres de la modélisation numérique, Δx et Δt :

$$a_0 = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}; \quad a_1 = 1 - \frac{2\kappa\Delta t}{\Delta x^2}; \quad a_2 = -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}; \quad a_3 = \frac{c\Delta t}{dx}; \quad a_4 = 1 - \frac{c\Delta t}{dx}.$$

La prise en compte d'un forçage en $x = 0$, $\mathbf{f}^i = (q(i\Delta t) \ 0 \ \cdots \ 0)^T$ entraîne l'ajout d'un terme non linéaire :

$$\mathbf{h}^{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{h}^i + \mathbf{f}^{i+1}.$$

Stabilité du schéma

L'étude de stabilité permet de vérifier que l'énergie, c'est-à-dire la norme carré du signal, reste bornée au cours du temps. Or la discrétisation de l'équation d'advection en utilisant un schéma centré pour la dérivée spatiale est connue pour être instable [Gicquel and Vermorel, 2010]. En effet, numériquement l'instabilité se manifeste par des oscillations non bornées de la solution numérique. Il s'agit donc de voir sous quelles conditions la présence du terme de diffusion permet de rendre ce schéma stable.

L'analyse est effectuée selon la méthode de Von Neumann, dont le principe consiste à utiliser une transformation de Fourier afin d'étudier la stabilité de chaque mode séparément. Plus formellement cette méthode repose sur le théorème de Plancherel, selon lequel une fonction de carré intégrable possède la même norme carrée que sa transformée de Fourier : $\|h\|_2 = \|\widehat{h}\|_2$ [Revuz, 1997].

Les propriétés sur les transformés de Fourier permettent alors de transformer les translations en multiplications :

$$h^j(\widehat{x + \Delta x})(\zeta) = e^{-2i\pi\Delta x} \widehat{h^j(x)}(\zeta).$$

Ce qui est ensuite appliqué à l'équation du schéma numérique (Éq. 2.8) :

$$\frac{\widehat{h}^{i+1} - \widehat{h}^i}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (e^{2i\pi\zeta\Delta x} - e^{-2i\pi\zeta\Delta x}) \widehat{h}^i - \frac{\kappa}{\Delta x^2} (e^{2i\pi\zeta\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\zeta\Delta x}) \widehat{h}^i = 0$$

Le gain g , quotient de la transformée de Fourier du signal entre deux instants successifs, est alors :

$$g(\zeta) = \frac{\widehat{h}^{i+1}}{\widehat{h}^i} = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} i \sin(2\pi\zeta\Delta x) + 2\frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} (\cos(2\pi\zeta\Delta x) - 1). \quad (2.9)$$

La stabilité du schéma est alors acquise si

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} \quad |g(\zeta)| \leq 1 \quad (2.10)$$

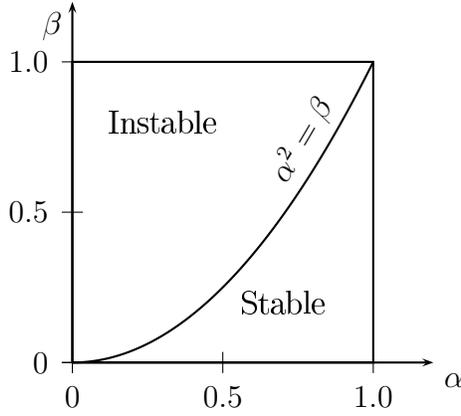


FIG. 2.3 – Condition de stabilité du schéma numérique selon les paramètres α et β .

Le détail des calculs figure en annexe A.1, la condition de stabilité prend la forme de trois inéquations :

$$\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1; \quad \beta = 2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1; \quad \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{c^2 \Delta t}{2\kappa} \leq 1.$$

Cette troisième condition reflète le choix fait sur le schéma temporel. Puis nous obtenons alors, à la condition sur Δt , voir figure 2.3 :

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{c}; \frac{\Delta x^2}{2\kappa}; \frac{2\kappa}{c^2} \right\}.$$

Ces inégalités, nommées condition CFL⁵, font apparaître :

- la CFL d'un schéma d'advection, $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$
- la CFL d'un schéma de diffusion, $2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

Le schéma d'advection seul n'étant pas stable, la dernière inéquation, $\frac{c^2 \Delta t}{2\kappa} \leq 1$ indique dans quelle mesure la diffusion permet de le stabiliser. Par exemple, avec les paramètres suivants, $c = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\kappa = 500 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, un bief de longueur $L = 500 \text{ km}$, discrétisée en $N = 1000$ points, il convient de prendre un pas de temps maximum $\Delta t = 250 \text{ s}$ pour garantir la stabilité.

Équation équivalente

Un développement limité en $(i\Delta t, j\Delta x,)$ permet de vérifier que le schéma résout effectivement l'équation d'advection-diffusion (Eq. 2.3). La fonction ν solution du schéma numérique est telle que :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + c \frac{\partial \nu}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \Delta x^2 \left(\frac{c}{6} \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3} - \frac{\kappa}{12} \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4} \right)}_{\varepsilon} + O(\Delta t^2, \Delta x^3) = 0. \quad (2.11)$$

À l'ordre 1 en temps et 2 en espace, le schéma résout l'équation d'advection-diffusion, à l'erreur ε près. D'après l'équation 2.11, le schéma numérique introduit une erreur ε . Cette erreur engendre des comportements du modèle numérique non souhaités dans le modèle physique,

⁵Condition Courant-Friedrichs-Lewy, du nom de Richard Courant, Kurt Friedrichs, et Hans Lewy

en particulier en agissant sur le coefficient de diffusion, mais également en introduisant de la dispersion.

La dérivation de l'équation d'advection-diffusion (Eq. 2.3) permet d'exprimer les dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales.

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - 2c\kappa \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3} + \kappa^2 \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4}$$

Cela permet de réécrire l'équation résolue par le schéma numérique, et fait apparaître des termes supplémentaires à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + c \frac{\partial \nu}{\partial x} - \underbrace{\left(\frac{c\Delta x^2}{6} + c\kappa\Delta t \right)}_{\text{dispersion}} \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3} = \underbrace{\left(\kappa - \frac{c^2\Delta t}{2} \right)}_{\kappa'} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \left(\frac{\kappa^2\Delta t}{2} - \frac{\kappa\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4} + O(\Delta t^2, \Delta x^3) \quad (2.12)$$

Impact des termes diffusifs et dispersifs sur la propagation des covariances

L'équation (2.12), ou équation équivalente résolue par le schéma numérique, fait apparaître un terme de dispersion et deux termes de diffusion supplémentaires. Il faudra prendre en compte ces aspects lors des expériences numériques.

En particulier, la diffusion apparente du schéma numérique $\kappa' = \kappa - \frac{c^2\Delta t}{2}$, doit être prise en compte lors de la comparaison des résultats. En effet le coefficient de diffusion intervient dans la loi d'évolution de la longueur de portée (paragraphe 4). Ces expériences numériques (détaillées au paragraphe 5.3) ont mis en avant un écart trop important entre l'évolution théorique et expérimentale de la longueur de portée. Ces différences ainsi que le terme κ' de diffusion inverse issu de l'équation équivalente nous a amenés à changer de méthode numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

De plus, en ce qui concerne le terme dispersif, ce dernier déforme les signaux propagés. En effet, la vitesse de phase est alors dépendante de la fréquence, et les différentes composantes d'un signal ne se déplacent pas à la même vitesse. D'autant plus que dans certains cas, une des trois conditions CFL impose $\kappa' = 0$. Enfin, les deux autres termes, dispersif et diffusif d'ordre 4, affectent particulièrement les petites échelles, ce qui amène à un choix de paramètres dit "limites" lors des simulations afin de s'en affranchir. Pour plus de détails, voir l'annexe A.2 ainsi que le paragraphe 5.3.

Nous avons donc fait le choix d'une autre méthode concernant le schéma temporel, détaillée dans le paragraphe suivant.

2.2.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On cherche à résoudre le problème écrit sous la forme :

$$\frac{dh}{dt}(x, t) = f(t, h) \quad (2.13)$$

où f s'exprime à partir de l'équation d'advection-diffusion et s'écrit

$$\begin{cases} f(t, h) = \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - c \frac{\partial h}{\partial x} \\ h(0, t) = q(t) \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad x > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Les conditions aux limites sont toujours les suivantes

$$\frac{\partial h}{\partial t}(l, t) + c \frac{\partial h}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (2.15)$$

L'expression de f sous forme discrète est alors :

$$\begin{cases} f(t, h^i) = -c \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} + \kappa \frac{h_{j+1}^i - 2h_j^i + h_{j-1}^i}{\Delta x^2} & j \in [2, N-1] \\ f(t, h^i) = -c \frac{h_N^i - h_{N-1}^i}{\Delta x} & j=N \end{cases} \quad (2.16)$$

Et lorsque $j = N$ on écrit les conditions aux limites ouvertes⁶, aussi appelée sortie libre. Ici la particularité de la fonction f est qu'elle ne modifie pas la valeur de $h(1, t)$.

Nous allons utiliser une méthode directement dérivée de la méthode d'Euler : la méthode de Runge-Kutta (notée RK), d'ordre 4 (voir en Annexe).

C'est une méthode à pas unique. Afin de pallier aux défauts de la méthode d'Euler, on remplace l'évaluation de la dérivée au point $M_n(t^i, h^i)$ par une moyenne des dérivées sur l'intervalle $[0, \Delta t]$.

Cette méthode requiert 4 évaluations de $f(t, h)$ par pas d'intégration Δt : une au point de départ de l'intervalle, 2 au demi-intervalle, et une à la fin de l'intervalle. Notons alors $f(t, h^i)$ comme étant $f(t, h^i)$ i.e f dépendant de la hauteur d'eau h^i à l'instant i et pour une intégration sur Δt . Voici la méthode RK4 :

On note ici y_i comme les vecteurs de N points en espace à l'instant i ,

$$\begin{aligned} & y_0, \\ & k_1 = \Delta t f(t, y_0) \quad y_1 = y_0 \quad y_1 = y_0 + \frac{k_1}{2}, \\ & k_2 = \Delta t f(t + \frac{\Delta t}{2}, y_1) \quad y_2 = y_0 \quad y_2 = y_0 + \frac{k_2}{2}, \\ & k_3 = \Delta t f(t + \frac{\Delta t}{2}, y_2) \quad y_3 = y_0 \quad y_3 = y_0 + k_3, \\ & k_4 = \Delta t f(t + \Delta t, y_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

On calcule alors la valeur de h discrétisée, notée h^i en sommant ces quatres termes

$$h^{i+1} = h^i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(\Delta t^5)$$

2.2.4 Euler vs Runge-Kutta

Phénomène de diffusion inverse

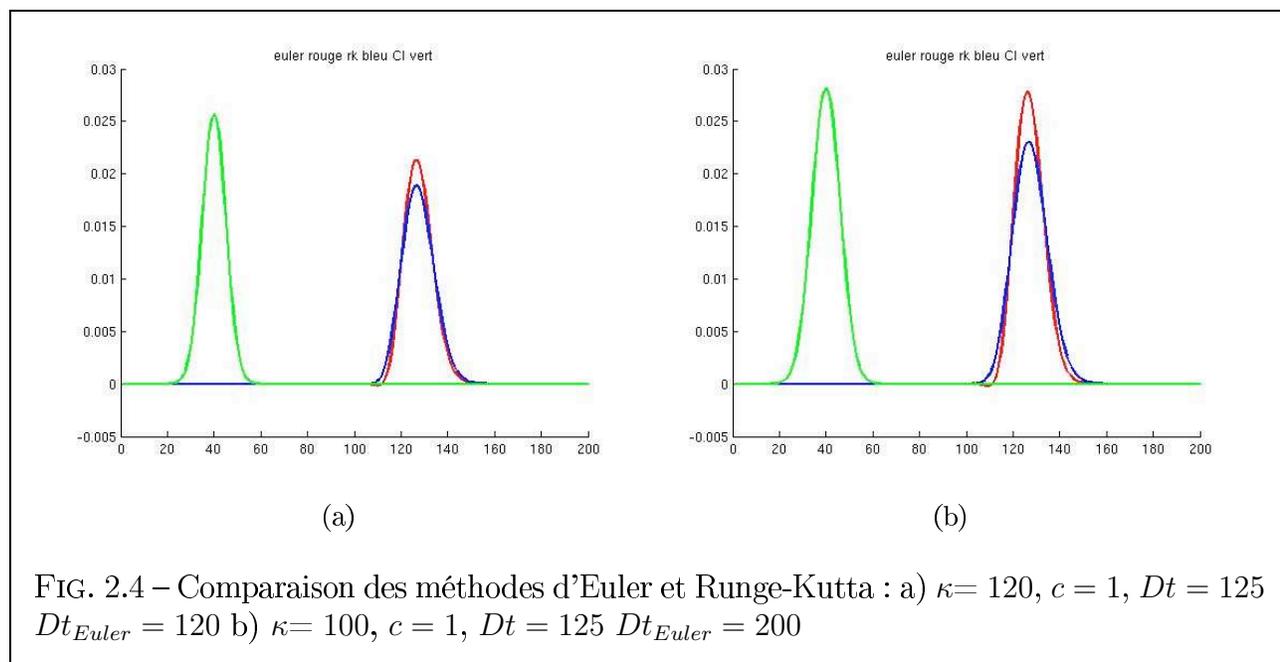
Observons alors l'advection et la diffusion d'un signal avec une condition initiale gaussienne peu étalée ici en vert (figure 2.4), la solution numérique en rouge issue de la méthode d'Euler présente une diffusion "négative" due au terme $\kappa' \leq 0$ alors que celle en bleu issue du schéma numérique de Runge-Kutta répond à nos attentes. En effet, plaçons nous dans le référentiel

⁶voir les équations (2.4).

en translation, il ne reste que le processus de diffusion. Le signal issu de la méthode d'Euler ne présente pas de diminution d'amplitude au cours du temps contrairement à celui issu de la méthode de RK4. Selon les valeurs prises par le terme κ' :

si $\kappa' \leq 0$, la méthode d'Euler présente ce que l'on a appelé de la diffusion inverse. (voir la Figure 2.4a))

si $\kappa' = 0$, la méthode d'Euler ne présente pas de diffusion contrairement à celle de RK4. (voir la Figure 2.4b))



Précisons les notions de temps caractéristique d'advection (*i.e.* le temps qu'il faut à une perturbation pour être advecté de l'entrée à la sortie du domaine) ainsi que le temps caractéristique de diffusion. Ainsi, lors des simulations comparées, il faut veiller à choisir un temps de diffusion similaire pour les deux schémas qui utilisent des pas de temps différents. Enfin le temps de simulation doit lui aussi être supérieur au temps d'advection pour que la simulation soit représentative.

Phénomène de dispersion

L'équation équivalente nous a permis de mettre en avant un phénomène dit de dispersion qui déforme les signaux lors d'expériences numériques utilisant des conditions initiales riches en petites échelles. En effet si la condition initiale utilisée lors de l'advection-diffusion d'un signal, est à hautes fréquences alors le terme de dispersion aura un poids conséquent sur la forme du signal. Les vitesses de diffusion de groupe sont différentes les unes par rapport aux autres : les composantes des signaux ne se déplacent pas à la même vitesse. Il apparaît alors un phénomène de déphasage déformant les signaux, comme nous pouvons l'observer sur les figures suivantes (Figure 2.5). D'une part en choisissant une condition initiale gaussienne de faible extension spatiale, et d'autre part avec une condition initiale discontinue. Pour cette dernière, les deux schémas numériques présentent un phénomène de dispersion, toujours lié à la présence de petites échelles.

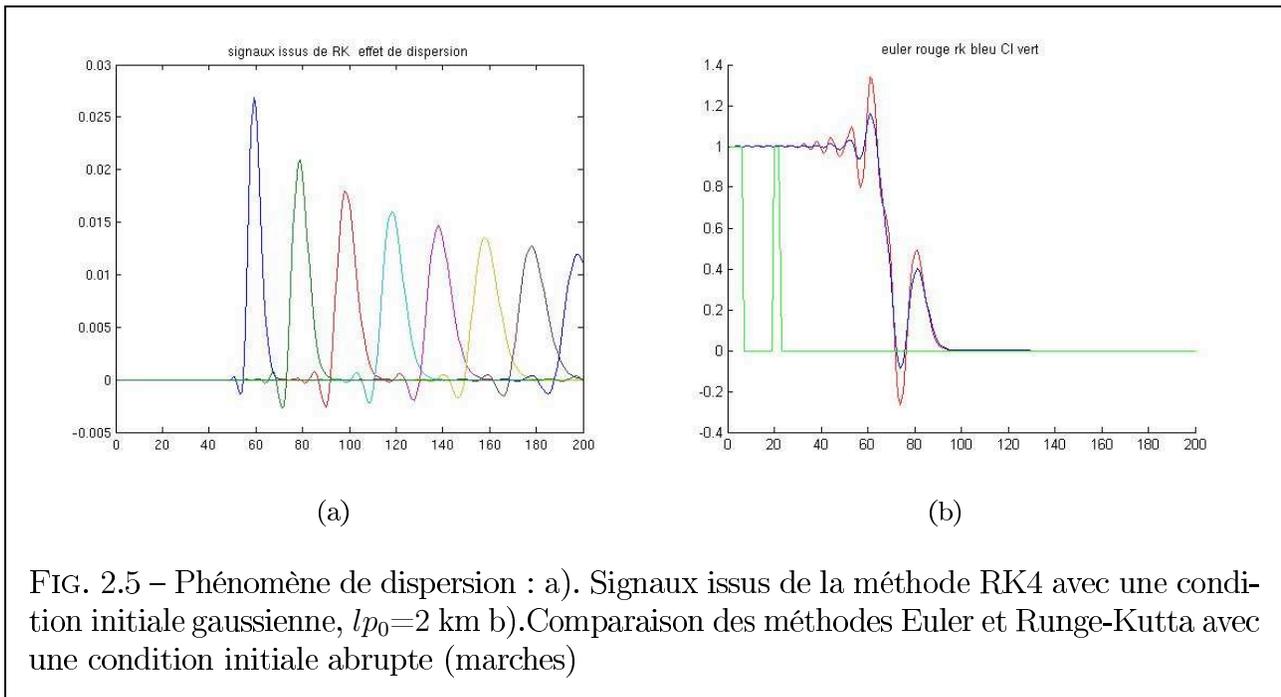


FIG. 2.5 – Phénomène de dispersion : a). Signaux issus de la méthode RK4 avec une condition initiale gaussienne, $lp_0=2$ km b). Comparaison des méthodes Euler et Runge-Kutta avec une condition initiale abrupte (marches)

Enfin la méthode d'Euler est peu utilisée en pratique car elle requiert des pas de temps petits pour atteindre une précision suffisante lors du calcul de la solution approchée du problème différentiel. Afin de diminuer des coûts associés en temps et précision il convient donc d'utiliser la méthode de Runge-Kutta.

Chapitre 3

Construction du forçage amont

La condition en amont du bief se répercute à la fois dans la physique du problème et aussi dans l'algorithme d'assimilation de données (section FK). Les signaux advectés au fur et à mesure du bief garderont en "mémoire" le forçage imposé, contrairement aux conditions initiales, oubliées lors de la propagation.

On suppose que q est une fonction aléatoire qui possède une statistique gaussienne d'écart type q_m et une fonction d'auto-covariance temporelle :

$$\rho_{forçage}(\delta t) = \langle q(t)q(t + \delta t) \rangle = q_m^2 \exp\left(-\frac{\delta t}{2\tau^2}\right) \quad (3.1)$$

Cette hypothèse découle du choix fait sur la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} . En effet les erreurs sont caractérisées par des lois gaussiennes. Les signaux de hauteurs d'eau sont donc définis dans ce but. Ils présentent alors une covariance *spatiale gaussienne* induite par le forçage amont q spécifié dans ce chapitre.

3.1 Construction de la réponse impulsionnelle et fonction d'auto-covariance

Nous souhaitons imposer en amont du bief un signal de hauteur d'eau de covariance *spatiale* gaussienne. Pour cela, on construit la fonction aléatoire q de fonction d'auto-covariance comme précédemment définie (définition 3.1).

Une première étape consiste à construire le signal de covariance *temporelle* gaussienne à l'aide d'une décomposition de Fourier.[Pannekoucke, 2010]. Puis d'utiliser ce signal pour forcer le modèle d'advection-diffusion à son bord à chaque pas de temps.

3.1.1 Mise en évidence des coefficients de coloration Gaussienne.

Pour cela, on considère un bruit blanc ζ défini par sa décomposition de Fourier

$$\zeta(t) = \sum_n \zeta_n e_n(t), \quad \zeta_n \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Les ζ_n sont donc des variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite. En particulier, l'indépendance deux à deux des variables aléatoires ζ_n impose la propriété suivante :

$$\langle \zeta_p \zeta_q^* \rangle = \delta_{pq}. \quad (3.2)$$

où δ_{pq} est le symbole de Kronecker.

Soit L un filtre. La fonction q est la réponse impulsionnelle de L . Cet opérateur linéaire permet d'obtenir à partir du bruit blanc ζ , le bruit de covariance gaussienne voulu. Soit enfin e_n vecteur propre de L , tel que

$$Le_n = l_n e_n, \quad l_n \text{ les valeurs propres associées.} \quad (3.3)$$

Il vient alors :

$$q(t) = L\zeta(t) = \sum_n \zeta_n l_n e_n(t). \quad (3.4)$$

Il suffit alors de déterminer les l_n pour construire le signal voulu. En effet les ζ_n assurent le caractère aléatoire, tandis que les l_n assurent la coloration Gaussienne (i.e la covariance temporelle Gaussienne) du signal.

3.1.2 Expression explicite à l'aide de la fonction d'auto-covariance.

Une façon d'accéder aux coefficients l_n nécessaires à la fabrication du signal d'entrée q est d'écrire la décomposition de Fourier de la fonction d'auto-covariance que l'on s'est donnée :

$$\rho(\delta t) = \langle q(t)q(t + \delta t)^* \rangle.$$

Il vient alors en utilisant la définition de q à partir de l'équation 3.4 et la propriété 3.2 :

$$\begin{aligned} \rho(\delta t) = \langle q(t)q(t + \delta t)^* \rangle &= \sum_{p,q} \langle (\zeta_p l_p e_p(t)) (\zeta_q l_q e_q(t + \delta t))^* \rangle \\ &= \sum_{p,q} \langle \zeta_p \zeta_q^* \rangle l_p l_q^* e_p(t) e_q(t + \delta t)^* \\ &= \sum_p l_p l_p^* e_{-p}(\delta t) \\ \rho(\delta t) &= \sum_p |l_p|^2 e_p(\delta t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

La phase permet simplement de décaler le signal dans le temps, ce qui n'est pas important ici.

A partir de la décomposition de Fourier de la fonction d'auto-covariance ρ choisie gaussienne (définition (3.1)), on obtient selon la base des e_n :

$$\rho(\delta t) = \sum_n \rho_n e_n(\delta t).$$

Par identification avec l'équation (3.5), il vient alors que $|l_n|^2 = |\rho_n|$ et

$$q(t) = \sum_n \zeta_n l_n e_n(t) = \sum_n \zeta_n \sqrt{|\rho_n|} e_n(t).$$

Voici l'algorithme permettant de réaliser la fonction d'entrée présentée sur la figure 3.1a. est détaillé ci-après :

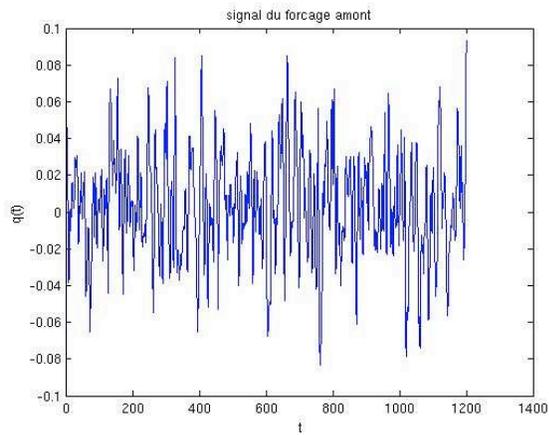
```

> $\rho(t) = e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$ 
% On effectue une discrétisation spatiale.
> $\rho$ 
% vecteur contenant la discrétisation spatiale de  $\rho$ ; ( $\rho_n$ )
> $\hat{\rho} = \text{fft}(\rho)$ 
% Vecteur contenant les coefficients spectraux de  $\rho$ .
> $\zeta$  = vecteur de la même taille que  $\rho$  rempli avec des tirages aléatoires selon une loi
normale centrée réduite.
> $\hat{q} = \sqrt{|\hat{\rho}|} * \zeta$ 
% Opération terme à terme.
% Vecteur contenant les coefficients spectraux de  $q$ ; ( $\zeta_n \sqrt{|\rho_n|}$ )
> $q = \text{fft}^{-1}(\hat{q})$ 
% Vecteur de sortie, forçage amont.

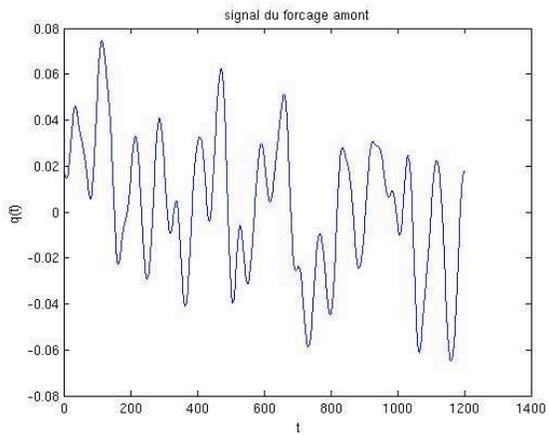
```

3.2 Influence du temps caractéristique τ

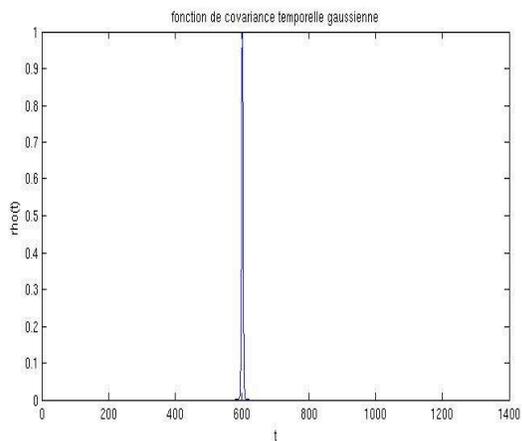
Afin de mettre en évidence l'influence du temps caractéristique τ sur la construction du forçage amont, voici les graphes pour différentes valeurs (voir la Figure 3.1 a) à d)). Pour de petits temps caractéristiques, on observe un signal de basse fréquence et une fonction de covariance gaussienne correspondante (faible écart de la gaussienne), inversement pour des temps caractéristiques plus élevés. Les Figures 3.1 e)-f) illustrent ainsi l'influence du débit amont q sur la propagation du signal de hauteur d'eau le long du bief. On remarque alors la "trace" laissée par le débit amont défini comme ci-dessus (définition 3.1) sur le signal advecté et diffusé.



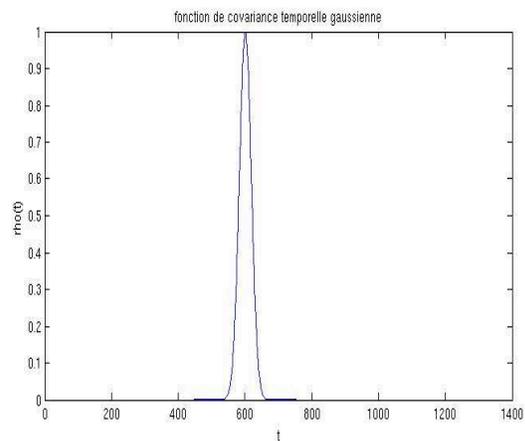
(a)



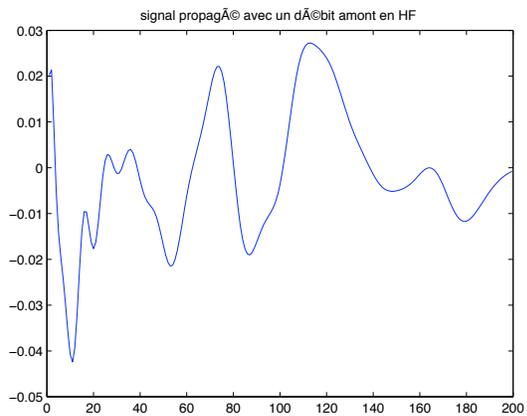
(b)



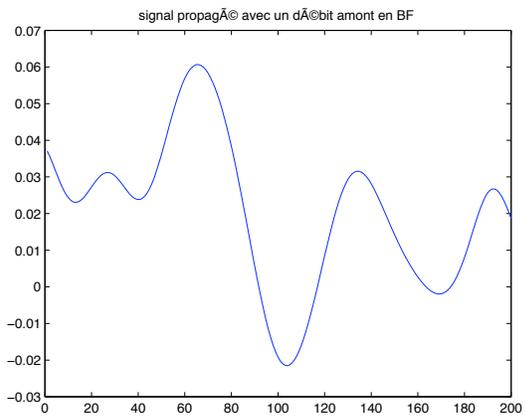
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 3.1 – Exemple de réalisation de forçage amont avec fonction de covariance temporelle associée et signaux diffusés pour $q_m = 1$ a)-c)-e). $\tau = 2.10^3 s$ et b)-d)-f). $\tau = 15.10^3 s$.

Chapitre 4

Dynamique des covariances : évolution des longueurs de portée

Dans le contexte de l'assimilation de données, les corrélations spatiales des erreurs d'ébauche influencent directement la façon dont l'information observée est filtrée et propagée spatialement. L'étude se tourne désormais vers l'étude de la propagation des fonctions de covariances, et plus particulièrement vers la dynamique des portées de corrélation d'erreurs d'ébauche : l'évolution des longueurs de portée. Dans cette partie sera traitée l'aspect théorique de la propagation de fonctions de covariance par la dynamique de l'équation d'advection-diffusion. L'intérêt ici est de pouvoir condenser l'information contenue dans la fonction de covariance, en une longueur. Dans la première partie de ce chapitre, nous mettons en avant la variation croissante en x de la longueur de portée. Puis dans la seconde partie, dans le cas d'une observation, l'évolution de la longueur de portée présente une brutale réduction vers l'aval.

4.1 Dynamique des covariances sans observations

Le but de cette partie est de trouver analytiquement la forme de la covariance spatiale d'un signal propagé par l'équation 2.3. Une méthode possible est de résoudre analytiquement la propagation du signal $h(x, t)$, avant d'écrire la fonction d'auto-covariance spatiale de la solution. Formellement le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ h(0, t) = q(t) \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad x > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où c la vitesse d'advection, κ le coefficient de diffusion, $q(t)$ la condition limite en $x = 0$, et h_0 la condition initiale.

Le forçage en temps q peut être vu comme une superposition de signaux harmoniques sinusoidaux :

$$q(t) = \int q_\omega e_\omega(t) d\omega.$$

où q_ω sont des réalisations d'une variable aléatoire

En effet la fonction q , ici supposée réelle, est construite aléatoirement (voir le chapitre 3), ceci implique la propriété suivante :

$$\langle q_{\omega 1} q_{\omega 2}^* \rangle = |q_{\omega 1}|^2 \delta_{12}, \quad (4.2)$$

où δ_{12} est le symbole de Kronecker.

De plus, le cas réel, impose la condition : $|q_\omega|^2 = |q_{|\omega|}|^2$. La fonction d'auto-covariance, en utilisant la propriété 4.2 est alors donnée par :

$$\rho(\delta t) = \langle q(t)q(t + \delta t)^* \rangle = \int \rho_\omega e^{i\omega\delta t} d\omega = \int |q_\omega|^2 e^{i\omega\delta t} d\omega \quad (4.3)$$

Comme nous l'avons défini au chapitre 3, le signal $q(t)$ possède un bruit Gaussien¹. Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \rho(\delta t) = e^{-\delta t^2/2\tau^2} \\ |q_\omega|^2 = \rho_\omega = e^{-\omega^2\tau^2/2} \end{cases}$$

La linéarité du problème permet lors de la résolution de considérer un forçage sinusoïdal $q(t) = q_\omega e^{-i\omega t}$. En décomposant la solution sous la forme séparée $h(x, t) = q_\omega e^{-i\omega t} h_\omega(x)$. La solution générale est dès lors reconstruite à l'aide du théorème de superposition telle que :

$$\begin{cases} h(x, t) = \int q_\omega e^{-i\omega t} h_\omega(x) d\omega. \\ h_\omega(0) = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Soit f_t la fonction d'auto-covariance *spatiale* du signal, à un instant donné :

$$f_t(x, x + \delta x) = \langle h(x, t)h(x + \delta x, t)^* \rangle, \quad (4.5)$$

permettant de déduire des propriétés sur les longueurs de portée.

4.1.1 Cas de l'advection pure

Résolution de l'équation aux dérivées partielles

Dans ce cas, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ h(x, t) = q_\omega e^{-i\omega t} h_\omega(x) \\ h_\omega(0) = 1 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation pronostique, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow -i\omega h_\omega + c h'_\omega = 0 \Leftrightarrow h'_\omega = \frac{i\omega}{c} h_\omega \\ \begin{cases} h'_\omega = \frac{i\omega}{c} h_\omega \\ h_\omega(0) = 1 \end{cases} &\quad (4.6) \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation différentielle ordinaire sont de la forme : $h(x, t) = C_{st} e^{i\omega \frac{x}{c}}$. En utilisant la condition initiale, il vient en notant $k = \frac{\omega}{c}$

$$h(x, t) = q_\omega e^{ik(x-ct)}.$$

On utilise alors la linéarité du problème pour en déduire la solution complète :

$$\begin{cases} q(t) = \int q_\omega e^{-i\omega t} d\omega \\ h(x, t) = \int q_\omega e^{ik(x-ct)} d\omega. \end{cases}$$

¹i.e. coloration Gaussienne d'un bruit blanc

Détermination des covariances spatiales

Cherchons alors à déterminer le tenseur des covariances spatiales en un instant donné :

$$\begin{aligned}
 f_t(x, x + \delta x) &= \langle h(x, t)h(x + \delta x, t)^* \rangle \\
 &= \langle \int_{\omega} q_{\omega} h_{\omega}(x) d\omega \int_{\beta} q_{\beta}^* h_{\beta}(x + \delta x)^* d\beta \rangle \\
 &= \int |q_{\omega}|^2 h_{\omega}(x) h_{\omega}(x + \delta x)^* d\omega \\
 &= \int |q_{\omega}|^2 e^{i\omega \delta x / c} d\omega
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

On reconnaît la fonction d'auto-covariance de la fonction q en posant $\delta t = \delta x / c$.

$$f_t(x, x + \delta x) = \rho(\delta x / c)$$

La fonction f_t est stationnaire en temps en raison de la stationnarité statistique du forçage q . Elle sera donc notée f .

Conclusion pour le cas d'advection pure

Ainsi la fonction de d'auto-covariance f de la solution h est reliée à la fonction d'auto-covariance du forçage amont par la quantité notée $Lp = c\tau$. En effet,

$$\begin{aligned}
 f(x, x + \delta x) &= \rho(\delta x / c) \\
 \rho(\delta x / c) &= e^{\frac{-\delta x^2}{2(c\tau)^2}} = e^{\frac{-\delta x^2}{2Lp^2}}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cette fonction ne dépend ni du temps t , ni de la position x , mais uniquement de la distance entre deux points du domaine. La solution analytique de Lp dans le cadre du forçage considéré, est

$$Lp = \text{Constante} = c\tau, \tag{4.9}$$

avec τ le temps caractéristique d'auto-corrélation de la condition aux limites défini au chapitre 3.

4.1.2 Cas de l'advection diffusion

Résolution de l'EDP

Dans ce cas, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ h(x, t) = q_{\omega} e^{-i\omega t} h_{\omega}(x) \\ h_{\omega}(0) = 1 \end{cases}$$

En remplaçant la forme de la solution dans l'équation pronostique, il apparaît une équation différentielle en h_{ω} :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Leftrightarrow -i\omega h_{\omega} + c h'_{\omega} = k h''_{\omega} \Leftrightarrow k h''_{\omega} + \frac{i\omega}{c} h_{\omega} - h'_{\omega} = 0$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle est :

$$kZ^2 - cZ + i\omega = 0$$

Les racines de ce polynôme sont : $z^{+/-} = \frac{c}{2k} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4i\omega k}}{2k}$ ce qui permet d'en déduire la forme des solutions de l'équation différentielle :

$$h_\omega(x) = Ae^{z^+x} + Be^{z^-x}$$

Où les constantes sont fixées par les conditions aux limites du problème. En particulier, si $A \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} |h_\omega(x)| = \infty$. Cette solution étant physiquement absurde, on en déduit que $A = 0$. De plus, on a $h_\omega(0) = 1$, ce qui donne $B = 1$. La solution de l'équation différentielle ordinaire est donc pour un signal harmonique :

$$h_\omega(x) = e^{(\frac{c}{2k} - \frac{\sqrt{c^2 - 4i\omega k}}{2k})x}$$

On utilise alors la linéarité du problème pour en déduire la solution complète :

$$\begin{cases} q(t) = \int q_\omega e^{-i\omega t} d\omega \\ h(x, t) = \int q_\omega e^{(\frac{c}{2k} - \frac{\sqrt{c^2 - 4i\omega k}}{2k})x - i\omega t} d\omega \end{cases}$$

On note qu'en considérant un cas avec une diffusion peu intense, $k \ll 1$, la racine du polynôme caractéristique se simplifie : $z \approx i\frac{\omega}{c} - \frac{\omega^2 k}{c^3}$. L'ordre zéro, permet de retrouver la solution de l'advection pure, et l'ordre un permet de corriger cette solution par un terme d'atténuation en $e^{-\frac{\omega^2 k}{c^3}x}$.

Détermination des covariances spatiales

Il reste à déterminer le tenseur des covariances spatiales. Il s'agit donc d'évaluer en un instant donné, la quantité : $f(x, x + \delta x) = \langle h(x, t)h(x + \delta x, t)^* \rangle$. Il vient ainsi que :

$$\begin{aligned} f(x, x + \delta x) &= \langle h(x, t)h(x + \delta x, t)^* \rangle \\ &= \left\langle \int_\omega q_\omega h_\omega(x) d\omega \int_\beta q_\beta^* h_\beta(x + \delta x)^* d\beta \right\rangle \\ &= \int |q_\omega|^2 h_\omega(x) h_\omega(x + \delta x)^* d\omega \end{aligned} \tag{4.10}$$

En considérant alors l'approximation à l'ordre 1 de la diffusion, il vient alors que :

$$f(x, x + \delta x) = \int \left(|q_\omega|^2 e^{-\omega^2 k(2x + \delta x)/c^3} \right) e^{i\omega \delta x/c} d\omega$$

La première remarque à faire est que le tenseur des covariances spatiales, ne dépend toujours pas du temps, mais dépend cependant cette fois-ci de la position x . De plus, en remplaçant $|q_\omega|^2$ par sa valeur.

$$\begin{aligned} f(x, x + \delta x) &= \int \left(e^{-\omega^2/2(\tau^2 + 4kx/c^3 + 2k\delta x/c^3)} \right) e^{i\omega \delta x/c} d\omega \\ &\underset{\delta x \ll 1}{\approx} \int \left(e^{-\omega^2/2(\tau^2 + 4kx/c^3)} \right) e^{i\omega \delta x/c} d\omega \\ &\underset{\delta x \ll 1}{\approx} \int e^{-\omega^2 Lp_x^2/2} e^{i\omega \delta x/c} d\omega \\ &\underset{\delta x \ll 1}{\approx} e^{-\delta x^2/2Lp_x^2} \end{aligned} \tag{4.11}$$

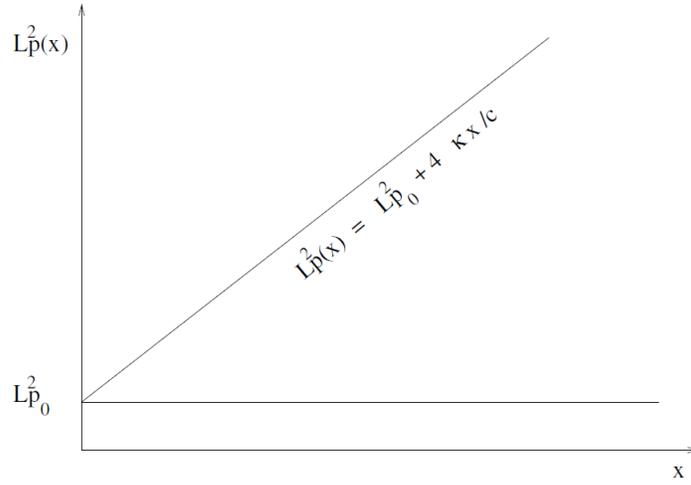


FIG. 4.1 – Représentation de la longueur de portée théorique, dans le cas d’une advection diffusion (droite croissante) et d’une advection pure (droite horizontale).

Ce calcul nous donne donc une estimation de Lp donnée par la relation :

$$Lp_x^2 = c^2(\tau^2 + 4kx/c^3) = Lp_0^2 + 4kx/c. \quad (4.12)$$

4.1.3 Bilan de la dynamique des longueurs de portée sans assimilation

Dans le cas d’une advection pure, la solution analytique de Lp dans le cadre du forçage considéré, est (Fig. 4.1) :

$$Lp = Constante = c\tau, \quad (4.13)$$

avec τ le temps caractéristique d’auto-corrélation défini comme précédemment.

Dans le cas d’une advection diffusion, une estimation de Lp en supposant que la fonction de covariance est localement gaussienne (on se place dans le cas où $\delta x \ll 1$). Cette estimation est donnée par la relation (Fig. 4.1) :

$$Lp_x^2 = c^2(\tau^2 + 4kx/c^3) = Lp_0^2 + 4kx/c. \quad (4.14)$$

4.2 Dynamique des covariances avec observation

Le cas avec observation est beaucoup plus compliqué à mettre en œuvre analytiquement. L’assimilation de données implique une diminution de la variance au point d’observation. La propagation des covariances vers l’aval entraîne alors une diminution de la longueur de portée en aval du point d’observation (Fig. 4.2). La diminution de cette variance étant dépendante du rapport² σ_o^2/σ_b^2 , la diminution de la longueur de portée l’est également .

² σ_o^2 , la variance des erreurs d’observations et σ_b^2 la variance des erreurs sur l’ébauche

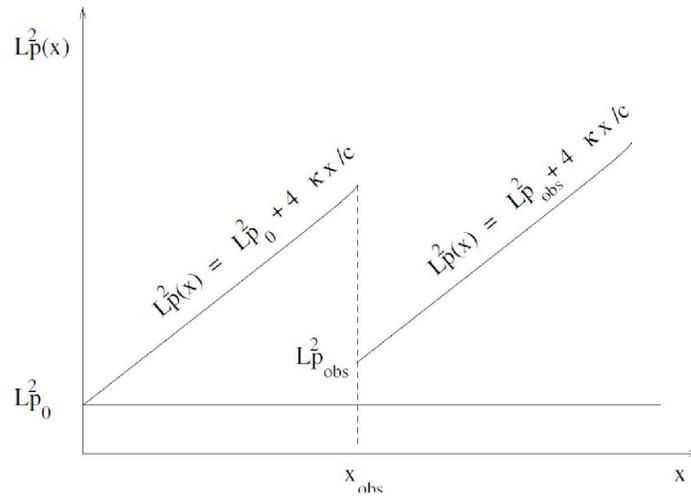


FIG. 4.2 – Longueurs de portée théoriques avec une observation.

On se propose alors d'établir un abaque du rapport des longueurs de portée entre l'aval et l'amont au point d'observation en fonction du rapport des variances. Cet abaque a pour but de tenter de paramétrer la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche de l'assimilation dans un BLUE pour le modèle MASCARET.

Troisième partie

Systeme d'assimilation de données pour la dynamique du modèle

Chapitre 5

Méthode d'ensemble

Le chapitre 4 présente formellement la propagation des fonctions de covariance pour le schéma numérique utilisé. Dans ce chapitre, une brève description de l'estimation de la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche \mathbf{B} est faite, ainsi que la vérification expérimentale des résultats mathématiques. Pour cela on réalise le diagnostic des longueurs de portée dans le cas d'une advection seule et dans celui d'une advection diffusion sans assimilation. Nous présentons aussi les différences et améliorations des deux méthodes numériques utilisées et le choix des paramètres en vue de l'utilisation de ces résultats dans le système d'assimilation de données.

Hypothèses et enjeux en vue de l'assimilation de données

Dans le but de générer la matrice \mathbf{B} introduite dans le modèle d'assimilation de données, les erreurs d'ébauche sont caractérisées par des lois gaussiennes. Par conséquent, les signaux sont définis dans ce but et possèdent une covariance spatiale gaussienne. Ce choix, comme on a pu le voir dans le chapitre 3, impose un débit en amont particulier. Suite à ce choix, d'autres paramètres entrent en jeu. Notamment le temps τ caractéristique se répercute sur la valeur des longueurs de portée à l'entrée du bief (voir la section 5.3). Du fait que chaque source d'information, qu'il s'agisse de l'ébauche ou des observations, présente des erreurs il est important de justement en tenir compte. On cherche par la suite à avoir une connaissance statistique des erreurs car il n'est pas raisonnable de les déterminer parfaitement. On détermine alors la matrice de covariance d'erreur d'ébauche à l'aide d'une méthode d'ensemble. Enfin, à l'issue de l'estimation statistique (*i.e* ensembliste) de la matrice \mathbf{B} , nous souhaitons obtenir le diagnostic des longueurs de portée. Celles-ci, après calibration, seront ré-utilisées lors de la formulation de l'opérateur de diffusion détaillée au chapitre 6. Nous verrons au cours du chapitre 7, de quelle manière la méthode ensembliste associée à l'outil opérateur de diffusion nous permet de modéliser une matrice \mathbf{B} en but de l'utiliser dans un algorithme de type BLUE.

5.1 Diagnostic de \mathbf{B} et des longueurs de portée sans assimilation

La réalisation de ce diagnostic nécessite la détermination de la matrice \mathbf{B} . Une méthode ensembliste permet d'en obtenir une estimation. Désormais, les matrices de covariances d'erreurs déterminées via la méthode ensembliste seront indicées par e .

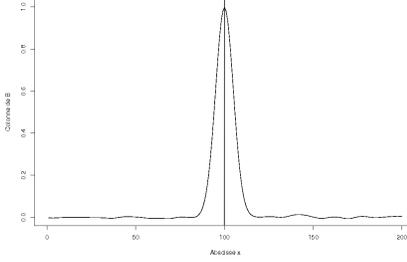


FIG. 5.1 – Tracé d’une colonne de \mathbf{B}_e au point central du domaine.

5.1.1 Calcul de la matrice de covariances d’erreurs d’ébauche

L’estimation de la matrice \mathbf{B}_e est faite statistiquement à partir de la réalisation d’un ensemble de propagations de signaux d’entrée $q(t)$ différents¹. Afin d’obtenir une matrice sans bruit d’échantillonnage, ce travail est réalisé sur un échantillon de grande taille. Chaque forçage est propagé le long de la rivière. Le temps de propagation est choisi de façon à ce que le signal q ait pu atteindre la limite aval du domaine. Les différents vecteurs (\mathbf{X}_k) , $k \in [1, N_e]$ sont gardés en mémoire (vecteur de taille N contenant la perturbation de la hauteur d’eau en chaque point de discrétisation spatiale). La matrice de covariances d’erreurs spatiales \mathbf{B}_e est alors directement déterminée à partir des vecteurs (\mathbf{X}_k) en calculant les covariances entre les différents vecteurs :

$$\mathbf{B}_e = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} ((\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}})^T),$$

en notant $\bar{\mathbf{X}} =$ Vecteur des moyennes en chaque point sur l’ensemble des membres.

Par construction \mathbf{B}_e est carrée, de dimension N^2 et symétrique positive, mais pas nécessairement définie. En effet, son rang est au plus N . La figure 5.1 montre le tracé d’une colonne de \mathbf{B}_e quelconque. On y voit l’allure de la fonction de covariance au point central du domaine.

5.1.2 Calcul des longueurs de portée

A partir de cette matrice \mathbf{B}_e qui contient une estimation statistique des fonctions de covariances, on peut calculer les longueurs de portée amont et aval au point courant. La formule utilisée pour la longueur de portée est celle décrite dans le paragraphe 1.4. Le choix a également été fait de travailler sur les fonctions de corrélation plutôt que sur les fonctions de covariance étant donné que la définition de longueur de portée est valable pour les fonctions de corrélations. Finalement,

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(\delta x) = \frac{\mathbf{B}_e(i, i+1)}{\sqrt{\mathbf{B}_e(i, i)\mathbf{B}_e(i+1, i+1)}} \quad \text{et} \quad \rho(-\delta x) = \frac{\mathbf{B}_e(i, i-1)}{\sqrt{\mathbf{B}_e(i, i)\mathbf{B}_e(i-1, i-1)}}.$$

Combiné aux équations 1.12 cela nous fournit l’expression diagnostique des longueurs de portée respectivement amont et aval :

¹par tirage aléatoire

$$L_p^+ = \frac{\delta x}{\sqrt{2(1 - \rho(\delta x))}} \quad \text{et} \quad L_p^- = \frac{-\delta x}{\sqrt{2(1 - \rho(-\delta x))}} \quad (5.1)$$

5.2 Résultats des expériences sans assimilation

Modèle avec advection seule

Dans le cadre de l'advection seule, le signal d'entrée q est simplement propagé au cours du temps vers l'aval sans qu'il ne subisse aucune modification. D'après l'expression de la longueur de portée définie telle que : $Lp = c\tau$, on s'attend à obtenir une longueur de portée constante par rapport à x sur l'ensemble du domaine. De plus $L_p^- = L_p^+$ implique que la fonction de covariance spatiale est identique (par rapport au point considéré) d'une limite à l'autre du domaine.

Pour cette simulation nous avons utilisés les paramètres numériques et physiques suivants :

κ	c	τ	N_e	Dt	l	$T_{\text{tempsdesimulation}}$
120	1	5 km	7000	125	200 km	l/c s

TAB. 5.1 – paramètres pour la simulation d'advection pure.

Sur la Figure (5.2 .a) sont superposées les trois fonctions de covariances en différents points. La fonction de covariance est donc, au même titre que le signal lui même, simplement translatée par la schéma numérique sans être déformée. A l'issue de l'estimation de la matrice B_e , les longueurs de portée diagnostiquées sont conformes aux attentes théoriques : l'évolution est constante par rapport à x . (voir Figure 5.2 .b)

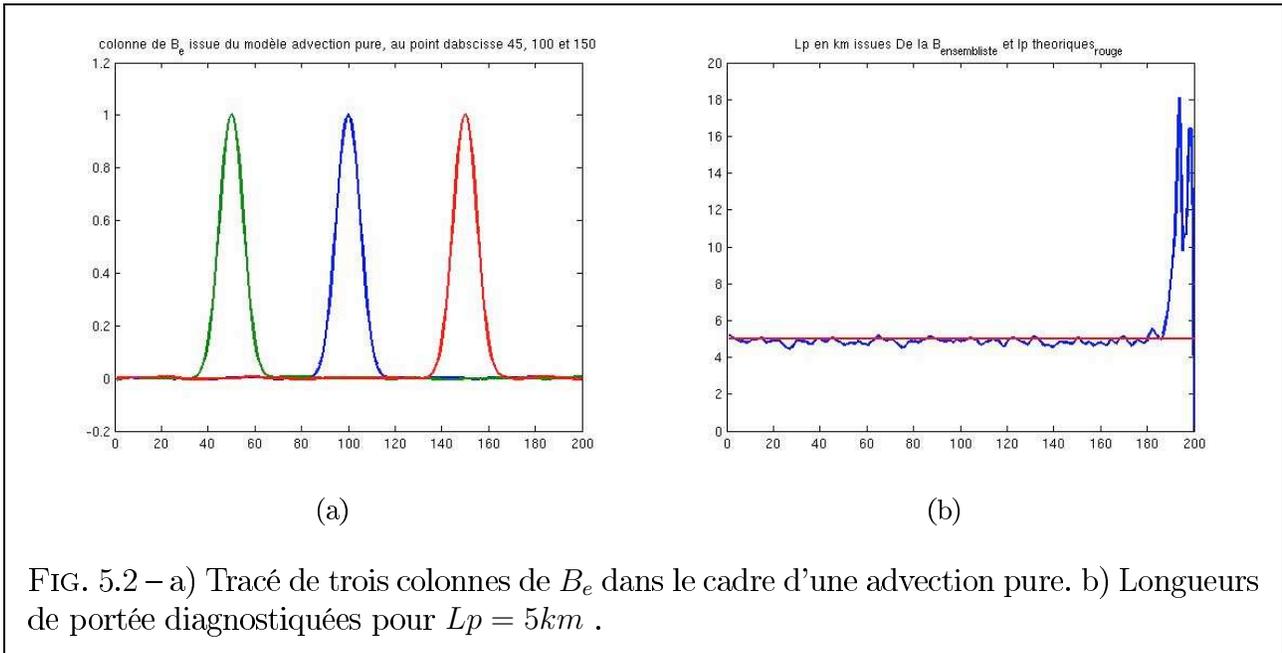


FIG. 5.2 – a) Tracé de trois colonnes de B_e dans le cadre d'une advection pure. b) Longueurs de portée diagnostiquées pour $Lp = 5km$.

5.3 Calibration des paramètres du modèle d'advection-diffusion

Avant de présenter les résultats obtenus pour le modèle d'advection-diffusion, nous allons discuter du choix des paramètres afin d'obtenir un diagnostic des longueurs de portée en adéquation avec, d'une part le domaine physique et d'autre part, s'affranchissant des phénomènes numériques.

Dans un premier temps, nous avons du choisir un temps caractéristique d'auto-corrélation τ en accord avec les dimensions du domaine $L = 200$ km. Soit par exemple, $\tau = 2.10^3$ s afin d'obtenir une longueur de portée initiale $Lp_0 = 2$ km, amorcée par le forçage amont $q(t)$.

D'après le bilan réalisé pour la dynamique des longueurs de portée sans assimilation, dans le cas d'une advection-diffusion, l'estimation de L_p (toujours en supposant que la fonction de covariance est localement gaussienne) est donnée par l'expression :

$$Lp^2(x) = Lp_0^2 + 4\kappa \frac{x}{c}.$$

5.3.1 Choix du coefficient de diffusion.

Il vient alors que pour de trop grandes valeurs de κ les longueurs de portée diagnostiquées ne reflètent plus le choix fait pour le temps caractéristique τ et donc celui fait pour Lp_0 , lors de la diffusion des signaux le long du bief.

En effet si $\kappa \gg 1$, le terme en $c^2\tau^2$ devient négligeable devant $\kappa \frac{x}{c}$.

1^{er} jeu de paramètres : valeur de κ élevée, pour un temps T de diffusion.

De ces premiers résultats, pour des valeurs de κ comprises entre [1250 – 3000], les longueurs de portée diagnostiquées en aval notamment, sont trop élevées. En effet pour être en accord avec la dimension du domaine choisie, on s'attendrait à des valeurs comprises entre 10 et 20 km en sortie de domaine. En effet les échelles de corrélations se doivent d'être représentatives des phénomènes physiques en jeux : il n'est pas possible d'avoir une longueur de corrélation entre les points de grille de l'ordre de la taille du domaine ! Enfin des écarts avec la théorie sont présents (Voir les tableaux 5.2 et 5.3).

	Lp_{exp}	Lp_{th}
$Lp(1)$ en km	3.28	3
$Lp(100)$ en km	19.31	22.44
$Lp(200)$ en km	30	31.68

TAB. 5.2 – $\kappa = 1250$ et 500 membres.

	Lp_{exp}	Lp_{th}
$Lp(3)$ en km	7.3	6.4
$Lp(100)$ en km	32.74	35
$Lp(200)$ en km	57.6	49.24

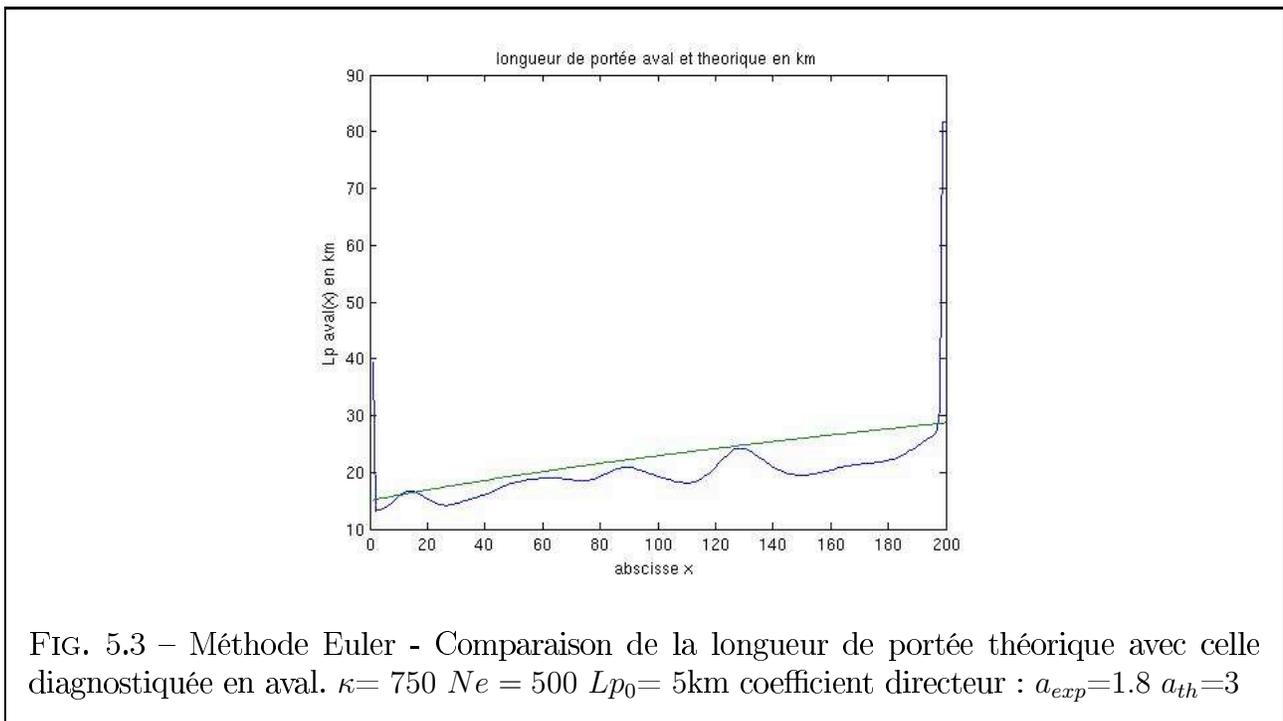
TAB. 5.3 – $\kappa = 3000$ $Ne = 500$ $Lp_0 = 5$ km

2^{me} jeu de paramètres : valeur de κ petite, pour un temps T 800 fois diffusé.

	Lp_{exp}	Lp_{th}
$Lp(3)$ en km	5.21	5.8
$Lp(100)$ en km	13.44	18.02
$Lp(200)$ en km	18	25

TAB. 5.4 – $\kappa = 750$ $Ne = 500$ $Lp_0 = 5$ km

Le choix d'un coefficient de diffusion plus petit (en diffusant plus longtemps afin de pouvoir comparer les deux jeux de paramètres), permet d'obtenir des résultats physiquement acceptables. Les longueurs de portée pour un domaine de 200km sont bien de l'ordre de 20km. Cependant il réside un facteur 2 entre la théorie et l'expérience numérique (Figure 5.3). Il nous a suffi de comparer les coefficients directeurs de la droite représentant la longueur de portée théorique et expérimentale. Lors de la mise en évidence de la dynamique des longueurs de portée en section 4) nous avons raisonné en utilisant un cas faiblement diffusif, on attendrait donc de meilleurs résultats pour de telles valeurs de κ . Ce qui n'est pas le cas, la source d'erreur est, comme on l'a détaillé en section 2.2.2, liée au choix du schéma numérique.

FIG. 5.3 – Méthode Euler - Comparaison de la longueur de portée théorique avec celle diagnostiquée en aval. $\kappa = 750$ $Ne = 500$ $Lp_0 = 5$ km coefficient directeur : $a_{exp}=1.8$ $a_{th}=3$

Ainsi, dans le cadre de ces simulations, nous avons utilisé deux méthodes différentes en ce qui concerne la *discrétisation temporelle* : la méthode d'Euler et celle de Runge-Kutta (voir la section 2.2.3). Le changement de schéma a permis de pallier les écarts dans les lois d'évolution théoriques et expérimentales des longueurs de portée.

En effet, le tableau 5.5 présente les longueurs de portée diagnostiquées sans assimilation à partir de la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche ensembliste \mathbf{B}_e et issues de la méthode RK4.

Si $\kappa = 120$ $Ne = 1000$ $Lp_0 = 2$ km

Cette dernière simulation nous a permis de confirmer les améliorations en terme de consis-

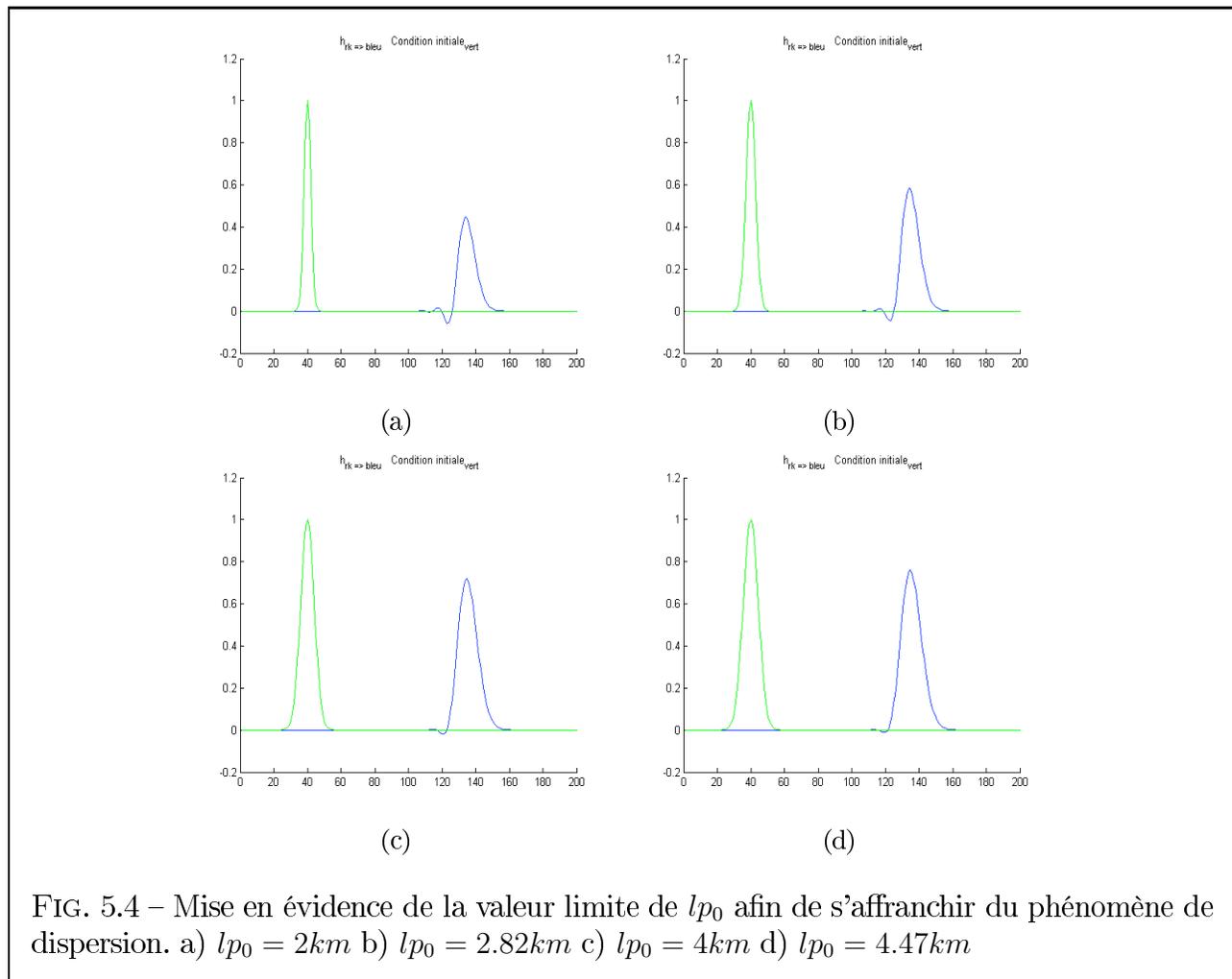
	Lp_{exp}	Lp_{th}
$Lp(3)$ en km	2.57	2.33
$Lp(100)$ en km	6.89	7.21
$Lp(200)$ en km	12.43	9.75

TAB. 5.5 – Comparaison longueurs de portée théoriques et expérimentales avec la méthode de RK4

tance du schéma RK4. Il est nécessaire, à chaque pas, que le schéma ne s'écarte pas trop de la solution.

5.3.2 Choix de la longueur de portée initiale minimale

Le phénomène de dispersion mis en évidence à la section (2.2.4) entraîne une sélection quant aux valeurs dites limites des longueurs de portée initiales. En conservant la même valeur du coefficient de diffusion $\kappa = 120$, voici, pour différentes valeurs de lp_0 la forme du signal advecté (voir la Figure 5.4).



Il convient donc de choisir $lp_0 = 5km$ afin d'éviter le phénomène de dispersion, en dessous de cette limite de petites échelles les signaux sont en effet déformés (Figure 5.5).

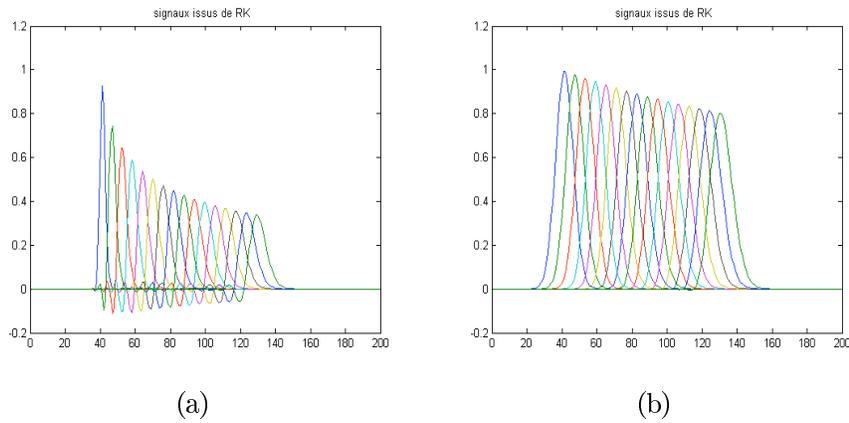


FIG. 5.5 – Choix de la valeur limite. a). $lp_0 = 2km$ b). $lp_0 = 5km$

Voici enfin les longueurs de portée diagnostiquées sans assimilation à partir de la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche ensembliste \mathbf{B}_e , issues de la méthode RK4 et comportant les paramètres calibrés² (Figure 5.6) : $\kappa = 120$ $Lp_0 = 5km$ $T = 1.25T$

	Lp_{exp}	Lp_{th}
$Lp(3)$ en km	5.071	5.142
$Lp(100)$ en km	8.597	8.544
$Lp(200)$ en km	10.882	10.780

TAB. 5.6 – Comparaison longueurs de portée théoriques et expérimentales avec la méthode de RK4

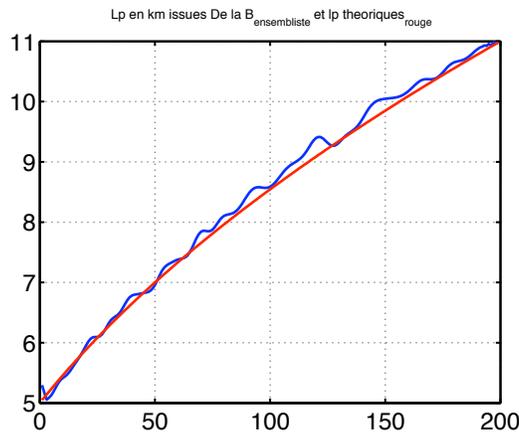


FIG. 5.6 – Méthode RK4 - Comparaison de la longueur de portée théorique avec celle diagnostiquée en aval. $\kappa = 120$ $Ne = 10000$ $Lp_0 = 5km$

²où T temps de simulation, la valeur choisie laisse le temps à la physique de parcourir le domaine.

5.3.3 Résultats pour le modèle avec advection et diffusion sans assimilation.

Dans le cas d'une advection-diffusion, l'expression théorique des longueurs de portée (voir l'équation 4.14) annonce une croissance linéaire le long du bief. Les fonctions de covariance directement liées aux longueurs de portée (voir les expressions 5.1), subissent donc l'influence de la diffusion. La figure 5.7 superpose plusieurs fonctions de corrélation tracées en plusieurs points du domaine. Elle met en avant l'influence de la diffusion qui "écrase et étale" les fonctions de covariance au fur et à mesure de leur propagation. Enfin la Figure (5.7 b)) confirme la croissance linéaire des longueurs de portée dans le cas d'une advection-diffusion simulée avec le choix de paramètres détaillé ci-dessus (voir la section 5.3)

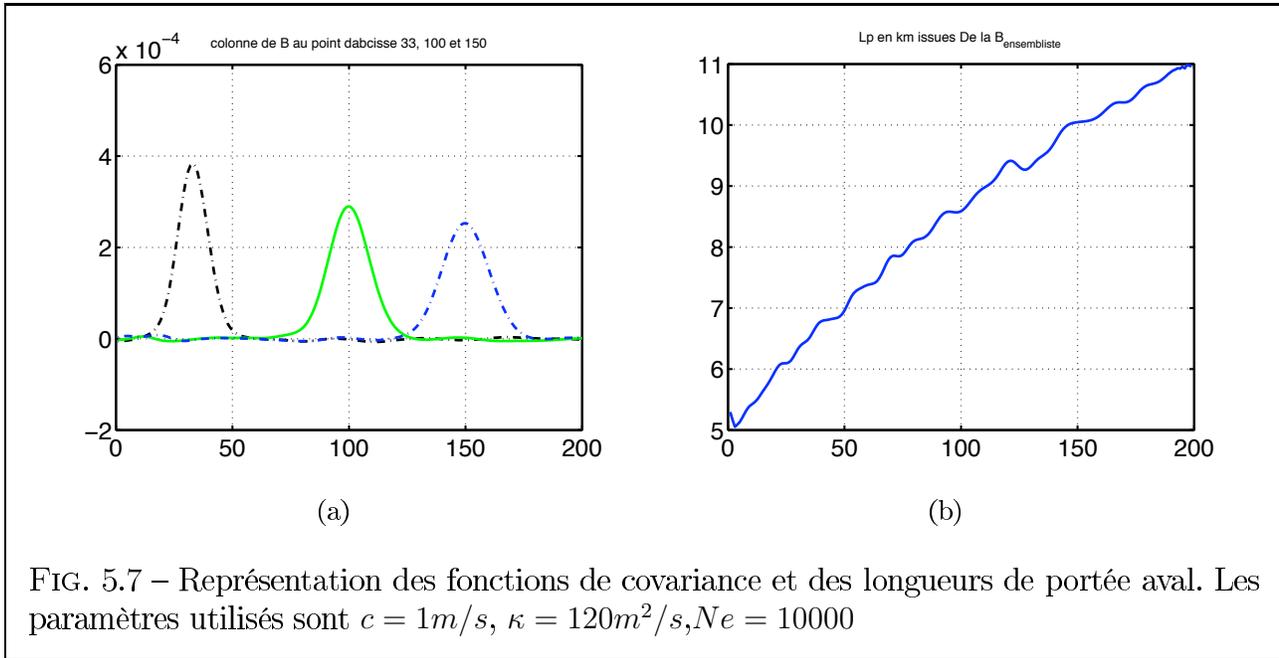


FIG. 5.7 – Représentation des fonctions de covariance et des longueurs de portée aval. Les paramètres utilisés sont $c = 1m/s$, $\kappa = 120m^2/s$, $Ne = 10000$

Chapitre 6

Estimation du tenseur local de diffusion et normalisation pour la modélisation des opérateurs de corrélations hétérogènes issus de l'équation de diffusion

Enjeux et difficultés :

Une méthode pratique pour modéliser les matrices de covariances d'erreur d'ébauche pour des géométries complexes (une grille océanographie notamment), consiste à obtenir les fonctions de corrélation à partir d'un opérateur de diffusion. En effet au lieu de spécifier explicitement les fonctions de covariance et de stocker \mathbf{B} , on utilise un opérateur de diffusion capable de représenter l'inhomogénéité locale.

Ainsi, l'opérateur est un *outil* capable de représenter des fonctions de corrélations hétérogènes avec un coût numérique raisonnable. Cependant il reste à déterminer l'opérateur local de diffusion qui correspondra à la fonction de corrélation locale.

6.1 Modèle basé sur l'équation de diffusion homogène

Considérons l'équation de diffusion 1D, pour la fonction scalaire $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \kappa \nabla u = 0 \quad t \in [0, T] \quad (6.1)$$

où κ désigne le tenseur de diffusion.

Le domaine utilisé est l'axe réel, l'équation de diffusion s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, t = 0) = \delta_{x_0}(x), \end{cases} \quad (6.2)$$

6.1.1 Représentation formelle de l'opérateur de covariance issu d'un filtre dit diffusif

En intégrant l'équation (6.2) sur un temps $[0, T]$, à partir de la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, on obtient $u(x, T)$ définie sur $[0, l]$. Plus précisément, la solution de cette équation aux dérivées partielles au temps T est donnée par la fonction intégrale de convolution entre la condition initiale $u(x, 0)$ et une fonction gaussienne comme suit :

$$u(x, T) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa T}} \int_{x'} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa T}} u_0(x') dx' = \frac{1}{\lambda} (g * u_0)(x')^1 \quad (6.3)$$

Cette gaussienne peut être vue comme la fonction de covariance liant le point x' et le point courant x . En effet celle-ci est homogène, isotrope *i.e.* ne dépendant que de la distance euclidienne $r = |x - x'|$. Comme on a pu le voir au chapitre 1 section (1.3.3), une telle fonction définit une fonction de covariance, telle que l'extension spatiale ou encore la longueur de portée est $\sqrt{2\kappa T}$, c'est aussi l'écart-type de la gaussienne.

Ainsi, la résolution de l'équation de diffusion et sa normalisation par le facteur λ représente un opérateur de corrélation [Ricci et al., 2010]. dont le noyau est donné à T fixé par ,

$$g(r) = e^{-\frac{(r')^2}{4\kappa T}}, \text{ où } \sqrt{4\pi\kappa T} = \lambda. \quad (6.4)$$

Ici, T est un paramètre qui permet, avec le coefficient de diffusion, de déterminer la longueur de portée de la gaussienne, $\sqrt{2\kappa T}$.

L'opérateur est accessible sous une forme dite, factorisée, la "racine carrée" résultant d'une intégration sur la moitié du pseudo-temps T . Pour ne pas perdre de vue la spécification souhaitée dans notre modèle de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} (Chapitre 7, section 7.1.2), et donc pour correspondre à des opérateurs de corrélation et non de covariance : une étape de normalisation est nécessaire :

L'équation 6.3 permet de déduire le facteur de normalisation :

$$\lambda = \sqrt{4\pi\kappa T} = \sqrt{2\pi}L \quad (6.5)$$

où L est l'échelle de corrélation. Cependant, cette échelle peut être vu comme une fonction de coordonnées spatiales. Autrement dit l'échelle varie en fonction de sa position géographique. Dans ce cas là, on cherche alors à déterminer non plus un facteur de normalisation mais une matrice diagonale des facteurs de normalisations $\mathbf{\Lambda}$ détaillée dans la section suivante.

6.1.2 Formulation et normalisation

Nous allons utiliser l'opérateur de diffusion explicite défini en section 6.1.3 pour modéliser les corrélations \mathbf{C} . Les covariances s'en déduisent ensuite simplement par le produit $\mathbf{\Sigma C \Sigma}^T$ où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice diagonale formée des écarts-type. On ramène le problème de modélisation de covariances à un problème de modélisation des corrélations. Pour respecter la symétrie de l'opérateur de corrélation \mathbf{C} , la normalisation est appliquée de la façon suivante² :

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W L}^{\frac{T}{2}} \mathbf{\Lambda}^{\frac{T}{2}},$$

¹où $*$ est le produit de convolution

²la notation T représente ici l'opération de transposition

où \mathbf{L} correspond à l'intégration de l'équation de diffusion hétérogène (Eq 6.2) sur la période temporelle $t \in [0, 1]$. Afin d'avoir une norme unitaire, on multiplie l'opérateur d'intégration par une quantité qui correspond à la taille des mailles de la discrétisation spatiale :

\mathbf{W}^{-1} , qui est aussi vu comme le tenseur de la métrique locale permettant donc la conversion d'une fonction caractéristique en une distribution de Dirac.

Comme on l'a vu dans le cas scalaire, il faut appliquer une normalisation au résultat de cette multiplication. On note $\mathbf{\Lambda}$, la matrice de normalisation diagonale telle que $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\dots \lambda_i^{-1} \dots)$.

La méthode qui permet de déterminer la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$, consiste à appliquer l'opérateur sur une fonction de Dirac en un point de grille. (Toutes les valeurs du champs scalaire u_i sont mises à 0 execeptée pour le point de grille traité où elle est initialisée à 1.) La solution de ce point correspond au maximum (variance) de l'opérateur de covariance. Pour transformer ce dernier en opérateur de corrélation, il suffit donc de multiplier la solution par l'inverse de cette variance, où

$$\lambda_i^{-1} = u_i^T \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{\frac{T}{2}} u_i. \quad (6.6)$$

Méthode de normalisation

- Pour $i= 1$ à N , le nombre de points de grille

$$u_i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1_{ime} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$$

$$v_i = \mathbf{L}^{\frac{T}{2}} u_i$$

$$\lambda_i^{-1} = v_i^T v_i$$

- Point de grille suivant.

En déterminant de cette manière les variances de chacun des points de la grille du modèle, on obtient en les inversant, la matrice diagonale des facteurs de normalisation à appliquer. Cette méthode garantit que la maximum de la fonction de corrélation modélisée est à 1.

Pour finir, la matrice de covariance d'erreur d'ébauche, construite à l'aide de l'opérateur de diffusion, est exprimée sous la forme : $\mathbf{B} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{C} \mathbf{\Sigma}^T$ où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice diagonale formée des écarts-type.

6.1.3 Opérateur de diffusion discret

On choisit ici la même grille spatiale que dans la chapitre 2 afin de discrétiser le domaine $[0, l] \times \mathbb{R}^+$. Rappelons tout de même les choix de discrétisation suivants :

un pas d'espace $\Delta x = \frac{l}{N}$ (avec N un entier positif)

un pas de temps $\Delta t > 0$

Puis on définit les noeuds d'un maillage régulier $:(t_i, x_j) = (i\Delta t, j\Delta x)$ pour $i \geq 1, 1 \leq j \leq N$. On se place sur grille uniforme en introduisant un pas de temps $t_m = m\Delta t$ (semi-discrétisation). Les conditions aux limites peuvent être de plusieurs types, mais leur choix n'intervient pas dans la définition des schémas ni pour la finalité de la discrétisation (dans le cadre de l'assimilation de donnée, on n'accorde pas d'importance aux bords du domaine du fait d'absence d'observations).

Ici, nous utilisons des conditions aux limites de Dirichlet $u(0, t) = u(t, l) = 0$ pour $t > 0$ qui se traduisent en $u_1^i = u_N^i = 0$ pour pour tout $i > 0$

Considérons le schéma temporel d'Euler explicite pour modéliser l'équation de diffusion homogène :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta x^2} \quad (6.7)$$

Le schéma explicite est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (pour plus de détails on pourra consulter [Allaire, 2005]). De plus, ce schéma est stable en norme \mathcal{L}^2 et \mathcal{L}^∞ si et seulement si la condition CFL est satisfaite : $\frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$.

Enfin d'après le théorème de LAX³, si le schéma est stable et consistant alors ce dernier est convergent.

L'équation de diffusion (6.2), conduit à l'équation suivante, lorsqu'elle est discrétisée temporellement suivant le schéma explicite ci-dessus, pour une intégration entre t_{m-1} et t_m .

$$u(x, t_m) = u(x, t_{m-1}) + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t_{m-1}) \quad (6.8)$$

$$u(x, t_m) = \left(1 + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t_{m-1}) \quad (6.9)$$

$$u(x, t_m) = \mathbf{L}_e(u(x, t_{m-1})) \quad (6.10)$$

Ainsi pour une intégration sur $[0, T]$, on définit l'opérateur de diffusion explicite, \mathbf{L}_e :

$$u(x, 0) = \left[1 + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^M u(x, T) = \mathbf{L}_e^M(u(x, T)) \quad (6.11)$$

où Δt est le pas de temps et M le nombre d'itérations tel que $T = M \Delta t$.

Ce schéma explicite est facile à mettre en oeuvre, et il reste peu coûteux pour notre système 1D. Cependant pour d'autres applications, de dimension plus grande, il est courant de travailler avec un schéma implicite.

³voir chapitre 2 [Allaire, 2005]

Matrice de l'opérateur de diffusion : $\mathbf{L}_e^M = \left[1 + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^M$
Noyau de l'opérateur de corrélation : $\mathbf{C}_M = e^{-x^2/4\kappa M \Delta t}$
Paramètre d'échelle : $L = \sqrt{2\kappa M \Delta t}$
Echelle de corrélation : $L_c = L$
Nombre d'itérations : $M > \left(\frac{L_c}{\Delta x} \right)^2$
Facteur de normalisation : $\lambda = \sqrt{2\pi} L$

TAB. 6.1 – Données liant l'opérateur de diffusion et l'échelle de corrélation

6.2 Modèle basé sur l'équation de diffusion hétérogène

6.2.1 Tenseur de diffusion hétérogène

Dans la section (6.1.2), nous avons formulé le facteur de normalisation (voir TAB 6.1) lorsque l'échelle de corrélation $L = \sqrt{2\kappa T}$. Mais de manière plus réaliste les échelles de corrélation varient en fonction de leur localisation géographique. Nous allons alors utiliser des longueurs de portée issues du modèle d'advection-diffusion et diagnostiquées lors de la méthode dite ensembliste, pour évaluer le tenseur local de diffusion $\kappa(x)$, ce dernier est alors défini comme une fonction des coordonnées spatiales.

Pour cela, on suppose donc que la relation $L = \sqrt{2\kappa T}$ issue du cas homogène reste vraie. On utilise ainsi à chaque point de grille la corrélation entre le point courant et ses voisins. On conserve la même définition de longueur de portée (voir la section (1.4)) :

$$L_p^+ = \frac{\delta x^+}{\sqrt{2(1 - \rho(\delta x^+))}}.$$

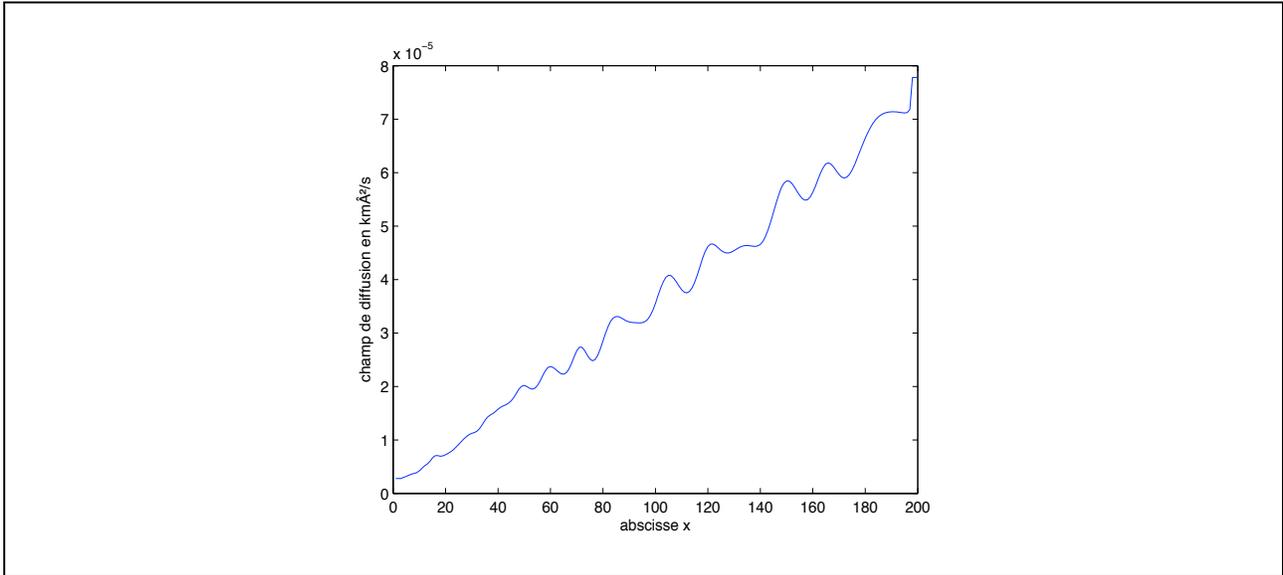
Au final, L_p est évaluée comme étant $L_p(x) = \frac{[L_p^+ + L_p^-]}{2}$.

D'où par définition,

$$\kappa(x) = \frac{L_p^2(x)}{2T}. \quad (6.12)$$

Puis une fois estimé, le champ de diffusion local est introduit dans le modèle de diffusion. Un exemple du tenseur de diffusion est présenté ci-après (Fig.6.1). Suite à ce choix d'échelle de corrélation, le modèle sera alors basé sur une équation de diffusion *hétérogène* :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x(\kappa(x)\partial_x)u(x, t) \\ u(x, 0) = \delta_{x_0}(x), u(0, t) = u(t, l) = 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

FIG. 6.1 – Tenseur de diffusion pour $Ne = 1000$ membres.

6.2.2 Discrétisation de l'équation non-homogène

Le schéma numérique utilisé pour estimer la dérivée temporelle est encore celui d'Euler explicite. Par analogie au choix de dérivée spatiale d'ordre 2 classique, nous avons utilisé un schéma numérique en tenant compte du caractère hétérogène du tenseur de diffusion :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} (K^j u^{j+1} - (K^j + K^{j-1})u^j + K^{j-1}u^{j-1}). \quad (6.14)$$

La consistance de ce schéma est vérifiée en Annexe.

Nous avons de plus comme condition CFL : $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_x(\kappa) \leq \alpha < \frac{1}{2}$

Les relations matricielles du temps i au temps $i+1$ imposent :

$$U^{i+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \mathbf{A} \right) U^i$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(K^j + K^{j-1}) & K^j & & \\ & K^{j-1} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

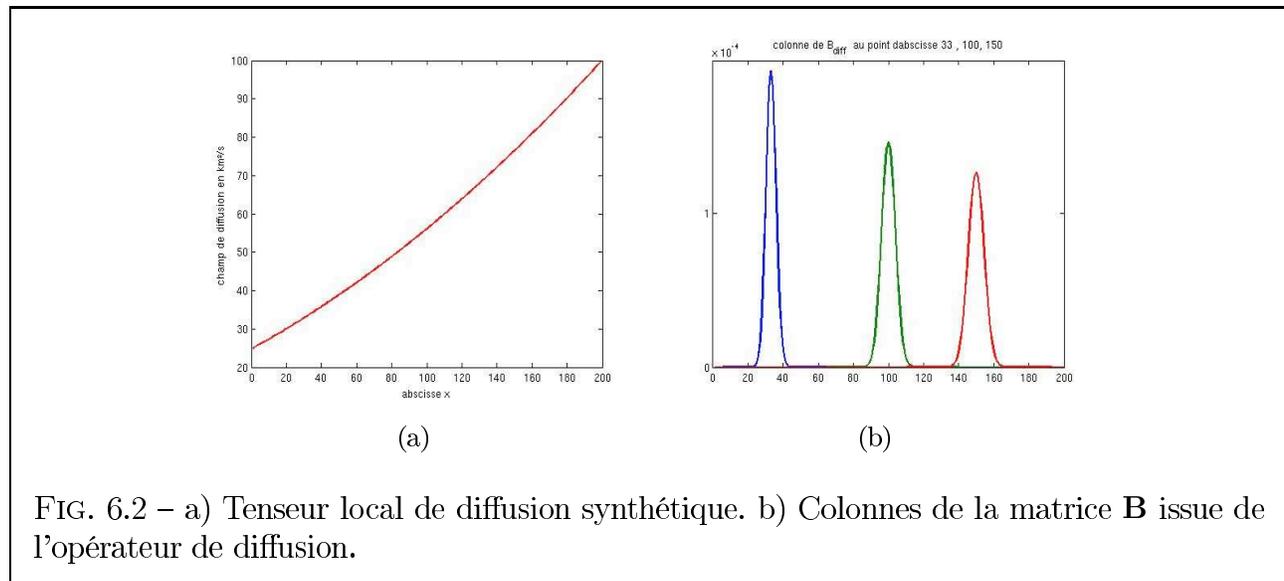
6.2.3 Et en pratique

La méthode utilisée est d'appliquer l'équation de diffusion plusieurs fois, en utilisant successivement en chaque point de grille une fonction de Dirac comme condition initiale (précisée dans l'équation 6.13). La solution numérique est stockée pour générer l'opérateur de diffusion explicite \mathbf{L}_e . Comme on l'a décrit en section (6.1.2) à l'issue de l'intégration sur $[0, T]$, l'opérateur

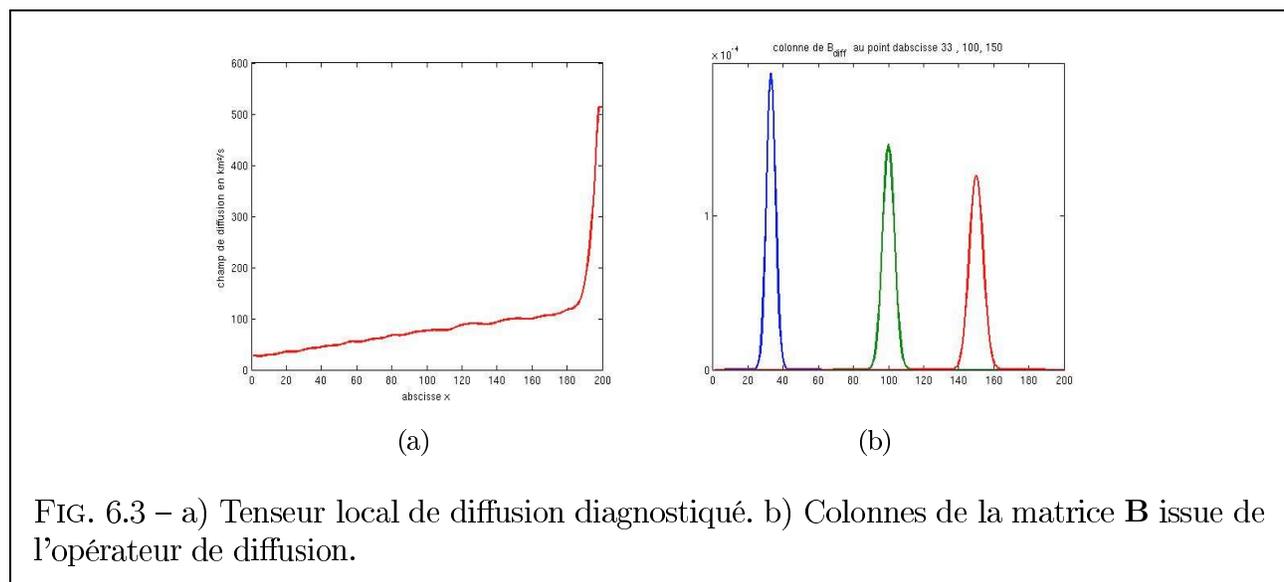
de corrélation est construit. Les variations spatiales du tenseur diffusion local, directement relié aux longueurs de portée, impliquent donc d'adapter en chaque point de grille la normalisation.

Voici, pour une condition initiale telle que $u(x, t = 0) = \delta_{x_0}(x)$ où x_0 est le milieu du domaine, les différents résultats concernant la construction de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} .

Dans un premier temps à partir d'un tenseur $\kappa(x)$ synthétique :



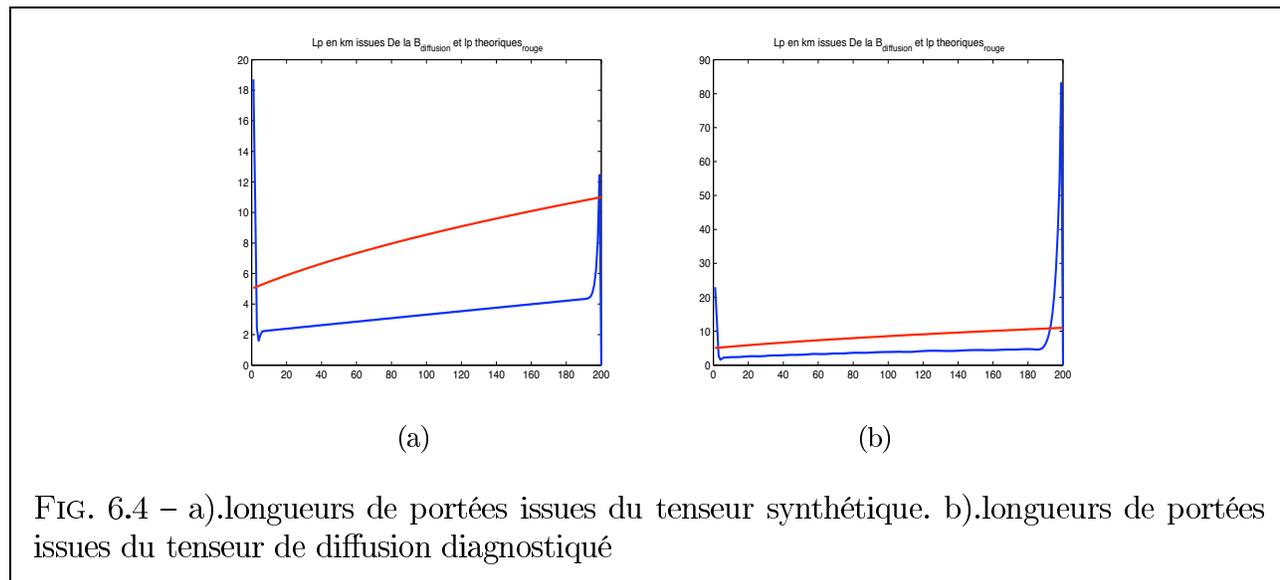
Puis dans un second temps, à partir d'un tenseur local issu des longueurs de portées ensemblistes⁴ :



⁴i.e diagnostiquées par la méthode ensembliste

On remarque ici, les effets de bords issus du schéma numérique d'advection-diffusion, répercutés sur le diagnostic des longueurs de portée et donc sur celui du tenseur local de diffusion κ . Cependant l'opérateur de diffusion \mathbf{L}_e permet dans tous les cas de construire une matrice de covariance d'erreurs d'ébauche $\mathbf{B}_{diffusion}$ conformes à nos attentes : cette dernière est bien composée de fonctions de covariance hétérogènes.

Enfin, comme nous l'avons décrit à la section (1.4), le diagnostic des longueurs de portée est réalisé à partir cette fois de la matrice notée $\mathbf{B}_{diffusion}$. Sur la Figure 6.4, on compare les longueurs de portée en aval, et celle issue de la théorie dans les deux cas :



Chapitre 7

Systeme d'assimilation de donnees pour le modele.

7.1 Presentation du systeme d'assimilation de donnees pour le modele.

7.1.1 Schéma général

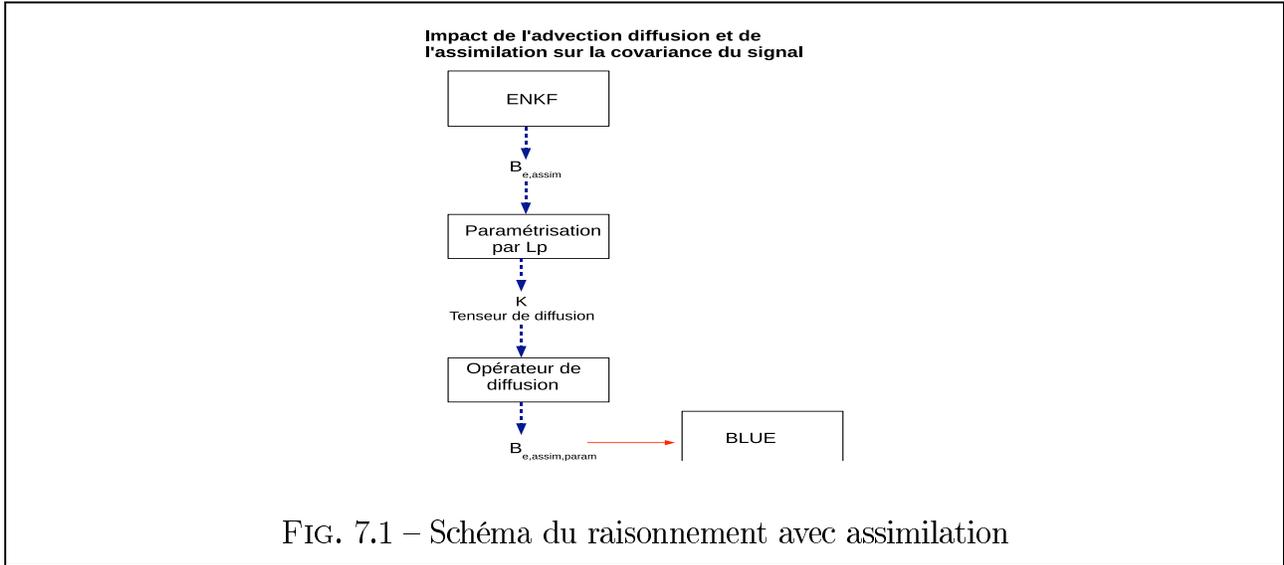
Un premier pas vers les statistiques d'erreurs d'ébauche.

La dynamique des covariances avec un modèle d'advection-diffusion sans assimilation a été détaillée au chapitre 5. Nous avons pu mettre en évidence pour le cas d'une diffusion peu intense et pour des points relativement proches que la longueur de portée augmente en fonction de x suivant $Lp^2(x) = Lp_0^2 + 4\kappa \frac{x}{c}$. Nous allons alors par la suite, prendre en compte une observation en un point donné du domaine, ce qui entraîne la réduction de la longueur de portée vers l'aval (voir la Figure 4.2). Enfin, la modélisation des corrélations (longueurs de portée) au sein du système d'assimilation de donnée permet de déterminer et d'améliorer la structure physique de l'erreur d'ébauche. En effet, le travail effectué par les élèves de l'Ecole Nationale de la Météorologie [Delplanque et al., 2011] a permis dans un premier temps, à partir d'une méthode de chaînage de type BLUE de constater que l'introduction d'hétérogénéité au sein de la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche améliore la qualité de la prévision. Cependant cette méthode est très coûteuse en terme de calcul. Afin de justifier les résultats obtenus par l'assimilation avec un BLUE, et de diminuer le coup de calcul, l'assimilation sera réalisée à présent avec un filtre Kalman. Comme nous l'avons détaillé au chapitre 1 (la section 1.6), il est plus avantageux de travailler avec un filtre de Kalman d'ensemble.

L'utilisation de l'opérateur de Diffusion.

A l'issue de l'émulation du filtre de Kalman d'ensemble, nous avons en main la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche $\mathbf{B}_{e,assim}$ ¹ approchée par une version empirique grâce à l'utilisation d'ensemble d'ébauche et d'analyse. Nous opérons ensuite le même diagnostic pour obtenir les longueurs de portées. Ces dernières servent à construire le tenseur local de diffusion (voir le chapitre 6, section 6.2.1). A ce stade là, nous sommes capables de générer une matrice de covariance d'erreur d'ébauche $\mathbf{B}_{e,assim,param}$ représentant l'inhomogénéité locale.

¹Filtre de Kalman d'Ensemble



La motivation de ce schéma combinant filtre de Kalman et opérateur de diffusion réside dans l'utilisation directe et statique de $\mathbf{B}_{e,assim,param}$ dans une chaîne de prévisions de type BLUE. Afin de faire un bilan du cheminement du stage, voici un schéma récapitulatif (voir la Figure 7.1).

Décrivons maintenant les variables et paramètres mis en jeu lors de l'assimilation de données appliquée au modèle hydraulique rencontré.

7.1.2 Le problème d'assimilation des lignes d'eau

Dans le cadre de cette étude, les vecteurs \mathbf{X}^t , \mathbf{X}^b et \mathbf{X}^a contiennent respectivement les hauteurs d'eau réelles connues dans la cadre d'expériences jumelles², simulées puis analysées. Le contrôle de la ligne d'eau à partir de donnée de hauteurs d'eau \mathbf{Y}^o est effectué à l'aide d'une chaîne d'assimilation BLUE. La méthode s'écrit :

$$\mathbf{X}_{i+1}^a = \mathbf{X}_{i+1}^b + \mathbf{K}(\mathbf{Y}^o(t_{i+1}) - \mathcal{H}_{i+1}\mathbf{X}_{i+1}^b) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{X}_{i+1}^b = \mathcal{M}_{i,i+1}(\mathbf{X}_i^a) \quad (7.2)$$

$$\text{avec } \mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (7.3)$$

où $\mathcal{M}_{i,i+1}$ est le modèle qui propage l'état au temps t_i vers l'état au temps t_{i+1} et \mathcal{H} est l'opérateur d'observation instantanée, ici linéaire par rapport au contrôle \mathbf{X} . On écrit sa matrice jacobienne telle que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{H}. \quad (7.4)$$

L'opérateur d'observation sera alors noté \mathbf{H} . Le lien entre vecteur d'état et observations est simple : on associe à une ligne d'eau ses valeurs aux points de mesure.

Ainsi on a $\mathbf{H} = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)$.

Les observations et le modèle ne sont que des approximations de la réalité entachées d'erreur. Afin de prendre en compte l'existence d'une certaine incertitude dans l'ébauche et les

²Simulations numériques où l'état vrai et l'ébauche sont connus et synthétiques. Pour plus de détails consulter l'annexe.

observations, il est nécessaire de définir et de modéliser les statistiques de erreurs associées. Dans le chapitre 1, nous avons pris comme hypothèse que ces erreurs avaient une distribution gaussienne. Or, les lois gaussiennes possèdent la propriété de pouvoir être déterminées de manière unique à partir des statistiques du premier ordre (moyenne) et du second ordre (matrice de covariance d'erreur). Cette propriété est encore plus importante pour le filtre de Kalman présenté précédemment car celui-ci ne propage de manière exacte que les moments statistiques de premier et second ordre. Le calibrage de la méthode réside dans la spécification de la matrice d'erreur d'observations \mathbf{R} et de la matrice d'erreur d'ébauche \mathbf{B} .

Choix de la matrice \mathbf{R}

La matrice \mathbf{R} contient les variances et les covariances d'erreurs d'observation. Si p est le nombre d'observations, \mathbf{R} est une matrice $p \times p$. Dans la plupart des applications, on choisit \mathbf{R} diagonale ce qui revient à supposer que les erreurs d'observation sont décorréelées. Les coefficients diagonaux de \mathbf{R} sont les variances des erreurs d'observation.

Par exemple, si la cote de surface libre est connue à 10 cm près, on choisit $\sigma_o^2 = 10^{-2}m^2$ comme variance. Si la hauteur d'eau h est connue à 10% près, on choisira $\sigma_o^2(h) = 10^{-2}h^2$.

Choix de la matrice \mathbf{B}

Pour la matrice \mathbf{B} , on choisit la version discrétisée de la fonction de corrélation

$$\rho_{\mathbf{B}}(x, x') = \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l_{\mathbf{B}}(x, x')^2}\right) \quad (7.5)$$

où $l_{\mathbf{B}}(x, x')$ est une fonction symétrique du couple (x, x') .

Pour une première expérience d'assimilation de données avec des observations effectuées au seul point x_{obs} , seule la fonction $\rho_{\mathbf{B}}(x, x_{obs})$ intervient. Le choix réalisé sur $\rho_{\mathbf{B}}$ est une hypothèse pertinente et simple concernant notre problème physique. Elle confère à la matrice \mathbf{B} les bonnes propriétés mathématiques. Ainsi la formule (7.3) conduit avec les notations adéquates aux hauteurs d'eau :

$$h_a(x, t_i) = h_b(x, t_i) + [h_{obs}(t_i) - h_b(x_{obs}, t_i)] \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} \exp\left[\frac{(x - x_{obs})^2}{l_{\mathbf{B}}(x, x_{obs})}\right] \quad (7.6)$$

Choix de la longueur de réponse impulsionnelle

Le choix de la longueur de corrélation a été obtenu en simulant la réponse impulsionnelle du bief étudié. A partir d'une ligne d'eau stationnaire représentative d'un débit usuel, on impose une perturbation en amont du bief, que l'on appelle forçage amont (chapitre3). Cette crue va diffuser au fur et à mesure de sa propagation vers l'aval.

7.2 L'implémentation du filtre de Kalman d'ensemble

Toujours dans la continuité du travail effectué par les élèves de l'ENM [Delplanque et al., 2011], il a été réalisé une expérience jumelle d'assimilation de données pour un modèle d'advection-diffusion 1D forcé par une condition aux limites amont aléatoire. A partir de mesures simulées en un point et à intervalles réguliers, on a appliqué la méthode BLUE avec des matrices d'erreurs

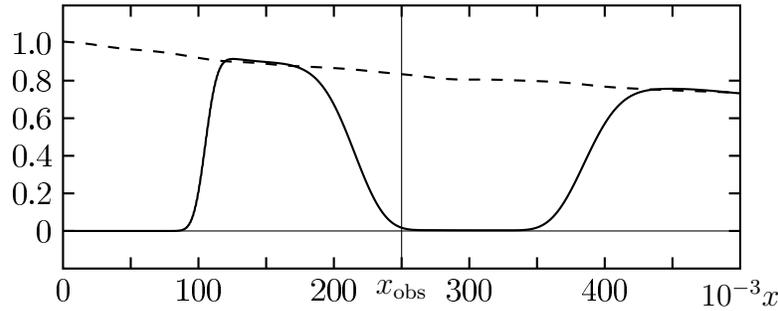


FIG. 7.2 – Propagation par le filtre de Kalman des variances d’erreur données par la diagonale de \mathbf{B} . Le point d’observation est matérialisé par une ligne verticale à $x_{\text{obs}} = 250$ km.

d’ébauche et d’observation conformes aux propriétés statistiques du forçage. On a constaté sur un exemple concret que l’introduction de portées asymétriques dans certaines corrélations spatiales améliore la qualité de prévision. En effet, la réduction de la longueur de corrélation de l’erreur d’ébauche dans la direction de l’advection améliore la qualité de l’analyse au cours du temps [Thual, 2010b].

Nous chercherons aussi à justifier cette constatation en considérant le filtre de Kalman d’ensemble avec un modèle parfait, ce qui revient à enchaîner plusieurs assimilation BLUE. (récurrence détaillée à la section 1.5).

7.2.1 Résultats d’une simulation du KF

Voir en annexe A.5.

7.2.2 Le Filtre de Kalman d’ensemble

Nous avons présenté le principe du filtre de Kalman d’ensemble dans le chapitre 1 section 1.6. Une première raison justifiant son émulation est de s’affranchir du calcul coûteux du linéaire tangent du modèle de prévision \mathcal{M} . Une deuxième raison toujours liée au modèle prévision, est que justement ce dernier ne comporte aucune incertitude liée à la statistique du forçage amont. En effet via un filtre de Kalman d’ensemble, son approche ensembliste assure que la variance de la matrice d’erreur d’ébauche \mathbf{B}_e ne s’écroule pas (avec le seul filtre de Kalman, les points impactés par le forçage amont ont tendance à devenir "certains").

Toujours en utilisant les mêmes paramètres (détaillés à la section 7.1.2), il faut dorénavant préciser les conditions d’initialisation. La figure 7.2 montre la courbe des variances d’erreurs d’ébauche après 400 itérations, elle présente de plus une zone de très faibles variances voire quasi-nulles. Ce phénomène s’est propagé à partir de l’amont, sur une distance qui correspond à l’advection. Lors de la propagation des signaux de hauteurs d’eau, si leur dispersion n’est pas assez significative alors les variances d’erreur d’ébauche seront quasi-nulles. Autrement dit, si les signaux comportent encore la forme donnée par la condition initiale identique pour l’ensemble des signaux, leur dispersion ne sera pas significative. Afin de pallier cela, il faut imposer un temps de diffusion conséquent, en vue de permettre à la statistique du forçage amont de se disperser.

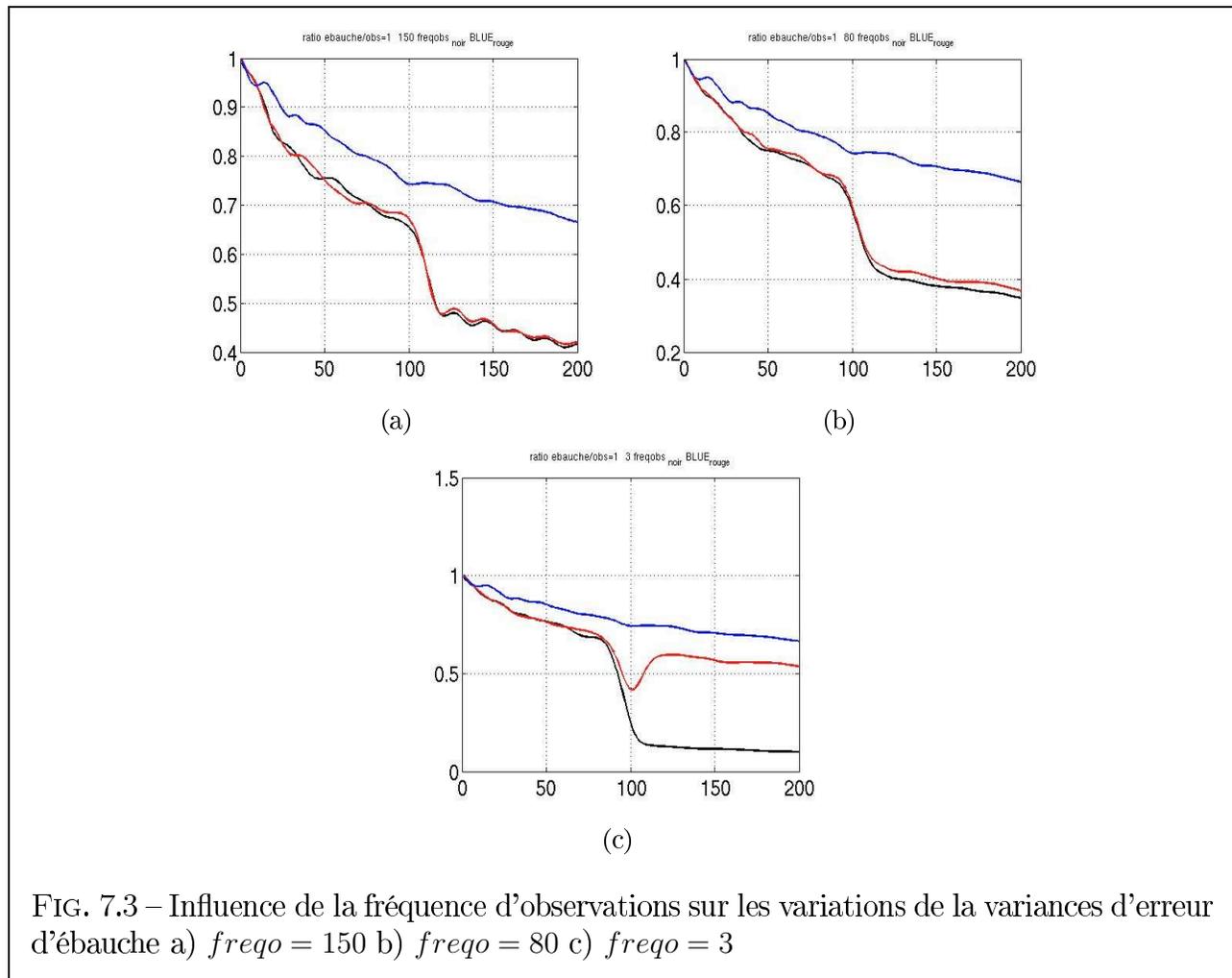
7.2.3 Tests de sensibilité et résultats

Influence de la fréquence d'observation

Pour un nombre de membres $N_e=6400$, une variance d'erreur d'observation $\sigma_o = 0.7428$, et un temps caractéristique $\tau=5$

	<i>freqo</i>	fréquence d'observation
test a		150
test b		80
test c		3

TAB. 7.1 – Test : paramètres utilisés lors de l'émulation du EnKF.



Diagnostic des longueurs de portée

Sur les figures suivantes, nous observons la carte des longueurs de portées issues des matrices générées lors de l'émulation du Filtre de Kalman mettant en oeuvre différentes fréquences d'observations mais pour un même ratio σ_b/σ_o .

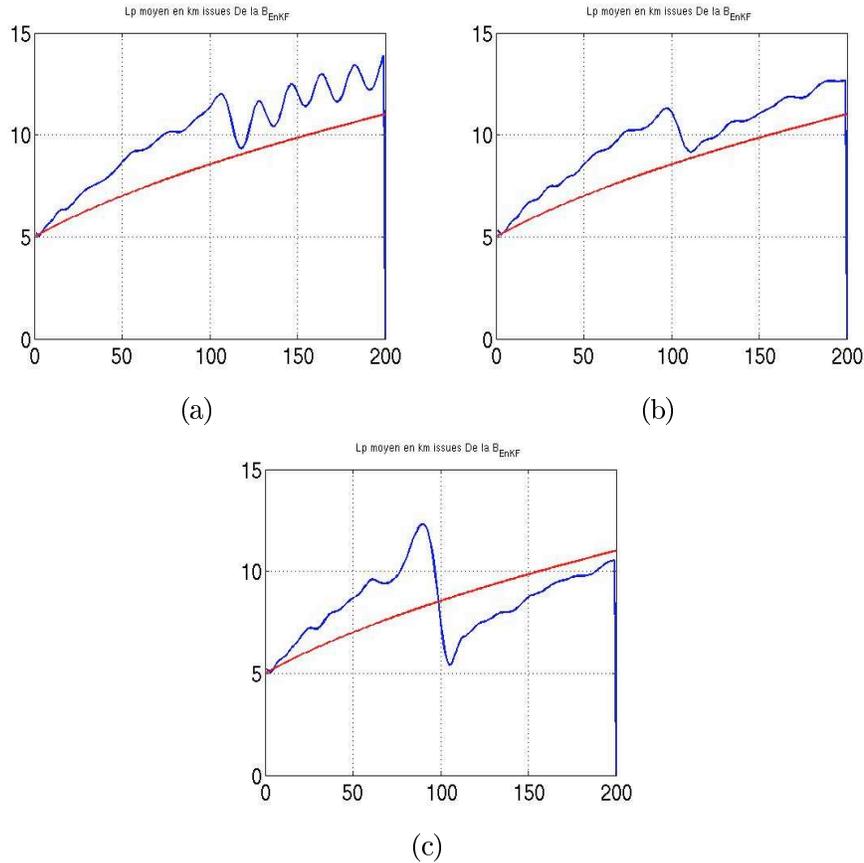


FIG. 7.4 – Influence de la fréquence d’observations sur la carte des longueurs de portée a) $freqo = 150$ b) $freqo = 80$ c) $freqo = 3km$

7.2.4 EnKF, et après...

A l’issue du filtre de Kalman d’ensemble, la matrice de covariances d’erreurs d’ébauche convergente (statique) porte la dynamique du modèle d’advection-diffusion et l’information apportée par l’assimilation. Dans un premier temps, nous avons malgré tout, pu stocker la matrice $\mathbf{B}_{e,assim,param}$ que nous allons insérer dans une chaîne de prévision de type BLUE afin de d’observer, si il y a, les améliorations du EnKF.

Nous avons choisi le cas $freqo = 3$, car d’après la figure 7.3 c), l’apport du filtre de Kalman est nettement plus significatif en comparaison avec celui du BLUE cyclé. La figure 7.5 a) met en lumière la réduction prononcée de la variance d’erreur d’ébauche lors de l’émulation du filtre de Kalman à l’inverse du cas utilisant l’algorithme de type BLUE.

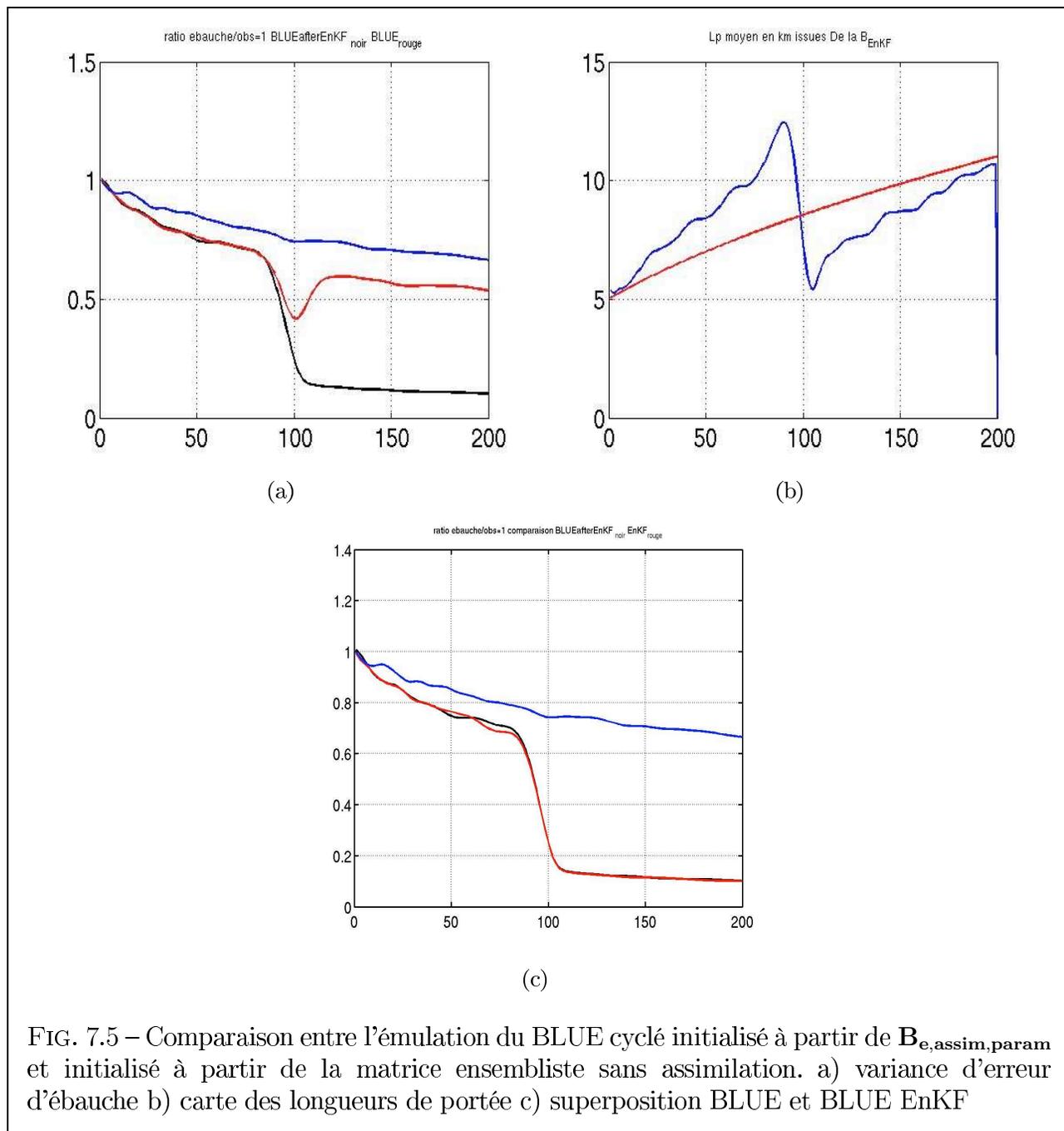


FIG. 7.5 – Comparaison entre l’émulation du BLUE cyclé initialisé à partir de $\mathbf{B}_{e,assim,param}$ et initialisé à partir de la matrice ensembliste sans assimilation. a) variance d’erreur d’ébauche b) carte des longueurs de portée c) superposition BLUE et BLUE EnKF

Conclusion

Au cœur du système de prévision se trouve un modèle mathématique décrivant la hauteur d'eau spatialement, et ainsi que son évolution dans le temps. Le modèle numérique, description mathématique des phénomènes physiques, reste théorique. Même si on l'alimente en lui donnant les conditions aux limites (forçage amont), il ne suffit pas à simuler la réalité à lui tout seul. Pour l'aider à coller à la réalité, on doit le contraindre avec de vraies mesures. Enfin tenir compte de la dynamique imposée par le modèle physique et de ces mesures est indispensable en assimilation de données.

Le schéma général détaillé au chapitre 7 expose le cheminement suivi afin d'améliorer l'analyse grâce à l'introduction de fonctions de covariance hétérogènes. La modélisation, grâce à la méthode d'ensemble, de la matrice \mathbf{B} est une première étape. Elle jouera ensuite le rôle de matrice d'erreur d'ébauche initiale dans le filtre de Kalman d'ensemble. En effet, l'émulation du Filtre de Kalman d'ensemble, avec une certaine vitesse de convergence, nous fournit une expression empirique de \mathbf{B} . Dans la mesure où le stockage de cette dernière a été possible, nous avons pu l'introduire dans un algorithme de type BLUE. Dans un second temps, après diagnostic des longueurs de portée à partir cette dernière matrice, on modélise via l'opérateur de diffusion une matrice \mathbf{B} conforme à nos attentes. Elle pourra, elle aussi, être introduite dans un algorithme de type BLUE. Les perspectives du stage seront alors de comparer les résultats avec ceux d'un filtre Kalman pour un modèle simple, puis tenter une modélisation similaire dans le modèle MASCARET.

Annexe A

A.1 Condition de stabilité du schéma numérique

En introduisant les coefficients positifs $\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\beta = 2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et le réel $\theta = 2\pi\zeta\Delta x$, le gain à chaque cycle du schéma numérique (Eq. 2.9) s'écrit :

$$|g|^2 = \underbrace{\alpha^2 \sin^2 \theta}_A + \underbrace{(1 - \beta + \beta \cos \theta)^2}_B \quad (\text{A.1})$$

Dans l'équation (A.1) il est nécessaire d'avoir $A \leq 1$, d'où la condition $\alpha \leq 1$. Il est également nécessaire d'avoir $B \leq 1$, ce qui est vérifié dès que $\beta \leq 1$.

La dernière condition, $\frac{\alpha^2}{\beta} \leq 1$, lie les paramètres α et β , comme illustré par la figure 2.3. Cette condition peut s'obtenir en étudiant le gain comme un polynôme en $X = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} |g|^2 &= ((1 - \beta) + \beta X)^2 + \alpha^2(1 - X^2) \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) X^2 + 2(1 - \beta)\beta X + (1 - \beta)^2 + \alpha^2 \end{aligned}$$

– Cas où $\beta^2 - \alpha^2 \geq 0$:

$|g|^2$ prend ses valeurs maximales pour $X = -1$ et $X = 1$.

$|g|_{X=-1}^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2(1 - \beta)\beta + (1 - \beta)^2 + \alpha^2 = 4\beta^2 - 4\beta + 1$. La condition $\beta \leq 1$ entraîne bien $|g|_{X=-1}^2 \leq 1$.

$|g|_{X=1}^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2(1 - \beta)\beta + (1 - \beta)^2 + \alpha^2 = 1$

Dans ce cas aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour obtenir $|g| \leq 1$.

– Cas où $\beta^2 - \alpha^2 \leq 0$:

$|g|^2$ est représenté par une parabole d'axe $X = \frac{(1 - \beta)\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$.

Or $\frac{(1 - \beta)\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \geq 1 \Leftrightarrow \beta \geq \alpha^2$.

Donc en prenant $\beta \geq \alpha^2$, $|g|^2$ atteint son maximum en $X = 1$ et le calcul précédent fournit $|g|_{X=1}^2 = 1$.

En prenant $\beta < \alpha^2$, $|g|^2$ atteint son maximum en $X = \frac{(1 - \beta)\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$.

$|g|_{X=\frac{(1-\beta)\beta}{\alpha^2-\beta^2}}^2 = \frac{\alpha^2(1-\beta)^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha^2$. On a alors $|g|_{X=\frac{(1-\beta)\beta}{\alpha^2-\beta^2}}^2 \leq 1 \Leftrightarrow \beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^4 \leq 0$. L'étude du polynôme $\beta \mapsto \beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^4$ montre qu'aucune valeur de β ne permet d'obtenir un schéma stable.

– Cas où $\beta^2 - \alpha^2 = 0$:

$$|g|^2 = 2(1 - \beta)\beta X + (1 - \beta)^2 + \alpha^2 \text{ atteint son maximum en } X = 1.$$

$$|g|_{X=1}^2 = 2(1 - \beta)\beta + (1 - \beta)^2 + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 - \beta^2 = 1.$$

Dans ce cas aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour obtenir $|g| \leq 1$.

La stabilité du schéma numérique est définie par trois inéquations :

$$\alpha \leq 1; \quad \beta \leq 1; \quad \frac{\alpha^2}{\beta} \leq 1$$

Soit :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1; \quad 2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1; \quad \frac{c^2 \Delta t}{2\kappa} \leq 1$$

A.2 Influence du schéma numérique

L'équation 2.12, ou équation équivalente résolue par le schéma numérique fait apparaître un terme de dispersion. Ce terme, en $\partial_x^3 h$, affecte tout particulièrement les petites échelles.

L'équation 2.12 présente également un coefficient de diffusion $\kappa' = \kappa - \frac{c^2 \Delta t}{2}$ cohérent avec les conditions de stabilité établies précédemment et dans lesquelles figure l'inéquation $\kappa - \frac{c^2 \Delta t}{2} \geq 0$. Cette inéquation s'interprète alors comme la nécessité d'avoir un coefficient de diffusion positif.

Le schéma numérique tend donc à sous-estimer la diffusion. Le graphique A.1 montre l'évolution d'une fonction gaussienne $h(x, t)$, en prenant comme condition initiale une fonction de solution analytique connue.

$$h_\kappa(x, t) = q_m \frac{l_0}{l^2(t)} \exp \left[-\frac{x - x_0 - ct}{2l^2(t)} \right], \quad l^2(t) = l_0^2 + 2\kappa t.$$

La fonction simulée est moins diffusée qu'attendu par la solution analytique, cela étant d'autant plus vrai que la valeur de κ est petite.

La fonction h simulée reste une gaussienne, advectée à la même vitesse que la solution analytique. À chaque instant, elle coïncide avec une solution analytique de coefficient de diffusion $\kappa_n(t)$, tel que $h(x, t) = h_{\kappa_n(t)}(x, t)$.

$\kappa_n(t)$, peut-être considéré comme le coefficient de diffusion effectif du schéma numérique. Son estimation permet de vérifier que le coefficient κ' , introduit dans l'équation 2.12, est bien représentatif de la diffusion réelle du schéma.

Il est déterminé en considérant le maximum $h_m(t)$ de $h(x, t) = h_{\kappa_n(t)}(x, t)$, et vérifie ainsi $h_m^2(t) = q_m^2 \frac{l_0^2}{l_0^2 + 2\kappa_n(t)t}$. D'où une estimation de $\kappa_n(t)$ par :

$$\kappa_n(t) = \left[\left(\frac{q_m}{h_m(t)} \right)^2 - 1 \right] \frac{l_0}{2t}.$$

Le graphique A.2, représentant l'évolution de $\kappa_n(t)$ à chaque pas de temps, montre une convergence de $\kappa_n(t)$. Cette valeur limite, κ_n , peut-être considérée comme le coefficient de diffusion du schéma numérique. Les fluctuations observées lors des premiers pas de temps sont liées aux petites échelles, particulièrement sensibles aux termes en $\partial_x^3 h$ et $\partial_x^4 h$. Ces petites échelles

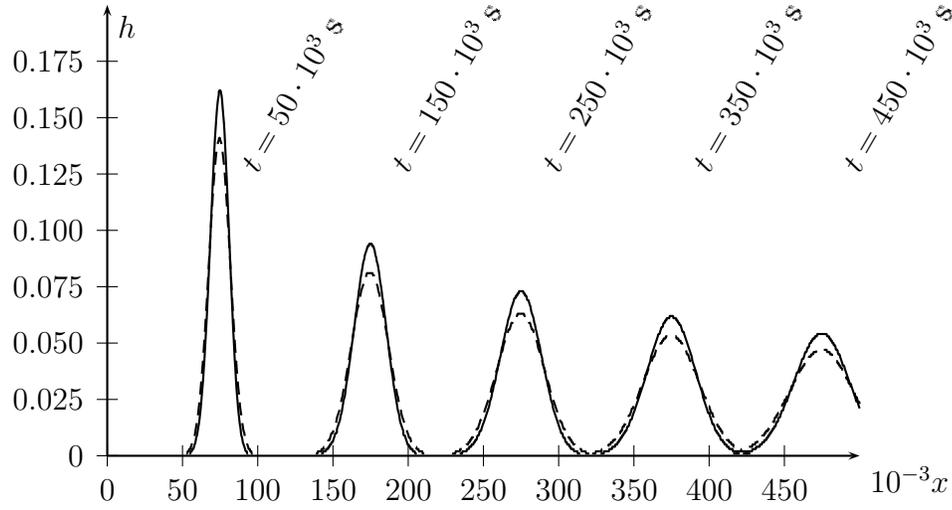
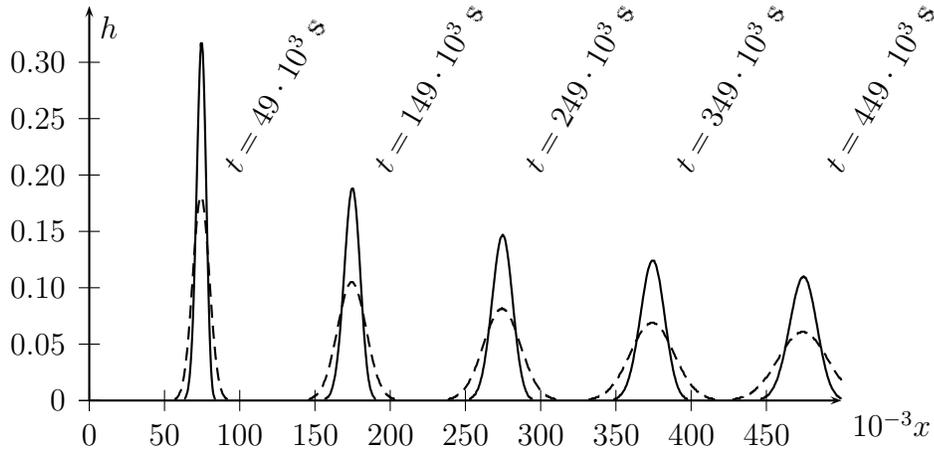
(a) $\kappa = 500 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (b) $\kappa = 300 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

FIG. A.1 – Évolution d'un signal gaussien avec $N = 1000$, $l_0 = 1 \text{ km}$. En tirés, la solution analytique de l'équation d'advection-diffusion, en traits pleins, le signal de même condition initiale, simulé par le schéma numérique.

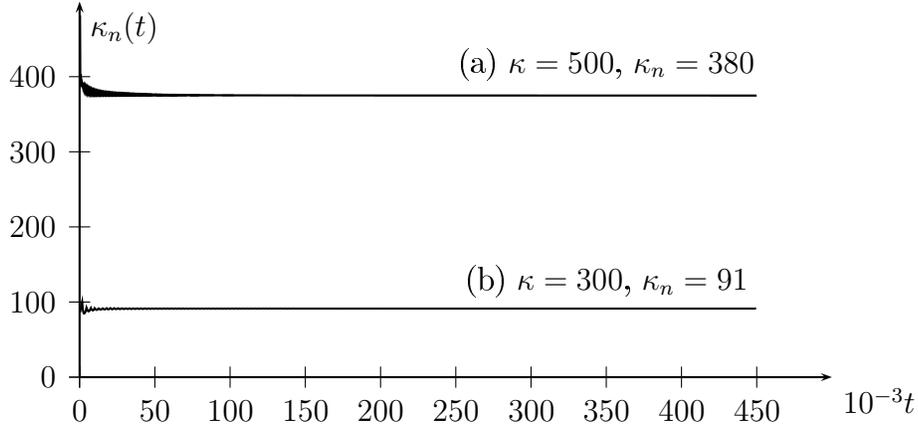


FIG. A.2 – Coefficient κ_n permettant à chaque itération d’obtenir une courbe théorique identique à la courbe simulée. Les simulations sont effectuées avec les paramètres $\Delta x = 500$ m et $c = 1$ m·s⁻¹.

(a) Courbe réalisée avec $\kappa = 500$ m²·s⁻¹. La condition de stabilité donne $\Delta t = 250$ s, donc

$$\kappa' = \kappa - \frac{c^2 \Delta t}{2} = 375 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \text{ alors que } \kappa_n = 380 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

(b) Courbe réalisée avec $\kappa = 300$ m²·s⁻¹, La condition de stabilité donne $\Delta t = 416.7$ s, donc $\kappa' = 91.7$ m²·s⁻¹, alors que $\kappa_n = 91$.

sont rapidement diffusées, d’où la convergence de $\kappa_n(t)$.

Dans chacun des cas le coefficient κ' permet d’expliquer la majeure partie de l’écart entre la diffusion souhaitée, κ , et la diffusion effective du schéma numérique. La prise en compte d’une correction du coefficient de diffusion κ devra donc être effectuée lorsque le but d’une simulation est de tester la dépendance d’un résultat par rapport au coefficient de diffusion.

A.3 Discrétisation de l’équation de diffusion non-homogène

il s’agit ici d’approximer par différence finie la quantité :

$$\partial_x (\kappa(x) \partial_x u(x, t)) \tag{A.2}$$

Soit alors $\Gamma = \kappa(x)u(x + \delta x) - \kappa(x)u(x) - \kappa(x - \delta x)u(x) + \kappa(x - \delta x)(x - \delta x)$.

De plus montrons que

$$\Gamma \simeq \delta x^2 [\partial_x u \partial_x \kappa + \kappa \partial_x^2 u].$$

Utilisons le développements de Taylor pour ces fonctions :

$$u(x + \delta x) = u(x) + \delta x \partial_x u + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u + \mathcal{O}(\delta x^3).$$

$$\kappa(x - \delta x) = \kappa(x) - \delta x \partial_x \kappa + \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 \kappa + \mathcal{O}(\delta x^3).$$

Après calculs et simplifications cela nous donne :

$$\Gamma = \frac{\delta x^2}{2} \kappa(x) \partial_x^2 u + \kappa(x) \frac{\delta x^2}{2} \partial_x^2 u + \delta x^2 \partial_x \kappa(x) \partial_x u + \mathcal{O}(\delta x^3). \text{ enfin}$$

$$\Gamma = \delta x^2 [\kappa(x) \partial_x^2 u + \partial_x \kappa(x) \partial_x u] + \mathcal{O}(\delta x^3).$$

Par conséquent, la quantité A.2 peut être approximée par

$$\frac{1}{\Delta x^2} (K^i u^{i+1} - K^i u^i - K^{i-1} u^i + K^{i-1} u^{i-1}).$$

A.4 Methode d'Euler

Etant donné l'équation

$$y' = f(x, y) \tag{A.3}$$

La démarche à suivre afin de résoudre le problème ici posé, est de calculer une valeur correspondante à $x_{n+1} = x_n + h$. à partir des valeurs connues pour x_n , en commençant par x_0 . Cette valeur devient alors la valeur initiale pour une nouveau pas, et de proche en proche on construit la table des valeurs désirée.

L'équation différentielle écrite sous forme discrète devient :

$$\Delta y = \Delta x f(x, y) = h f(x, y) \tag{A.4}$$

Cette dernière est bien équivalente à (A.3) si $h \rightarrow 0$, et on peut donc calculer le point suivant par la formule d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \tag{A.5}$$

qui est en fait le début d'un développement de Taylor :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^2) \tag{A.6}$$

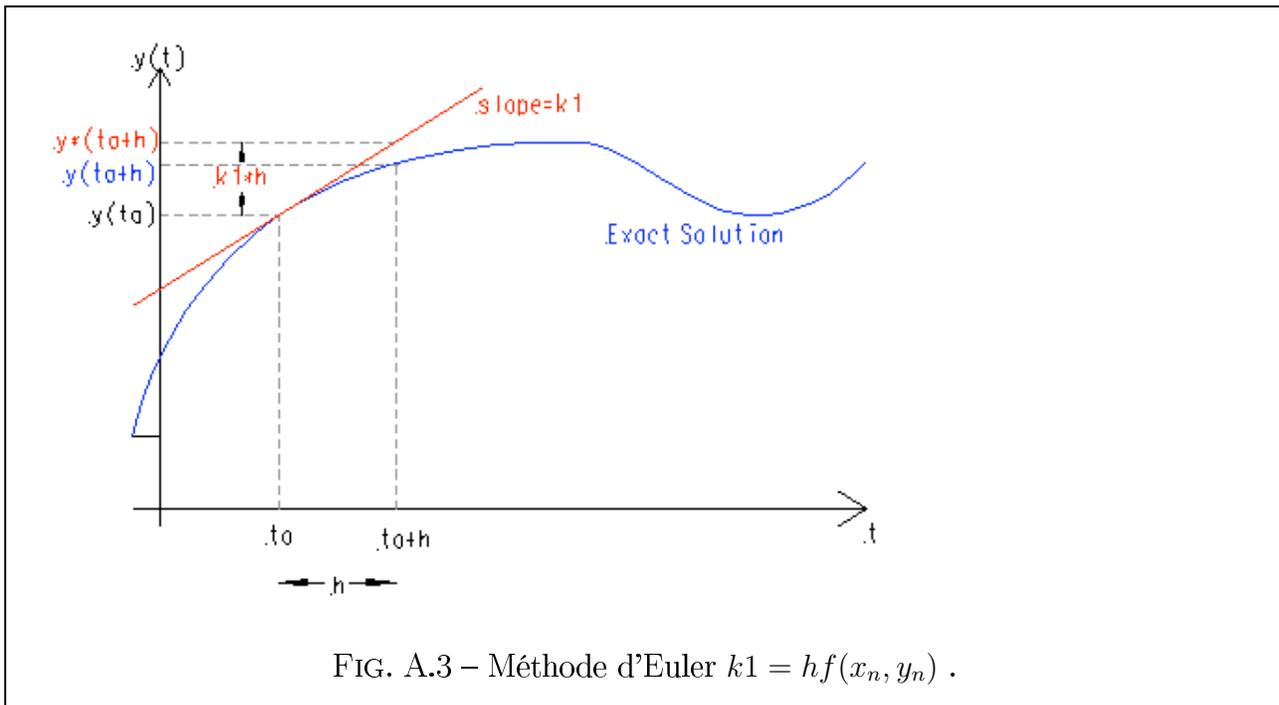
Une telle méthode est dite du premier ordre, puisqu'elle néglige les termes d'ordre supérieur. L'erreur de troncature (due à la méthode) est proportionnelle à h^2 .

D'autre part, elle extrapole la valeur de la dérivée au point initial, M_n , à tout l'intervalle à parcourir. Le nouveau point obtenu, M_{n+1} , est donc différent du point théorique attendu, M_{n+1} . Le saut appliqué à y est :

$$k1 = h f(x_n, y_n) \tag{A.7}$$

Ainsi, même si le pas d'intégration h est très petit, ce qui suppose un temps de calcul très important, les erreurs commises à chaque pas, aussi petites soient elles, non seulement s'accroissent mais ont tendance à s'amplifier : l'intégration diverge.

Cette méthode, insatisfaisante telle quelle, est cependant à la base de toutes les méthodes plus sophistiquées, et montre que le pas d'intégration reste le paramètre fondamental de l'intégration numérique.



A.5 Résultats d'une simulation du KF

Dans le BLUE, la matrice \mathbf{B} de covariance des erreurs d'ébauche est statique. Elle ne tient pas compte de la réduction de l'incertitude engendrée par l'assimilation d'observations. Après quelques itérations, les covariances d'erreurs diffèrent sensiblement des conditions initiales, l'analyse n'est plus optimale.

Le principe du filtre de Kalman a été exposé dans la section 1.5. Sa mise en œuvre a permis de déterminer l'effet d'une série d'observations sur les erreurs d'ébauche, en tenant compte de la diffusion et de l'advection. Puis cela a aussi conduit au diagnostic des longueurs de portée des fonctions de corrélation au point d'observation.

Cadre d'une simulation

Il est question de déterminer la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche dans un cadre stationnaire (dans le sens où une seule observation est effectuée à chaque pas de temps) à laquelle est associée une erreur d'écart-type constant. Dans l'état initial, c'est-à-dire avant la période d'observation, les covariances d'erreurs ont été déterminées par méthode ensembliste tel que vu précédemment dans le chapitre 5, avec un écart-type $\sigma_q = 1$ m, et un temps caractéristique, $\tau = 5 \cdot 10^3$ s. La simulation est effectuée sur un domaine de longueur $L = 200$ km, discrétisé sur une grille de $N = 200$ points. La condition CFL impose un pas de temps de $\Delta t = 125$ s. L'observation est affectée d'une erreur d'écart-type 0.1 m. En outre la vitesse d'advection est de $c = 1$ m·s⁻¹, la diffusion de $\kappa = 120$ m²·s⁻¹.

La propagation par le KF des variances d'erreurs d'ébauche

Dans l'état initial, les variances¹ sont décroissantes. Puis une zone de très faibles variances s'est formée au delà du point d'observation : l'information apportée par l'observation a fortement réduit l'incertitude, au point d'observation, l'advection a ensuite étendue cette zone vers l'aval.

¹données par la diagonale de \mathbf{B}

Influence de la fréquence d'observation sur la variance d'erreur d'ébauche.

L'augmentation de la fréquence d'observation réduit la variance dans la zone située au delà du point d'observation, jusqu'à la rendre quasiment nulle lorsque les observations sont effectuées à chaque pas de temps.

Evolution des fonctions de corrélations.

Il s'agit ici, d'observer les fonctions de corrélation en trois points du bief, au point d'observation et en deux points amont et aval, chacun distant de quelques kilomètres du point d'observation. Comparée aux longueurs de portées initiales (voir le Tableau 5.6), cette distance est choisie de sorte que ces deux points ressentent l'influence de la présence de l'observation.

Description de l'évoluton au fil des assimilations

Dans l'état initial les fonctions d'autocorrélation sont celles du chapitre 5, section 5.3.3 caractérisées par des longueurs de portée croissantes en allant vers l'aval. La première assimilation impacte de manière isotrope la fonction d'autocorrélation au point d'observation (courbe b_2) et réduit sensiblement les longueurs de portée. Les points amont et aval (courbes a_2 et c_2) sont impactés de manière symétriques. L'advection n'a pas pu, à ce stade, entraîner un déplacement de l'information vers l'aval. Cependant, dès les premiers cycles d'assimilation (courbes a_3 à c_3), une tendance à l'anisotropie semble se dégager.

Au cours des cycles suivants, les fonctions d'autocorrélation en amont, au point d'observation, et en aval évoluent de manières différentes. Au point amont (courbes a_4 et a_5), l'assimilation de données influence la fonction d'autocorrélation, mais celle-ci conserve des longueurs de portée relativement isotropes et constantes au cours du temps.

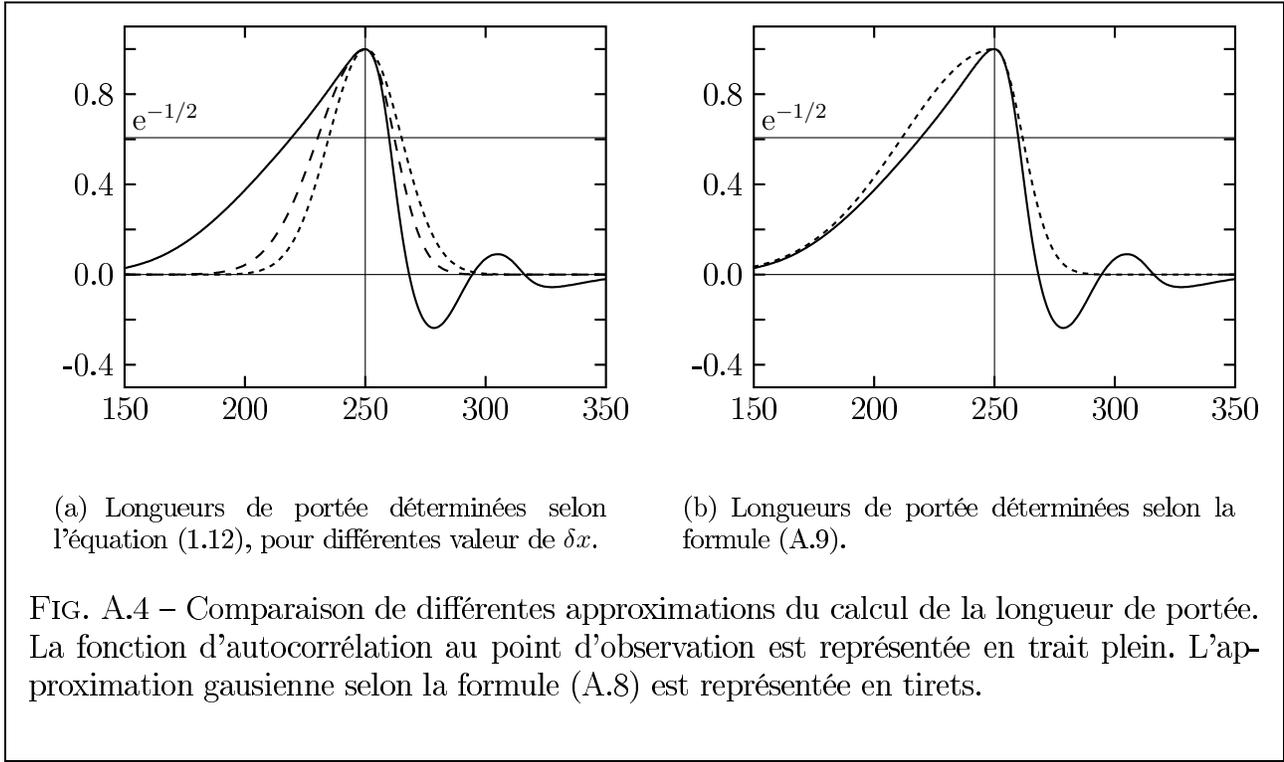
Au point d'observation, la fonction d'autocorrélation prend très rapidement un caractère anisotrope qu'elle conserve ensuite. Les longueurs de portée amont et aval diffèrent fortement, mais leur quotient semble converger assez rapidement. Ce point est étudié plus particulièrement dans la suite.

Au point aval, la fonction d'autocorrélation passe par trois étapes : isotrope avec des longueurs de portée importantes, anisotrope, puis isotrope avec des longueurs de portée réduites. Cela résulte de l'advection. Tout d'abord ce point n'est pas concerné par l'information provenant de l'observation, ensuite l'information parvient à ce point entraînant le caractère anisotrope, finalement ce point est traversé par un flot continu d'information. La fonction de corrélation retrouve ainsi un caractère isotrope mais avec des longueurs de portée réduites.

Méthode d'estimation des longueurs de portée

Il ne faut pas oublier que la dynamique des covariances (voir la section 4.1) a été faite sous l'hypothèse d'une diffusion peu intense et aussi *pour des points relativement proches*. L'estimation des longueurs de portée faite jusqu'à présent, basée sur l'approximation de fonctions gaussiennes, en est fortement dépendante (voir la définition de la section 1.4). On rappelle sous l'approximation gaussienne l'expression d'une fonction de corrélation :

$$\rho(\delta x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2Lp^-}\right) & \text{pour } \delta x \leq 0; \\ \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2Lp^+}\right) & \text{pour } \delta x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$



Les approximations gaussiennes, qui découlent de l'expression A.8, pour des valeurs petites de δx ne traduisent pas de manière précise le caractère inhomogène de la fonction de corrélation. La figure A.4 met en avant ces imprécisions de part et d'autre du point d'observation. Afin de combiner l'amélioration des échelles de corrélation en aval et de permettre un raccord harmonieux avec celles en amont, on choisit alors de définir les longueurs Lp^+ et Lp^- de sorte qu'elles vérifient :

$$\rho(Lp^+) = \rho(-Lp^-) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.9})$$

Cette définition, illustrée par la figure A.5, est toujours dépendante des paramètres physiques mais apparaît plus robuste en cas de changement de paramètres numériques (δx).

Pour plus de détails sur le diagnostic des longueurs de portée, les influences du quotient $\frac{\sigma_b}{\sigma_o}$, et du temps caractéristique consulter le rapport des élèves de l'ENM [Delplanque et al., 2011].

A.6 Expérience Jumelle

Un bon moyen de vérifier, si l'analyse issue de l'estimateur BLUE est une correction efficace du vecteur d'ébauche, est d'utiliser des expériences jumelles. Dans ce type schéma, on dispose de deux jeux de paramètres de contrôle :

- les paramètres de référence supposés connus.
- les paramètres issus d'une perturbés à partir de ceux de référence.

on crée les observations \mathbf{Y}^o en appliquant l'opérateur d'observation \mathcal{H} aux paramètres de *référence* et en ajoutant une erreur artificielle. Le vecteur d'ébauche est lui obtenu en appliquant \mathcal{H} aux paramètres *perturbés*. L'objectif est de contrôler les erreurs associées à chacun de ces

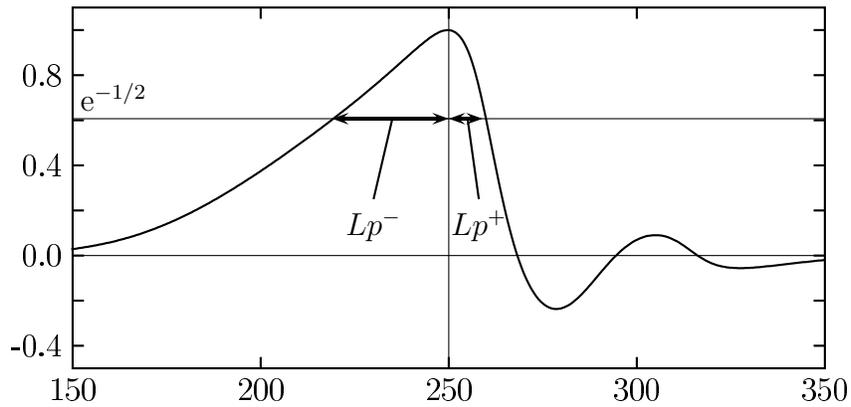


FIG. A.5 – Définition de la longueur de portée utilisée dans la suite de ce chapitre.

vecteurs. Celles ci sont donc en concordance avec la méthode BLUE, autrement dit toute perturbation est d'espérance nulle et d'écart-type correspondant à la matrice de covariance d'erreur. L'assimilation vise à corriger ces variables perturbées par le biais de l'analyse. Nous cherchons à approcher l'analyse dite parfaite : i.e le cas où la correction serait égale à la perturbation des paramètres, et donc on retrouverait en fin d'assimilation les paramètres de référence. Afin tendre vers une bonne qualité de correction, signifie par conséquent mesurer l'écart entre l'état vrai et l'analyse.

Bibliographie

- G. Allaire. *Analyse numérique et Optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- J. Bastien and J-N Martin. *Introduction à l'analyse numérique Applications sous Matlab*. Dunod, 2003.
- F. Bouttier and P. Courtier. *Data assimilation concepts and methods*, 1999.
- R. Daley. *Atmospheric data analysis*. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge University Press, 1991.
- A. Delplanque, J. Guth, and D. Raynaud. *Assimilation de données sur un modèle d'ondes de crues*, 2011.
- G. Desroziers. *Assimilation de données, notes de cours*. Ecole Nationale de la Météorologie, 2010.
- Geir Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99(C5) :10143–10162, 1994.
- L.Y.M. Gicquel and O. Vermorel. *Computational fluid dynamics (cfd) : Discretization, stability, dispersion and dissipation*. 2010.
- O. Pannekoucke. *Note interne : Dynamique des covariances*, 2010.
- O. Pannekoucke, L. Berre, and G. Desroziers. Background-error correlation length-scale estimates and their sampling statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2007.
- Angélique Ponçot. *Assimilation de données pour la dynamique du xénon dans les cœurs de centrale nucléaire*. PhD thesis, INPT, 2008.
- D. Revuz. *Mesure et intégration*. Collection Méthodes. Hermann, 1997.
- S. Ricci, A. Piacentini, O. Thual, E. Le Pape, and G. Jonville. Correction of upstream flow and hydraulic state with data assimilation in the context of flood forecasting. *abc*, 2010.
- A. Tarantola. *Inverse problem theory : Methods for data fitting and model parameter estimation*. Elviesier, 1987.
- O. Thual. *Hydrodynamique de l'environnement*. Ecole Polytechnique, 2010a.
- O. Thual. Journées des mathématiques mars 2010 : Assimilation de données pour un modèle d'advection-diffusion, 2010b.

Table des figures

1.1	Influence du profil de la fonction de covariance au point d'observation sur l'élaboration d'une analyse avec un domaine discrétisé.	15
1.2	Fonctions de corrélation homogène (a) et inhomogène (b), pour le point central du domaine.	15
1.3	Représentation de la longueur de portée notée L_D à l'aide la parabole osculatrice (courbe tiretée) et diagnostic de la forme de la fonction de corrélation en son origine (courbe noire) [Pannekoucke et al., 2007].	17
1.4	Champ de longueur de portée pour la matrice de covariance hétérogène.	17
1.5	Principe de fonctionnement d'un filtre de Kalman d'ensemble, les ellipses autour des états schématisent la variance des différents membres.	20
2.1	Canal incliné à fond plat. [Thual, 2010a]	23
2.2	Maillage d'un rectangle en différences finies	25
2.3	Condition de stabilité du schéma numérique selon les paramètres α et β	27
2.4	Comparaison des méthodes d'Euler et Runge-Kutta : a) $\kappa=120, c=1, Dt=125$ $Dt_{Euler}=120$ b) $\kappa=100, c=1, Dt=125$ $Dt_{Euler}=200$	30
2.5	Phénomène de dispersion : a). Signaux issus de la méthode RK4 avec une condition initiale gaussienne, $lp_0=2$ km b). Comparaison des méthodes Euler et Runge-Kutta avec une condition initiale abrupte (marches)	31
3.1	Exemple de réalisation de forçage amont avec fonction de covariance temporelle associée et signaux diffusés pour $q_m = 1$ a)-c)-e). $\tau = 2.10^3s$ et b)-d)-f). $\tau = 15.10^3s$	35
4.1	Représentation de la longueur de portée théorique, dans le cas d'une advection diffusion (droite croissante) et d'une advection pure (droite horizontale).	40
4.2	Longueurs de portée théoriques avec une observation.	41
5.1	Tracé d'une colonne de \mathbf{B}_e au point central du domaine.	44
5.2	a) Tracé de trois colonnes de B_e dans le cadre d'une advection pure. b) Longueurs de portée diagnostiquées pour $Lp = 5km$	45
5.3	Méthode Euler - Comparaison de la longueur de portée théorique avec celle diagnostiquée en aval. $\kappa=750$ $Ne=500$ $Lp_0=5km$ coefficient directeur : $a_{exp}=1.8$ $a_{th}=3$	47
5.4	Mise en évidence de la valeur limite de lp_0 afin de s'affranchir du phénomène de dispersion. a) $lp_0 = 2km$ b) $lp_0 = 2.82km$ c) $lp_0 = 4km$ d) $lp_0 = 4.47km$	48
5.5	Choix de la valeur limite. a). $lp_0 = 2km$ b). $lp_0 = 5km$	49
5.6	Méthode RK4 - Comparaison de la longueur de portée théorique avec celle diagnostiquée en aval. $\kappa=120$ $Ne=10000$ $Lp_0=5km$	49

5.7	Représentation des fonctions de covariance et des longueurs de portée aval. Les paramètres utilisés sont $c = 1m/s$, $\kappa = 120m^2/s$, $Ne = 10000$	50
6.1	Tenseur de diffusion pour $Ne = 1000$ membres.	56
6.2	a) Tenseur local de diffusion synthétique. b) Colonnes de la matrice \mathbf{B} issue de l'opérateur de diffusion.	57
6.3	a) Tenseur local de diffusion diagnostiqué. b) Colonnes de la matrice \mathbf{B} issue de l'opérateur de diffusion.	57
6.4	a).longueurs de portées issues du tenseur synthétique. b).longueurs de portées issues du tenseur de diffusion diagnostiqué	58
7.1	Schéma du raisonnement avec assimilation	60
7.2	Propagation par le filtre de Kalman des variances d'erreur données par la diagonale de \mathbf{B} . Le point d'observation est matérialisé par une ligne verticale à $x_{obs} = 250$ km.	62
7.3	Influence de la fréquence d'observations sur les variations de la variances d'erreur d'ébauche a) $freqo = 150$ b) $freqo = 80$ c) $freqo = 3$	63
7.4	Influence de la fréquence d'observations sur la carte des longueurs de portée a) $freqo = 150$ b) $freqo = 80$ c) $freqo = 3km$	64
7.5	Comparaison entre l'émulation du BLUE cyclé initialisé à partir de $\mathbf{B}_{e,assim,param}$ et initialisé à partir de la matrice ensembliste sans assimilation. a) variance d'erreur d'ébauche b) carte des longueurs de portée c) superposition BLUE et BLUE EnKF	65
A.1	Évolution d'un signal gaussien avec $N = 1000$, $l_0 = 1$ km. En tirés, la solution analytique de l'équation d'advection-diffusion, en traits pleins, le signal de même condition initiale, simulé par le schéma numérique.	69
A.2	Coefficient κ_n permettant à chaque itération d'obtenir une courbe théorique identique à la courbe simulée. Les simulations sont effectuées avec les paramètres $\Delta x = 500$ m et $c = 1$ m·s ⁻¹ . (a) Courbe réalisée avec $\kappa = 500$ m ² ·s ⁻¹ . La condition de stabilité donne $\Delta t = 250$ s, donc $\kappa' = \kappa - \frac{c^2 \Delta t}{2} = 375$ m ² ·s ⁻¹ , alors que $\kappa_n = 380$ m ² ·s ⁻¹ . (b) Courbe réalisée avec $\kappa = 300$ m ² ·s ⁻¹ , La condition de stabilité donne $\Delta t = 416.7$ s, donc $\kappa' = 91.7$ m ² ·s ⁻¹ , alors que $\kappa_n = 91$	70
A.3	Méthode d'Euler $k1 = hf(x_n, y_n)$	72
A.4	Comparaison de différentes approximations du calcul de la longueur de portée. La fonction d'autocorrélation au point d'observation est représentée en trait plein. L'approximation gaussienne selon la formule (A.8) est représentée en tirets.	74
A.5	Définition de la longueur de portée utilisée dans la suite de ce chapitre.	75

Liste des tableaux

5.1	paramètres pour la simulation d'advection pure.	45
5.2	$\kappa= 1250$ et 500 membres.	46
5.3	$\kappa= 3000$ $Ne = 500$ $Lp_0= 5\text{km}$	46
5.4	$\kappa= 750$ $Ne = 500$ $Lp_0= 5\text{km}$	47
5.5	Comparaison longueurs de portée théoriques et expérimentales avec la méthode de RK4	48
5.6	Comparaison longueurs de portée théoriques et expérimentales avec la méthode de RK4	49
6.1	Données liant l'opérateur de diffusion et l'échelle de corrélation	55
7.1	Test : paramètres utilisés lors de l'émulation du EnKF.	63