Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)*

Présentée et soutenue le *13/12/2021* **par :**

Benjamin MARTIN

Méthodes numériques et conditions limites pour la simulation aux grandes échelles du couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine

---

JURY

Guillaume HOUZEAUX	Chercheur au BSC	Rapporteur
Mario RICCHIUTO	Chercheur à l'Inria	Rapporteur
Nicolas GOURDAIN	Professeur à l'ISAE-SUPAERO	Président
Marlène SANJOSÉ	Professeur à l'ÉTS	Examinatrice
Franck NICOUD	Professeur à l'Université de Montpellier	Examinateur
Florent DUCHAINE	Chercheur au CERFACS	Directeur
Laurent GICQUEL	Chercheur au CERFACS	Co-directeur
Nicolas ODIER	Chercheur au CERFACS	Invité
Michael RUDGYARD	Consultant scientifique au CERFACS	Invité

École doctorale et spécialité :
MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :
CERFACS – Équipe Computational Fluid Dynamics (CFD)

Directeur de Thèse :
Florent DUCHAINE

Rapporteurs :
Guillaume HOUZEAUX et Mario RICCHIUTO

À mes proches

Table des matières

Remerciements **5**

Nomenclature **7**

Introduction générale **13**
Le rôle de la CFD dans le monde d'hier et d'aujourd'hui . . . 13
Généralités sur les turbomachines . . . 15
Le futur de l'aviation . . . 17
Objectifs et plan de la thèse . . . 18
Liste des publications . . . 20

1 Simulation de l'écoulement au sein d'une turbomachine **21**
1.1 Introduction . . . 21
1.2 Modélisation de la turbulence . . . 21
1.3 Modélisation de la turbulence en proche paroi . . . 24
1.4 Couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine . . . 25
1.5 Simulation d'un moteur complet . . . 28
1.5.1 Introduction . . . 28
1.5.2 Configuration et domaines de calcul . . . 29
1.5.3 Résultats : comparaison simulation intégrée/simulation isolée . . . 32
1.5.4 Conclusion et ouverture sur les chapitres suivants . . . 37

2 Équations de Navier-Stokes pour la LES et leur résolution numérique dans un contexte turbomachine **39**
2.1 Introduction . . . 39
2.2 Forme générale des équations de Navier-Stokes . . . 40
2.2.1 Équations de conservation . . . 40
2.2.2 Équation d'état . . . 40
2.3 Équations de la simulation aux grandes échelles . . . 41
2.3.1 Filtrage des équations de Navier-Stokes . . . 41
2.3.2 Fermeture des équations de transport : modèles de sous-mailles . . . 42
2.4 Méthodes numériques pour la LES dans le code AVBP . . . 44
2.4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes . . . 44
2.4.2 Discrétisation du domaine de calcul et notations associées . . . 47
2.4.3 Les différents schémas de convection du formalisme *cell-vertex* . . . 49
2.4.4 Résolution des termes diffusifs . . . 57
2.4.5 Viscosité artificielle . . . 58
2.4.6 Discrétisation temporelle . . . 60
2.4.7 Conditions limites . . . 62
2.5 Couplage multi-composants : méthode MISCOG . . . 63
2.6 Conclusion . . . 65

3 Analyse numérique et améliorations des schémas de convection d'AVBP 67
3.1 Introduction . . . 67
3.2 Analyse des schémas existants . . . 68
3.2.1 Rappel sur la construction des schémas . . . 68
3.2.2 Analyse spectrale monodimensionnelle . . . 72
3.2.3 Analyse spectrale bidimensionnelle . . . 77
3.2.4 Sensibilité des schémas à la qualité du maillage . . . 82
3.2.5 Conclusion intermédiaire . . . 89
3.3 Développement de nouveaux schémas . . . 90
3.3.1 Schémas *Three-Step Taylor-Galerkin* . . . 90
3.3.2 Nouvelle famille de schémas utilisant le formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique . . . 96
3.3.3 Schémas Petrov-Galerkin avec une reconstruction polynomiale d'ordre supérieur à 2 . . . 132
3.4 Bilan des schémas comparés . . . 145
3.5 Conclusion . . . 148

4 Analyse numérique d'une méthode de pas de temps local pour le couplage entre composants 151
4.1 Introduction . . . 151
4.2 Principes et gains attendus par pas de temps local . . . 153
4.2.1 Gains théoriques sur un cas concret . . . 154
4.3 Analyse numérique de la méthode MISCOG . . . 156
4.3.1 Représentation matricielle avec un domaine unique . . . 157
4.3.2 Représentation matricielle dans le cas à deux domaines . . . 166
4.4 Précision spatiale de MISCOG dans AVBP . . . 175
4.4.1 Propagation d'une onde acoustique monodimensionnelle sur un maillage uniforme . . . 175
4.4.2 Convection d'un vortex isentropique en deux dimensions . . . 184
4.5 Évaluation de la méthode LTS sur des écoulements complexes . . . 190
4.5.1 Canal turbulent . . . 193
4.5.2 Turbine LS89 . . . 199
4.5.3 Application de la méthode de pas de temps local à une simulation intégrée chambre de combustion et turbine . . . 216
4.6 Bilan des gains réalisés par la méthode LTS et parallélisation de la méthode . . . 226
4.7 Conclusion . . . 228

5 Génération de conditions limites réalistes à l'interface entre plusieurs composants d'une turbomachine 231
5.1 Introduction et motivations . . . 231
5.2 Présentation de la méthode *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* (SPOD) . . . 233
5.2.1 Bases théoriques pour le calcul de modes SPOD à partir d'une base de données de *snapshots* . . . 233
5.2.2 Reconstruction de la base de données initiale . . . 238
5.2.3 Choix de la norme du produit scalaire . . . 239
5.2.4 Choix des paramètres de la décomposition modale SPOD . . . 241
5.3 Simulation intégrée de référence : configuration FACTOR . . . 241
5.3.1 Détails de la configuration . . . 241
5.3.2 Description de l'écoulement . . . 244
5.3.3 Génération de la base de données instationnaire . . . 250
5.3.4 Décomposition modale de la base de données : comparaison entre SPOD, POD et DMD . . . 254
5.4 Construction d'une condition limite d'entrée instationnaire . . . 263
5.4.1 Définition de nouvelles conditions limites à partir de la décomposition modale SPOD . . . 263
5.4.2 Analyse des champs reconstruits . . . 266

5.4.3 Effets des conditions limites sur la prédiction des calculs isolés 269
5.4.4 Comparaison des cartographies 2D et des profils 1D aux plans 40 et 41 . . . 273
5.4.5 Températures adiabatiques en paroi 278
5.4.6 Plans normaux à la surface de pale le long de la corde 281
5.4.7 Surcoût de la condition limite instationnaire 284
5.5 Conclusion et perspectives de l'étude 285

Conclusion et perspectives **287**
Conclusion 287
Perspectives 289

Liste des Figures **291**

Liste des Tables **300**

Bibliographie **303**

Annexes **321**

A Fermeture des termes de bords pour les schémas LW et TTG **323**
A.1 Introduction 323
A.2 Formulations existantes 323
A.3 Nouvelle formulation pour la fermeture des termes de bords 324
A.3.1 Cas des éléments linéaires (éléments $\mathbb{P}_1$) 324
A.3.2 Cas des éléments bilinéaires (éléments $\mathbb{Q}_1$) 326
A.4 Validation de la formulation BCSOT 327
A.4.1 Onde acoustique linéaire 327
A.4.2 Cavité résonante monodimensionnelle 330
A.5 Conclusion 334

B Compléments de résultats au Chapitre 3 **335**
B.1 Amélioration des schémas existants 335
B.1.1 Effets de la viscosité artificielle 335
B.1.2 Effets du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi 336
B.1.3 Optimisation sur les coefficients des schémas 337
B.1.4 Investigation d'un schéma TTGC à γ variable 347
B.1.5 Conclusion intermédiaire 354
B.2 Dissipation et dispersion numériques du schéma TTG4A-R3 355
B.3 Schémas avec des termes supplémentaires du développement de Taylor 356

C Méthodes de régularisation de maillage **365**
C.1 Régularisation par Laplacien global 365
C.1.1 Description de la méthode 365
C.1.2 Expérimentation sur différents maillages 367
C.2 Méthode de régularisation par éléments finis 370
C.2.1 Description de la méthode 370
C.2.2 Expérimentation sur différents maillages 373
C.3 Implémentation des méthodes précédentes dans AVBP et parallélisation 374
C.4 Conclusion 376

D Méthode de reconstruction des flux dans un formalisme *node-centered* **379**
D.1 Généralités 379
D.2 Implémentation dans AVBP 384
D.2.1 Pré-traitement 384
D.2.2 Calcul des flux 384
D.2.3 Intégration temporelle 386
D.3 Résultats 387

D.3.1 Convection d'un vortex isentropique sur maillages triangulaires 387
D.3.2 Convection d'un vortex isentropique sur maillages hybrides 389
D.4 Conclusion 390

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe CFD du Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) et réalisée dans le cadre du projet ATOM financé par Safran et la DGAC.

Dans un premier temps, je tiens à remercier sincèrement les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail. En particulier, les deux rapporteurs Guillaume HOUZEAUX et Mario RICCHIUTO pour avoir lu mon manuscrit en détails, tout en apportant des compléments intéressants grâce à leur expertise respective dans le domaine. Je remercie également Nicolas GOURDAIN pour avoir tenu le rôle de président du jury et organisé parfaitement la soutenance pour qu'elle se déroule dans les meilleures conditions. Je remercie enfin Marlène SANJOSÉ et Franck NICOUD pour leurs commentaires encourageants et leur intérêt apporté à mon travail en tant qu'examinateurs.

Pour poursuivre avec l'encadrement, un grand merci à mon directeur de thèse Florent DUCHAINE et mon co-directeur Laurent GICQUEL. Merci d'avoir partagé avec moi votre passion pour la recherche, travailler à vos côtés pendant ces trois dernières années a été un réel plaisir et une grande source d'enseignements. Grâce à vous, j'ai toujours pu dire à mes proches que j'aimais me lever tous les matins pour aller faire quelque chose qui me passionnait et surtout en ayant la chance d'être entouré de personnes avec un engouement tel que le vôtre. J'ai beaucoup appris à vos côtés et j'espère avoir acquis une partie de votre rigueur scientifique qui vous caractérise tant. Merci également de m'avoir laissé autant de liberté dans mon travail, en me faisant confiance sur tant de sujets. C'est une vraie chance de pouvoir bénéficier d'une telle autonomie dans son travail et au final l'ensemble des problématiques traitées au cours de la thèse est, avec un peu de recul, bien plus large que le sujet initial.

Ensuite, comment ne pas remercier Michael RUDGYARD. Les compliments des membres du jury sur la qualité des travaux lors de la soutenance te sont bien évidemment également destinés. La partie numérique n'aurait pas eu cette qualité sans tes innombrables idées et intuitions qui sont venues nourrir nos échanges et aboutir aux résultats présentés. C'était passionnant et très riche d'échanger avec toi. Au début de la thèse, rien ne me prédestinait à travailler sur des problématiques numériques. Mais finalement, ta passion a été communicative et je suis me laissé porter par ton enthousiasme manifeste pour le sujet. Le résultat de cette collaboration étroite et fructueuse est visible dans le chapitre numérique avec des idées vraiment intéressantes et qui ont le mérite de fonctionner.

Pour terminer avec l'encadrement, un grand merci bien évidemment à Nicolas ODIER, pour qui le statut d'invité à la soutenance de thèse est loin de refléter la réalité du déroulement de ces trois dernières années. Merci d'avoir participé à la hauteur d'un directeur de thèse à l'encadrement de mes travaux. Je te remercie encore pour nos discussions régulières, tes bons conseils et plus généralement le partage de nouvelles idées, tout ça dans une ambiance détendue et agréable. Il faut croire que les échanges se passent bien entre anciens Venonnais.

Merci également à tous les autres chercheurs séniors du CERFACS. En particulier, merci Jérôme de nous avoir (mon vélo et moi) laissé partager ton bureau pendant trois ans. Merci pour ton soutien technique sans faille, tes connaissances en turbomachine, mais aussi pour toutes nos discussions quotidiennes qui sont venues rythmer ma thèse. Merci également à Gabriel et Oliver

qui assurent un support et une évolution régulière du code. C'est une grande chance d'avoir votre immense expertise toujours disponible et à quelques bureaux de distance.

Un grand merci également à tous les membres de l'administration du CERFACS qui nous permettent de travailler dans les meilleures conditions possibles en créant un lieu propice à la réussite de tant de thèses. En particulier merci à Chantal, Marie et Michèle pour leur bonne humeur communicative et leur efficacité dans toutes les tâches qui leur incombent. Merci aussi à toute l'équipe informatique pour la mise à disposition de moyens importants et un support technique toujours disponible et de grande qualité. Merci à Fred, Fabrice, Gérard et Isabelle pour leur soutien permanent, jusqu'au jour de la soutenance.

Merci également à tous les doctorants du CERFACS. C'était une chance inouïe de bénéficier d'un lien aussi fort entre nous. L'entraide et les échanges au cours des pauses et des repas ont pu faire avancer et débloquer beaucoup de situations, j'en suis convaincu. Merci pour tous les bons moments qu'on a pu passer ensemble, dans le cadre de la thèse ou en dehors, devant un tableau blanc ou sur un vélo : Clovis, Lionel, Victor, Antoine, Nicolas, Jonathan, Antony, Thomas et j'en oublie.

Merci aussi à mes proches, ceux présents sur place pour la soutenance mais aussi ceux en distanciel. C'était un réel plaisir de recevoir autant de commentaires positifs et surtout la meilleure des récompenses pour reconnaître le travail accompli pendant cette thèse. Merci à mes parents pour l'éducation et les valeurs que vous m'avez transmises. Vous m'avez toujours placé dans les meilleures dispositions possibles pour assurer ma réussite, merci ! Merci aussi à ma sœur Virginie, à mes grands-parents et à ma belle-famille qui ont toujours été un soutien sincère pendant ces dernières années, tout en montrant un intérêt particulier dans mes recherches.

Et pour finir, merci à Marie-Morgane, ma femme. Merci pour ton soutien quotidien. Mes mots ne seront jamais à l'hauteur de l'affection et de l'amour que tu m'as témoigné tout au long de cette thèse, et plus généralement depuis notre première rencontre. J'aimerais t'exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance. Merci pour tes encouragements et ton soutien. Merci pour tous les moments passés ensemble et pour tous les autres, nombreux, à venir !

Nomenclature

Acronymes

AVBP	Code de calcul LES développé par le CERFACS
CFD	Dynamique des fluides numérique ou *Computational Fluid Dynamics*
CFL	Nombre CFL pour Courant-Friedrichs-Lewy
CL	Condition Limite
CPU	Processeur ou *Central Processing Unit*
CWIPI	Bibliothèque de couplage, *Coupling With Interpolation Parallel Interface*
DFT	Transformée de Fourier discrète ou *Discrete Fourier Transfer*
DGEN	Turbofan destiné à des avions légers et développé par Price Induction
DLR	Centre allemand de recherche
DMD	*Dynamic Mode Decomposition*
DNS	Simulation numérique directe ou *Direct Numerical Simulation*
ENO	*Essentially Non-Oscillatory*
FACTOR	*Full Aero-thermal Combustor-Turbine Interaction Research*
FULLEST	Simulation moteur complet du DGEN, *First fUlL engine computation with Large Eddy SimulaTion*
HIP	Logiciel de maillage
IPP	Intégration par parties
LES	Simulation aux grandes échelle ou *Large-Eddy Simulation*
LTS	Pas de temps local ou *Local Time Stepping*
LW	Schéma Lax-Wendroff
MISCOG	Méthode de couplage multi-composants, *Multi Instance Solver Coupled through Overlapping Grids*
NGV	*Nozzle Guide Vanes*
NSCBC	Conditions limites non réfléchissantes ou *Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition*
OGV	Redresseur ou *Outlet Guide Vane*
PGCD	Plus Grand Commun Diviseur
POD	*Proper Orthogonal Decomposition*
PRACE	Partenariat pour le calcul avancé en Europe
PSD	Densité spectrale de puissance ou *Power Spectral Density*
PVC	*Precessing Vortex Core*
RANS	*Reynolds-Averaged Navier–Stokes*
RMS	Moyenne quadratique ou *Root Mean Square*

SGS	Terme de sous-maille ou *Sub-Grid Scale*
SPOD	*Spectral Proper Orthogonal Decomposition*
THI	Turbulence Homogène Isotrope
TKE	Énergie cinétique turbulente ou *Turbulent Kinetic Energy*
TTG	Schéma *Two-step Taylor Galerkin*
UNIFI	Université de Florence
WALE	Modèle de sous-maille *Wall-Adapting Local Eddy*
WENO	*Weighted Essentially Non-Oscillatory*
WRLES	LES résolue en paroi ou *Wall-Resolved LES*

Lettres romaines

a	Coefficient temporel
a_0	Vitesse du son
A	Amplitude d'une perturbation
$\vec{\mathcal{A}}$	Tenseur des Jacobiennes des flux
$\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$	Matrices Jacobiennes des flux
b_Δ	Paramètre définissant la perturbation du maillage
B	Coefficient d'une perturbation
$\mathbf{BT}_j$	Terme de fermeture aux bords pour le terme de second ordre des méthodes Taylor-Galerkin au nœud j (vecteur)
c	Vitesse de convection
c_R^*	Vitesse de phase
C_f	Coefficient de frottement
C_p	Capacité calorifique massique à pression constante
$\mathcal{C}_j$	Volume de contrôle associé au nœud j
dt	Espacement entre pas de temps
D	Coefficient de diffusion
$\mathbf{D}$	Terme de diffusion artificielle ou matrice diagonale *mass lumped*
$\mathcal{D}_j$	Ensemble de cellules liées au nœud j
$\underline{\mathbf{D}}_{j,e}$	Matrice de distribution du résidu de la cellule K_e au nœud j
e	Entier relatif à un élément ou une cellule
E	Énergie totale ou opérateur de décalage spatial différences finies
d	Nombre de dimension
f	Fréquence ou entier relatif à une face
F	Nombre de Fourier
$\vec{\mathcal{F}}$	Flux
$\vec{\mathcal{F}}^C$	Flux convectifs
$\vec{\mathcal{F}}^V$	Flux visqueux
$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$	Flux des grandeurs conservatives
G	Coefficient d'amplification d'un schéma numérique
h	Taille caractéristique d'une cellule ou demi-hauteur de canal
H	Enthalpie totale
I	Intensité turbulente
$\mathbf{I}$	Matrice identité
j	Entier relative à un nœud
J	Jacobienne
k	Entier relative à un vertex, énergie cinétique turbulente ou nombre d'onde
k_x, k_y	Nombres d'onde dans les directions x et y
K	Constante de Von Karman ou élément polygonal ou polyédrique
$\mathbf{K}$	Matrice représentant un schéma numérique dans le formalisme différences finies
K_e	Élément du domaine
$\tilde{K}_e$	Élément de référence associé à K_e
l	Échelle de longueur
L	Longueur
$\mathbf{L}_j$	Terme d'ordre 1 pour les méthodes Taylor-Galerkin au nœud j (vecteur)
$\mathbf{LL}_j$	Terme d'ordre 2 pour les méthodes Taylor-Galerkin au nœud j (vecteur)
L_2	Norme quadratique
L_x, L_y	Dimensions du domaine selon x et y

$\mathcal{L}_-$	Amplitude d'une onde acoustique sortante
M	Opérateur matrice de masse
M_{is}	Mach isentropique
$\mathcal{M}$	Matrice de masse
$\mathbf{M}$	Matrice de masse
n	Nombre de maille
n_c	Taux de compression
n_v	Nombre de vertex
$\vec{n}$	Vecteur unitaire
N	Nombre d'aubes
N_{blk}	Nombre de blocs
N_{dt}	Ratio de pas de temps
N_f	Nombre de fréquences
N_g	Nombre de points de quadrature
N_h	Nombre de nœuds dans la maillage
N_i	Fonction de forme d'un élément de référence
N_K	Nombre de cellules dans le maillage
N_{modes}	Nombre de modes
N_n	Ratio de nombres de mailles
N_{ovlp}	Nombre d'instantanés dans la superposition entre blocs
N_{overlap}	Nombre de nœuds dans la région de superposition
N_t	Nombre de champs instantanés
N_{var}	Nombre de variables de l'écoulement
N_x	Nombre de nœuds dans la maillage
P	Pression statique
P_t	Pression totale
Pr	Nombre de Prandtl
q	Flux de chaleur
$\mathbf{q}$	Instantané de l'écoulement
Q	Débit massique
Q_r	Débit réduit
$\mathbf{Q}$	Matrice de la base de données de l'écoulement
r	Rayon
R	Constante des gaz parfaits
R_c	Rayon du vortex
$\mathbf{R}_e$	Résidu à l'élément
$\mathbf{R}_j$	Résidu au nœud
Re	Nombre de Reynolds
s	Abscisse curviligne
S	Terme source
$\mathbf{S}_f$	Matrice densité spectrale de puissance de la fréquence f
$\vec{S}$	Normale
S_p	Facteur d'accélération ou *speedup*
S_t	Nombre de Strouhal
t	Temps
T	Température statique ou période
T_{blk}	Période d'un bloc
T_t	Température totale
T_w	Température de paroi
$\mathcal{T}_h$	Maillage
u	Vitesse selon l'axe x
u_j	j-ième composante de la vitesse
u_τ	Vitesse de frottement
U^*	Vitesse de frottement en paroi
$\mathbf{U}$	Vecteur des variables conservatives
v	Vitesse selon l'axe y
V	Volume
w	Vitesse selon l'axe z
w_j	Valeur du nœud j d'une fonction de fenêtrage
$\mathbf{W}$	Matrice de poids du produit scalaire
$\vec{x}$	Vecteur position
x, y, z	Coordonnées dans l'espace
x^+	Distance adimensionnée parallèle à l'écoulement
y^+	Distance adimensionnée normale à la paroi
z^+	Distance adimensionnée perpendiculaire à l'écoulement

Lettres grecques

α, β	Coefficients définissant les termes de premier et deuxième ordre de la première étape des schémas de la famille TTG
α_c	Angle entre l'axe x et le vecteur vitesse $\vec{c}$
α_E	Ratio contrôlant la contribution entre les nœuds à gauche et à droite pour l'interpolation
γ	Coefficient du schéma TTGC ou rapport de chaleur massique
Γ	Intensité du vortex
δ_{ij}	Indice de Kronecker
δ^2	Opérateur de différences centrées de dérivée seconde
Δ	Taille caractéristique du filtre
Δ_{CGCD}	Décalage entre la position d'un nœud et le centre de gravité de la cellule duale associée
Δf	Discrétisation fréquentielle
Δt	Pas de temps
Δx	Pas d'espace
Δ_0	Opérateur de différences centrées de dérivée première
$\delta\mathbf{L}_j$	Terme correctif au nœud j pour les éléments bilinéaires pour le terme d'ordre 1 des méthodes Taylor-Galerkin
$\delta\mathbf{LL}_j$	Terme correctif au nœud j pour les éléments bilinéaires pour le terme d'ordre 1 des méthodes Taylor-Galerkin
ϵ	Taux de dissipation turbulente ou paramètre utilisateur pour la viscosité artificielle
$\epsilon^{(2)}$	Paramètre de viscosité de deuxième ordre
$\epsilon^{(4)}$	Paramètre de viscosité de quatrième ordre
ϵ_1, ϵ_2	Coefficients définissant les termes de deuxième ordre de la deuxième étape des schémas de la famille TTG
ζ	Senseur
η	Ratio d'une nombre de mailles dans la région de superposition
η	Échelle de Kolmogorov
θ_1, θ_2	Coefficients définissant les termes de premier ordre de la deuxième étape des schémas de la famille TTG
$\mathbf{\Theta}_f$	Matrice des vecteurs propres de la fréquence f
κ_c	Longueur d'onde de coupure du filtre
λ	Coefficient de conductivité thermique
$\mathbf{\Lambda}_f$	Matrice diagonale des valeurs propres de la fréquence f
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique ou nombre CFL
ν_t	Viscosité cinématique de sous-maille
ξ	Nombre d'onde adimensionné
ρ	Masse volumique
σ	Écart-type ou taux de croissance d'une instabilité
τ	Contrainte de cisaillement ou temps caractéristique
τ_w	Contrainte de cisaillement en paroi
ϕ_j	Fonction de forme
ϕ_G	Phase ou argument de G
ψ_i	Fonction test du formalisme Petrov-Galerkin
Ψ	Circulation du vortex
$\mathbf{\Psi}_f$	Matrice des vecteurs propres de la fréquence f
ω^*, Ω^*	Pulsation temporelle modifiée
Ω	Vitesse de rotation ou domaine spatial
$\partial\Omega$	Bords du domaine Ω

Indices

t	Relatif aux termes de sous-maille
$R2$	Relatif à une reconstruction quadratique
$R3$	Relatif à une reconstruction cubique

Opérateurs

$\bar{\bullet}$	Grandeur filtrée ou moyenne temporelle
$\widetilde{\bullet}$	Grandeur filtrée au sens de Favre ou valeurs propres non nulles associées à un problème SPOD
$\lfloor \bullet \rfloor$	Opérateur partie entière
$\lceil \bullet \rceil$	Opérateur partie entière supérieure
$\hat{\bullet}$	Transformée de Fourier
$\bullet^*$	Opérateur adjoint
$\bullet'$	Fluctuations
$\langle \bullet \rangle$	Moyenne spatiale

Introduction générale

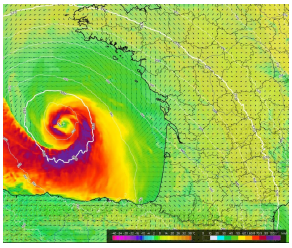
Le rôle de la CFD dans le monde d'hier et d'aujourd'hui

L'observation et la compréhension de la dynamique d'un écoulement fluide n'est pas une discipline nouvelle. Dès l'Antiquité, des structures à la fois chaotiques et ordonnées ont été décrites dans la nature, notamment par l'observation de tourbillons. L'étude s'est ensuite poursuivie avec par exemple les descriptions et les illustrations du cours d'un torrent de Léonard de Vinci [68] (Fig. 1). Il fût ainsi un des premiers à utiliser le mot turbulence (*torbolenza* en italien) pour décrire les mouvements complexes de l'eau ou de l'air.

Figure 1: Dessins de Léonard de Vinci sur les tourbillons formés par l'écoulement de l'eau [68].

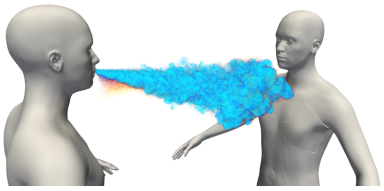
Au-delà de ces observations, l'analyse des écoulements fluides s'étend bien plus loin que le domaine même de la mécanique des fluides qui lui est consacré. Le sujet est finalement très large et touche un nombre considérable de disciplines. La météorologie qui a pour but de prédire les phénomènes atmosphériques tels que les nuages, les précipitations ou le vent (Fig. 2a). L'astrophysique qui s'intéresse à la dynamique des corps célestes et aux mouvements des gaz constituant les étoiles (Fig. 2b) ou la géologie pour comprendre la tectonique des plaques. La médecine n'y échappe pas non plus pour étudier la circulation du sang à l'intérieur des vaisseaux sanguins. Même dans la vie quotidienne, les exemples sont nombreux. Il suffit de verser du lait dans son café pour voir apparaître un enchevêtrement de structures complexes. L'exemple plus récent de la crise du coronavirus a aussi entre autres montré l'importance d'être capable de prédire la propagation de gouttelettes dans une pièce ventilée (Fig. 2c). Parmi toutes ces disciplines, le manuscrit de cette thèse aborde le sujet de l'écoulement de l'air dans un moteur d'avion, aussi appelé turbomachine.

Les équations qui gouvernent le mouvement d'un fluide ont été décrites en premier par Claude Navier en 1823, puis perfectionnées ultérieurement par George Stokes [28]. La contribution principale de Navier a été d'ajouter un terme de friction aux équations formulées par Leonard Euler 70 ans auparavant. L'avancée majeure des dernières décennies a été la capacité de résoudre par ordinateur ces équations complexes. C'est la naissance du domaine de la dynamique des fluides numérique ou *Computational Fluid Dynamics* (CFD). Cependant, malgré les progrès considérables



(a) Simulation numérique d'une tempête aux abords de la France [135].

(b) Nuage d'Orion [192].



(c) Simulation de la propagation de gouttelettes lors de la toux d'une personne [45].

Figure 2: Exemples de disciplines nécessitant la compréhension de la dynamique d'un fluide.

de la puissance de calcul des ordinateurs, la résolution numérique de ces équations reste encore aujourd'hui un défi majeur. Les équations de Navier-Stokes font d'ailleurs partie d'un des sept problèmes du prix du millénaire posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000.

Dans le contexte de la CFD, il est communément admis que l'étude publiée par Richardson [225] en 1910 sur la résolution de l'équation de Laplace constitue la première pierre de la construction d'une discipline encore aujourd'hui en pleine évolution. Les travaux produits par Lewy [63] sur les contraintes de stabilité des schémas numériques est un autre jalon dans les progrès de la CFD, en définissant notamment le nombre CFL. La discipline a aussi rapidement progressé à la suite de la Seconde Guerre mondiale, avec une accélération notoire du développement de méthodes permettant de résoudre des systèmes d'équations. De nos jours, des méthodes classiques comme les Différences Finies, les Éléments Finis ou les Volumes Finis sont utilisées avec succès. Mais la CFD est en constante évolution, et des méthodes plus récentes comme les méthodes spectrales [292] ou la méthode Lattice-Boltzmann [125] font aussi progressivement leur apparition dans le paysage de la simulation numérique.

L'industrie s'est ensuite progressivement intéressée à la CFD. En aéronautique, la première simulation d'un avion complet grâce à la méthode des écoulements potentiels a été réalisée dès les années 60-70. Mais, il a fallu attendre les années 90 pour voir la simulation d'un avion avec les équations de Navier-Stokes [148] (Fig. 3). Les premiers développements se sont majoritairement intéressés à la modélisation de la turbulence qui a un rôle prédominant dans la physique globale de l'écoulement. Cette modélisation est particulièrement importante puisqu'elle apparaît naturellement à partir d'une certaine vitesse de l'écoulement et est quasiment toujours présente dans le cas d'applications réelles. Aujourd'hui, les simulations numériques en aéronautique sont principalement dominées par deux méthodes de modélisation, la méthode *Reynolds-Averaged Navier–Stokes* (RANS) et la simulation numérique aux grandes échelles ou *Large Eddy Simulation* (LES). Mais, malgré les efforts pour optimiser les codes de calcul résolvant ces équations numériquement, les applications industrielles nécessitent l'utilisation de supercalculateurs pour disposer des ressources de calcul suffisantes. Même si l'utilisation de la CFD dans l'aéronautique a commencé par la simulation du fuselage d'un avion, elle s'est aussi rapidement répandue à la prédiction de l'écoulement dans le moteur de l'avion. La simulation numérique d'une turbomachine présente un avantage majeur : un coût financier largement moins élevé que la mise en place d'une expérience sur une configuration identique. La simulation donne aussi accès à une quantité incroyable d'informations dans l'ensemble de la turbomachine, alors qu'obtenir ces mêmes informations nécessiterait de nombreux capteurs, beaucoup de temps pour les mettre en place et ces derniers, s'ils étaient trop invasifs, pourraient en plus perturber l'écoulement et donc fausser les mesures. Néanmoins, la simulation numérique d'une turbomachine ne présente pas que des avantages. En particulier, des difficultés se posent autour de la modélisation de la physique de l'écoulement, du coût de calcul de la méthode utilisée et du temps de retour pour les concepteurs.

Les études présentées dans cette thèse s'articulent autour de la simulation de l'écoulement dans une turbomachine. Pour ce type de prédiction, deux questions principales se posent. Premièrement,

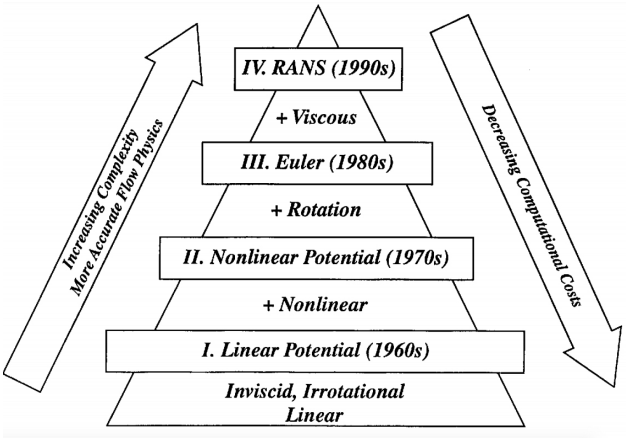


Figure 3: Évolution des équations résolues au fil des années [141].

il est nécessaire de s'assurer que le code de calcul est capable de fournir des résultats en accord avec la réalité et en un temps raisonnable. Cela implique des comparaisons avec des mesures expérimentales et une optimisation du code pour qu'il puisse utiliser efficacement un nombre important de processeurs. Deuxièmement, les méthodes numériques utilisées doivent correspondre aux applications simulées, en respectant par exemple les hypothèses faites lors de leur développement. Les différents chapitres de ce manuscrit chercheront à répondre à ces points. Il sera notamment question de l'amélioration des schémas numériques pour accroître la précision de ces derniers dans des configurations complexes, de l'accélération de simulations multi-composants ou encore du développement de conditions limites réalistes permettant de mieux tenir compte du couplage entre composants.

Généralités sur les turbomachines

Le sujet général de ce manuscrit concerne les turbomachines. Une turbomachine peut se définir comme un appareil permettant un échange de travail entre un ou plusieurs éléments tournants et un fluide en écoulement permanent [81, 201]. Il faut attendre les années 1930 pour voir les premiers turboréacteurs équiper des avions. Mais c'est surtout la Deuxième Guerre mondiale qui entrainera le progrès rapide de cette technologie avec une construction en série. Depuis cette époque, les turboréacteurs et ses variantes ont été largement utilisés pour la propulsion d'avions civiles ou militaires de toutes tailles, d'hélicoptères, et également dans la génération d'électricité avec des turbines terrestres. Les principaux avantages d'un turboréacteur reposent sur un rapport poids/puissance largement supérieur aux moteurs à piston et sur une meilleure fiabilité en particulier grâce au petit nombre de pièces en mouvement, facilitant la maintenance.

Un turboréacteur fournit de la poussée à un aéronef en générant une différence de quantité de mouvement entre l'air admis et l'air éjecté à la sortie. Son fonctionnement repose sur le cycle thermodynamique de Brayton qui se décompose en 4 phases principales (Fig. 4). Une phase de compression isentropique de l'air (entre 1 et 2), une phase de combustion isobare permettant un apport de chaleur (entre 2 et 3), une phase de détente isentropique (entre 3 et 4) et un rejet de chaleur à pression constante avec retour à l'état initial (entre 4 et 1). Dans le cycle idéal, les phases de compression et de détente sont considérées comme isentropiques, mais en réalité elles donnent lieu à des irréversibilités et donc à la génération de pertes. Dans une turbomachine, les composants qui permettent de réaliser ce cycle sont schématisés sur la Fig. 5. Le compresseur (le plus souvent décomposé en plusieurs étages) réalise la phase de compression. La génération de chaleur se fait par la combustion d'un mélange d'air et de carburant dans la chambre. Enfin, la détente est assurée par la turbine pour récupérer le travail nécessaire à l'entrainement du compresseur. Dans le cas d'un aéronef, la quantité de mouvement restante à l'écoulement génère une poussée grâce à une différence de vitesse entre l'entrée et la sortie.

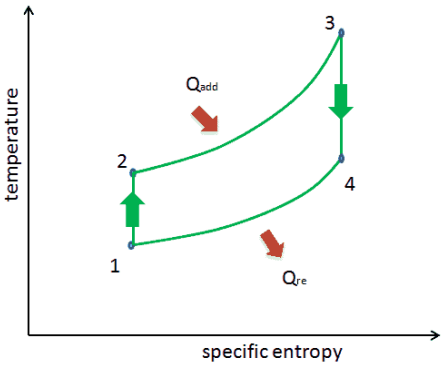


Figure 4: Diagramme température-entropie du cycle théorique de Brayton [1].

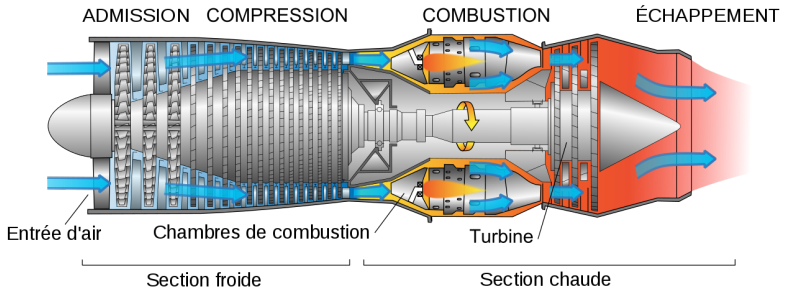


Figure 5: Schéma en coupe d'un turboréacteur équipant un avion illustrant son principe de fonctionnement [272].

Les turbomachines modernes sont l'objet de progrès constants, dans le but d'augmenter la puissance des moteurs, de réduire le poids des composants pour augmenter le rapport poids/puissance, d'accroître les différents rendements ou encore de réduire l'émission de polluants et la génération de bruit. Au fil des années, avec leur perfectionnement constant, l'optimisation des turbomachines devient de plus en plus délicate. Plusieurs pistes peuvent encore être envisagées pour continuer cette progression :

- améliorer le rendement isentropique en diminuant les pertes pour se rapprocher du cycle idéal,
- optimiser les veines et les aubages pour réduire les pertes par frottement visqueux,
- accroitre le rendement thermique grâce à une température de combustion plus élevée nécessitant aussi un meilleur refroidissement des aubages de turbine et la mise au point de matériaux nouveaux,
- développer des technologies de combustion pauvre pour réduire la production de certains polluants ou remplacer le kérosène classique par d'autres carburants ou biocarburants,
- améliorer le rendement propulsif en augmentant par exemple le taux de dilution avec de nouvelles architectures.

Pour poursuivre les avancées, la CFD joue un rôle majeur dans la compréhension des écoulements au sein des turbomachines offrant des possibilités nouvelles. L'objectif de cette thèse est de participer à ces progrès avec le développement et la validation de méthodes haute-fidélité pour la prédiction par simulation numérique. Néanmoins, malgré les évolutions constantes des technologies et les progrès certains des turbomachines actuelles, le domaine de l'aviation constitue une part non négligeable de la pollution émise par les activités humaines. Dans les années à venir, des modifications profondes de ce secteur d'activité seront nécessaires pour s'adapter aux exigences de l'urgence climatique à laquelle le monde aura inévitablement à faire face. Une fois de plus, la CFD devrait constituer un élément critique facilitant ces changements.

Le futur de l'aviation

En 2018, l'aviation civile représentait $\sim$ 2.5 % des émissions mondiales de CO_2, soit un total d'environ 1.1 $GtCO_2$ et près de 3.5 % du forçage radiatif total [252, 166]. Et, même si des travaux comme ceux présentés dans cette thèse participent à l'amélioration continue de l'efficacité énergétique des aéronefs au sens large, cela reste largement insuffisant pour réduire l'impact du secteur aéronautique sur l'environnement. Ainsi, malgré la progression constante de cette efficacité énergétique, la quantité de CO_2 émise par l'aviation civile a augmenté de 42 % entre 2005 et 2015[1], principalement à cause de la croissance du trafic aérien. L'objectif de l'accord de Paris est de limiter l'élévation de température moyenne planétaire à +2 °C par rapport aux niveaux préindustriels, pour contenir l'impact des activités humaines sur le climat. Malheureusement, aucune mesure concerne le transport aérien international dans cet accord. À noter que la crise actuelle du coronavirus a temporairement ralenti la croissance du trafic aérien mondial. Néanmoins, de nombreux experts s'accordent sur le fait que les niveaux d'avant crise pourraient être retrouvés dès 2023 ou 2024. Ainsi, l'épidémie récente s'apparente simplement à un léger sursis sur les émissions du secteur mais ne constitue en rien une solution à long terme pour réformer profondément le mode de fonctionnement de l'aéronautique au sens large.

Malgré son absence dans l'accord de Paris, le secteur aéronautique s'est donné pour cible d'atteindre une croissance neutre en carbone, c'est-à-dire de maintenir un niveau d'émission de CO_2 constant malgré l'augmentation du trafic dès 2020 en augmentant l'efficacité énergétique de 2 % par an et de réduire de 50 % ses émissions par rapport à 2005 d'ici 2050[2]. Ces objectifs ambitieux nécessiteront une transformation profonde du secteur, au-delà de l'amélioration de l'efficacité énergétique des avions actuels. Seules des technologies radicalement différentes comme des architectures nouvelles de moteur et/ou d'avions, l'électrification progressive des aéronefs ou l'utilisation de biocarburants permettront d'atteindre cette cible (Fig. 6). Or, le développement de ces nouvelles technologies nécessitera entre autres des méthodes de simulation performantes et matures pour les valider.

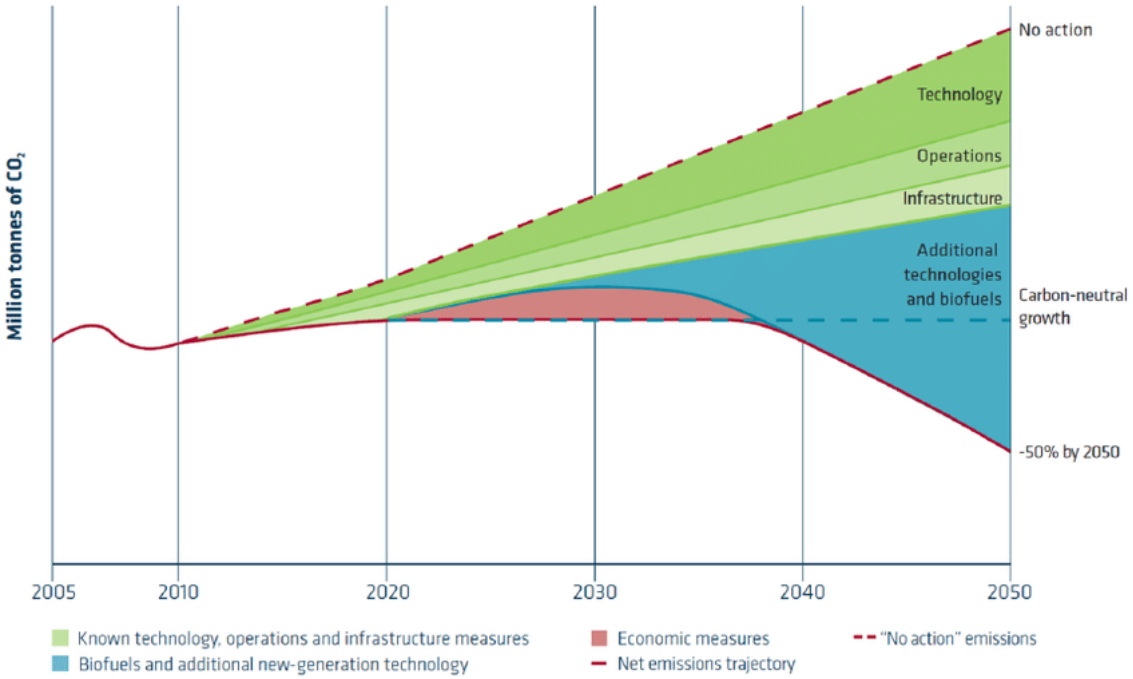


Figure 6: Évolution de la quantité de CO_2 émise par le secteur aéronautique [112].

[1] Données ATAG pour 2005 et IATA pour 2019.
[2] Objectifs de l'OACI pour l'aviation internationale.

Objectifs et plan de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier la capacité de la CFD à reproduire les effets du couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine (par exemple entre le compresseur et la chambre de combustion ou entre la chambre de combustion et la turbine). Les simulations multi-composants permettent de mieux capter les interactions entre composants, ce qui en général permet de prédire avec une meilleure précision les performances de ces derniers. Malheureusement, malgré les progrès constants des capacités de calcul, les simulations couplées et instationnaires multi-composants restent hors de portée pour être utilisables lors des phases de développement des prochains moteurs. Cette thèse s'intéresse donc à différentes méthodes permettant de réduire le coût de ces simulations, d'en améliorer la précision, ou de s'affranchir des simulations couplées avec des conditions limites plus réalistes.

Le travail présenté dans cette thèse se décompose en plusieurs chapitres :

- **Chapitre 1 : Simulation de l'écoulement au sein d'une turbomachine.**
  Le premier chapitre présente une revue bibliographique de la modélisation numérique de la turbulence, en décrivant par exemple les différents niveaux de discrétisation nécessaires à chaque méthode. Plus particulièrement, dans une turbomachine, la région proche paroi joue un rôle important et une modélisation adaptée de cette région est requise pour minimiser le coût global d'une simulation. Les modèles utilisables à cet effet sont aussi décrits dans ce chapitre. De plus comme par définition, une turbomachine est composée d'éléments fixes et mobiles, pour permettre le couplage entre ses divers composants, il est nécessaire de mettre en place des méthodes particulières, avec des coûts et une précision associés largement dépendants du choix fait. Enfin et afin de souligner l'importance des simulations couplées multi-composants, une simulation moteur complet est réalisée et comparée à une simulation d'un fan isolée. Cette comparaison met en évidence d'importantes différences entre les deux simulations que ce soit au niveau de la prédiction de l'écoulement ou du coût respectif de ces simulations. Ces constats motivent les différentes pistes suivies pendant cette thèse pour améliorer les simulations multi-composants.

- **Chapitre 2 : Équations de Navier-Stokes pour la LES et leur résolution numérique dans un contexte turbomachine.**
  Pour être capable de simuler numériquement l'écoulement d'une turbomachine, il est nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes. La méthode numérique choisie dans cette thèse est la LES. Lié à ce choix, certaines modélisations sont requises et une attention particulière à la résolution numérique de ce système d'équations doit être apportée. Ce chapitre introduit en particulier le formalisme *cell-vertex* et les schémas numériques associés pour garantir une précision et une stabilité satisfaisantes. Pour finir, la méthode MISCOG, qui permet le couplage entre plusieurs domaines fixes et/ou mobiles, est décrite.

- **Chapitre 3 : Analyse numérique et améliorations des schémas de convection d'AVBP.**
  L'amélioration des schémas dans un code de simulation numérique est une étape essentielle à considérer pour réduire le coût des simulations. En effet, un schéma plus précis et plus robuste permet en fonction du choix de l'utilisateur, soit d'obtenir de meilleurs résultats pour un coût identique, soit des résultats identiques pour un coût plus faible. La robustesse d'un schéma et sa relative indépendance à la qualité du maillage diminue aussi le risque de divergence d'une simulation qui entraine des coûts supplémentaires (humains et de calcul) pour modifier et simuler de nouveau la même configuration. Dans cette optique, ce chapitre s'attache d'abord à mieux comprendre les schémas numériques existants et en particulier leurs défauts qui peuvent mener à l'échec d'une simulation. Une fois ces défauts identifiés, plusieurs pistes sont explorées pour améliorer les schémas existants ou en développer de nouveaux et pallier à ces problèmes. La solution la plus prometteuse s'intéresse en particulier aux schémas de la famille Petrov-Galerkin, utilisés en parallèle d'une reconstruction polynomiale au sein de chaque élément du maillage.

- **Chapitre 4 : Analyse numérique d'une méthode de pas de temps local pour le couplage entre composants.**
  Ce chapitre présente une méthode de pas de temps local pour réduire le coût des simulations multi-composants. Dans le cas d'un code de calcul explicite, le pas de temps est contraint par la condition CFL. Ainsi, la plus petite maille du domaine contraint bien souvent le pas de temps sur l'ensemble du domaine de calcul. Or, dans la plupart des configurations, cette contrainte est trop restrictive pour la majorité des cellules du domaine. La méthode de pas de temps local présentée permet de diviser le domaine initial en plusieurs sous-domaines pour relaxer la contrainte sur le pas de temps. Des validations sur des cas académiques sont d'abord menées pour s'assurer que la méthode ne dégrade pas la précision des schémas numériques utilisés. Elle est ensuite appliquée à des cas concrets pour montrer les gains potentiels apportés par la méthode.

- **Chapitre 5 : Génération de conditions limites réalistes à l'interface entre plusieurs composants d'une turbomachine.**
  Dans certains cas, malgré l'utilisation des méthodes décrites dans les chapitres précédents, une simulation couplée multi-composants reste trop chère en temps de calcul, en particulier lors d'une phase de développement durant laquelle plusieurs itérations sont faites sur la géométrie des composants, rendant préférable la simulation de composants isolés. La simulation de composants isolés nécessite toutefois l'utilisation de conditions limites en entrée et sortie adéquates. Habituellement, ces conditions limites utilisent des grandeurs moyennes monodimensionnelles ou dans le meilleur des cas, une cartographie bidimensionnelle, avec ou sans injection de turbulence synthétique. Malgré cela, il est difficile de reproduire le mécanisme de couplage multi-composants avec des conditions limites standards. Ce chapitre s'intéresse donc à des conditions limites plus réalistes obtenues à partir d'une base de données constituée à l'interface entre une chambre de combustion et une turbine. Les résultats montrent que le nouveau type de condition limite est très performant pour modéliser l'effet de la chambre sur la turbine pour un coût largement inférieur à une simulation intégrée.

Cette thèse a été financée dans le cadre du projet ATOM en collaboration avec la DGAC et le groupe Safran.

Liste des publications

- **Martin, B.**, Odier, N., Duchaine, F. & Gicquel, L. (2021). Numerical analysis of an explicit local time stepping method applied to Large-Eddy Simulation. Soumis dans *Computers & Fluids*.

- **Martin, B.** & Rudgyard, M. (2021). Extension of Taylor-Petrov-Galerkin schemes using quadratic polynomial reconstruction to multi-dimensionnal cases. *En cours de rédaction*.

- Rudgyard, M. & **Martin, B.** (2021). Development of Taylor-Petrov-Galerkin schemes using high order polynomial reconstruction in 1D. *En cours de rédaction*.

- **Martin, B.**, Duchaine, F., Gicquel, L. & Odier, N. (2021). Generation of realistic boundary conditions at the combustion chamber/turbine interface using Large-Eddy Simulation. *Energies*. 14(24):8206. doi:10.3390/en14248206.

- **Martin, B.**, Duchaine, F., Gicquel L., Odier, N. & Dombard, J. (2021). Accurate inlet boundary conditions to capture combustion chamber and turbine coupling with Large-Eddy Simulation. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (GTP-21-1355) doi:10.1115/1.4052099 et *Proceedings of the ASME 2021 Turbo Expo* (GT2021-58854) doi:10.1115/GT2021-58854.

- Pérez Arroyo, C., Dombard, J., Duchaine, F., Gicquel, L., **Martin, B.**, Odier, N. & Staffelbach, G. (2021). Towards the Large-Eddy Simulation of a full engine: Integration of a 360 azimuthal degrees fan, compressor and combustion chamber. Part I: Methodology and initialisation. *Journal of the Global Power and Propulsion Society*. doi:10.33737/jgpps/133115.

- Pérez Arroyo, C., Dombard, J., Duchaine, F., Gicquel, L., **Martin, B.**, Odier, N. & Staffelbach, G. (2021). Towards the Large-Eddy Simulation of a full engine: Integration of a 360 azimuthal degrees fan, compressor and combustion chamber. Part II: Comparison against stand-alone simulations. *Journal of the Global Power and Propulsion Society*. doi:10.33737/jgpps/133116.

- **Martin, B.**, Duchaine, F., Gicquel, L., Odier, N. & Dombard, J. (2020). Wall-resolved Large-Eddy Simulation of the LS89 cascade using an explicit local time-stepping method. *Proceedings of the ASME 2020 Turbo Expo*. GT2020-14171. doi:10.1115/GT2020-14171.

- **Martin, B.**, Thomas, M., Dombard, J., Duchaine, F & Gicquel, L. (2019). Analysis of solid particle ingestion and dynamics in a turbomachine using Large-Eddy Simulation. *Proceedings of the ASME 2019 Turbo Expo*. GT2019-91215. doi:10.1115/GT2019-91215.

Chapitre 1

Simulation de l'écoulement au sein d'une turbomachine

> *The saddest aspect of life right now is that science gathers knowledge faster than society gathers wisdom.*
>
> — Isaac Asimov

1.1 Introduction 21
1.2 Modélisation de la turbulence 21
1.3 Modélisation de la turbulence en proche paroi 24
1.4 Couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine 25
1.5 Simulation d'un moteur complet 28
1.5.1 Introduction 28
1.5.2 Configuration et domaines de calcul 29
1.5.3 Résultats : comparaison simulation intégrée/simulation isolée 32
1.5.4 Conclusion et ouverture sur les chapitres suivants 37

1.1 Introduction

Ce chapitre décrit les différentes modélisations existantes aujourd'hui pour prédire l'écoulement au sein d'une turbomachine. Dans ce contexte, il est important de réaliser que la modélisation de la turbulence est une composante importante et les choix faits pour sa résolution déterminent la précision et la vitesse du calcul de la simulation obtenue. Le couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine est aussi une problématique à ne pas négliger. Une turbomachine est en effet composée d'éléments fixes et mobiles et l'échange entre ces éléments nécessite des méthodes particulières. La deuxième partie du chapitre présente une simulation moteur complet du DGEN. Cette simulation intégrée de référence est comparée à une simulation isolée de la soufflante pour mieux cerner les apports d'une simulation couplée en turbomachine.

1.2 Modélisation de la turbulence

La simulation numérique d'écoulements turbulents autour de géométries complexes est une tâche difficile. L'objectif des codes CFD est de fournir une approximation la plus fidèle possible de cet écoulement à un coût le plus faible possible. La physique de ces écoulements est toutefois régie par les équations non linéaires de Navier-Stokes. Étant donné qu'il n'existe pas de solution générale à ce système d'équations, en particulier pour les écoulements dits à haut Reynolds. Des choix doivent donc être faits sur les échelles qui sont effectivement calculées à partir des équations. La difficulté réside dans le fait qu'il est difficile de définir une limite claire entre les phénomènes de l'écoulement qui méritent d'être simulés et ceux dont l'importance est négligeable dans la dynamique globale de

l'écoulement. La question qui découle est donc : quelle part de l'écoulement doit être explicitement résolue pour obtenir une représentation acceptable de la solution réelle avec un coût maitrisable voire accessible ?

Le nombre de Reynolds [223] se définit par $Re = uL/\nu$, avec u et L la vitesse et la grandeur caractéristiques de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Si ce nombre dépasse une certaine valeur qui dépend de la configuration, l'écoulement devient turbulent, causant l'apparition de tourbillons de différentes tailles. Ainsi, la turbulence est un phénomène qui apparaît dans la plupart des configurations concrètes. La turbulence peut être caractérisée comme un phénomène tridimensionnel et instationnaire impliquant un ensemble de tourbillons de tailles variées. L'évolution de la turbulence dans un cadre théorique idéal et simplifié peut être décrite sous une forme universelle appelée cascade énergétique. Dans cette cascade, les tourbillons les plus gros prélèvent de l'énergie à l'écoulement moyen, se divisent et transmettent progressivement de l'énergie à des tourbillons de plus en plus petits. À la fin de la cascade, les tourbillons les plus petits disparaissent en dissipant leur énergie sous forme de chaleur par frottements visqueux [211, 154]. Ce phénomène est classiquement représenté par une courbe donnant l'évolution de l'énergie turbulente en fonction du nombre d'onde des tourbillons (Fig. 1.1).

Différents types de simulation sont possibles en fonction de la part de la cascade énergétique qui est explicitement simulée par le schéma numérique. À cause du coût prohibitif d'une résolution complète de la cascade, des modèles ont rapidement été développés pour reproduire la turbulence non résolue par le schéma. C'est par exemple le cas de Boussinesq [35] qui a inspiré de nombreux modèles par la suite. Malgré la diversité des modèles, les simulations d'écoulements turbulents peuvent être classifiées en 3 grandes catégories, correspondant à une modélisation plus ou moins importante de la cascade énergétique : RANS, LES et DNS (Fig. 1.1).

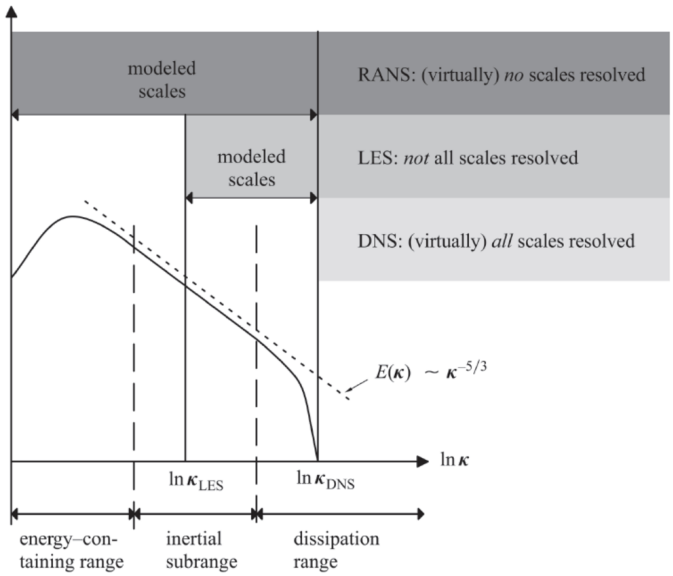


Figure 1.1: Cascade énergétique [119].

Simulation numérique directe ou *Direct Numerical Simulation* (DNS)

L'approche la plus directe et en apparence la plus simple est de résoudre l'ensemble du spectre de la turbulence. Cette méthode est connue sous le nom de Simulation Numérique Directe ou *Direct Numerical Simulation* (DNS) [146, 76] et correspond à l'option la plus précise mais aussi la plus coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire. En effet, la DNS nécessite un maillage capable de résoudre les plus petites échelles de la turbulence qui se définit par l'échelle de Kolmogorov η (Eq. (1.1)) [154], l'échelle où a lieu la dissipation de l'énergie turbulente sous forme de chaleur,

$$\eta = \left(\nu^3/\epsilon\right)^{0.25}, \tag{1.1}$$

avec ϵ le taux de dissipation turbulente. En pratique, le coût d'une telle simulation évolue en $Re^{9/4}$ [211]. Cependant, cette évaluation est valable uniquement dans le cas d'une turbulence homogène isotrope. En paroi, les échelles de la turbulence diminuent fortement et à partir d'un nombre de Reynolds limite, le nombre de mailles nécessaire à la discrétisation de la sous-couche visqueuse dépasse celui du reste de la couche limite et du domaine [205]. Au sein d'une turbomachine où le nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^5 ou 10^6, le coût de la DNS reste encore largement prohibitif. Malgré son coût, la DNS est un outil très intéressant pour produire des simulations de très grande précision dans des configurations académiques comme un canal turbulent [152] ou des simulations à bas nombre de Reynolds [291]. Les résultats des DNS peuvent aussi aider à la validation d'autres méthodes comme la LES ou le RANS, mais aussi produire et valider des modèles, puisqu'elle n'inclue aucune modélisation et peut donc être considérée comme exacte.

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

Historiquement, la méthode la plus populaire et la moins coûteuse consiste à modéliser l'ensemble du spectre de la turbulence. Dans ce cas, une moyenne temporelle ou d'ensemble est appliquée aux équations de Navier-Stokes pour obtenir la méthode *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS) [211]. Les variables de l'écoulement qui apparaissent dans les équations de Navier-Stokes sont divisées en deux composantes, une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette opération introduit un terme non linéaire, appelé tenseur de Reynolds qui doit être modélisé. C'est l'enjeu des modèles de turbulence plus ou moins complexes développés au fil des années. Il existe plusieurs modèles à une équation comme le modèle de Spalart-Allmaras [256] ou à deux équations comme les modèles $k-\epsilon$ [149] et $k-\omega$ [290] pour ne donner que quelques exemples.

Malgré l'attractivité de la méthode RANS, notamment en termes de temps de calcul, elle doit être employée en respectant ses hypothèses restrictives de développement au risque de produire des résultats complètement erronés. En conséquence, la méthode peut difficilement prédire le phénomène de transition turbulente ou mettre en évidence les instabilités d'une configuration. Cependant, le coût réduit et la robustesse de la méthode font qu'elle est encore aujourd'hui largement utilisée lors de la phase de conception des turbomachines actuelles [211].

Simulation aux grandes échelles ou *Large Eddy Simulations* (LES)

Entre le RANS et la DNS, la Simulation aux grandes échelles ou *Large Eddy Simulations* (LES) est une méthode alternative qui simule explicitement uniquement les plus grandes échelles de la turbulence, alors que les plus petites échelles sont modélisées [211, 280] (Fig. 1.2). Cette opération est réalisée par filtrage spatial des équations de Navier-Stokes et des détails supplémentaires sur les équations obtenues seront donnés dans le chapitre suivant. Comme pour le RANS, le filtrage des équations entraine l'apparition de termes supplémentaires qui doivent faire l'objet de modèles dédiés.

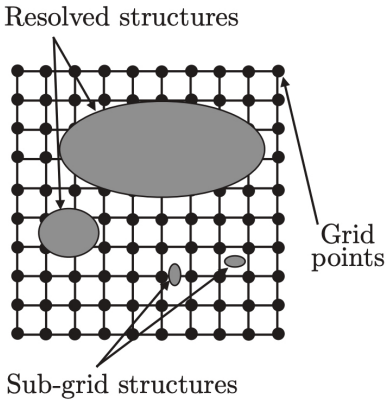


Figure 1.2: Illustration de la séparation des structures de l'écoulement entre celles simulées explicitement et les autres plus petites que la taille de maille qui doivent être modélisées [221].

La difficulté d'utilisation de la LES réside *in fine* aussi dans la choix de la taille du filtre Δ qui détermine la limite entre turbulence résolue et modélisée. La fréquence de coupure est en général positionnée dans la région inertielle de la cascade énergétique. Toutefois, sans connaître la solution du problème à résoudre, il est complexe de prédire *a priori* la valeur de Δ. En pratique, Δ doit être choisie suffisamment petite pour capturer au minimum 80 % de l'énergie cinétique turbulente totale [211]. D'autres recommandations spécifient qu'un filtre explicite de taille $\Delta = 2\Delta x$ (où Δx correspond à la taille de la cellule utilisée comme support à la discrétisation) devrait être utilisé pour éviter des problèmes numériques liés aux longueurs d'onde non résolues [168]. L'absence de filtrage explicite est aussi considérée comme optimale par certains auteurs [210].

Contrairement au RANS de base, la formulation LES est instationnaire, lui permettant d'être capable de capturer des phénomènes complexes comme la transition laminaire-turbulent ou l'évolution d'instabilités dans un domaine. En contrepartie, son coût est nettement supérieur au RANS, mais demeure largement inférieur à la DNS [58]. La LES constitue donc un outil intéressant pour prédire avec grande précision des écoulements turbulents [110] mais nécessite une certaine expérience de la part de l'utilisateur pour définir des maillages et modèles adaptés à chaque configuration. Avec la progression constante des capacités de calcul, l'utilisation de la LES devient possible même pour des nombres de Reynolds relativement élevés. Néanmoins, l'utilisation de la LES pour simuler des écoulements en proche paroi en configuration industrielle présente des difficultés supplémentaires et la LES est en général utilisée avec un traitement additionnel en paroi, qui est détaillé par la suite.

1.3 Modélisation de la turbulence en proche paroi

Comme mentionné précédemment, les échelles de longueur de la turbulence diminuent rapidement en s'approchant d'une paroi. Ainsi, même si les contraintes sont moins restrictives que pour la DNS, la LES nécessite néanmoins de réduire de manière significative la taille de maille en paroi pour correctement prédire ces structures [151]. Pour simuler une couche limite grâce à la LES, deux approches sont à distinguer, la première résout explicitement la turbulence en paroi, alors que la deuxième la modélise.

- **LES résolue en paroi.** Avec cette approche, l'objectif est de capturer explicitement la dynamique proche paroi en discrétisant les structures turbulentes les plus énergétiques de l'écoulement. En termes de contraintes, cela signifie que la taille de la première maille en paroi doit garantir un y^+ de l'ordre de l'unité [105, 211]. Une estimation du coût de ce type de simulations révèle qu'il évolue en $Re^{13/7}$ [49], ce qui les rend quasiment aussi coûteuses qu'une DNS. À noter que pour ce type de simulations, l'influence du modèle de sous-maille est aussi à prendre en compte. En particulier, le terme de viscosité turbulente doit évoluer en $\mathcal{O}(y^3)$ avec y la distance à la paroi [47], pour s'assurer que la viscosité turbulente s'annule en paroi et qu'elle respecte les contraintes physiques imposées par la paroi, notamment la condition de non glissement et d'imperméabilité [196].
- **LES avec modèle de paroi.** Pour éviter de raffiner le maillage jusqu'à $y^+ \sim 1$, un modèle de paroi permet de reproduire les interactions entre les grosses structures résolues et les plus petites qui sont filtrées par le maillage. Pour ces simulations, le y^+ n'est plus de l'ordre de l'unité, empêchant les modèles de sous-maille et le schéma numérique de prédire correctement les contraintes de cisaillement en paroi. L'approche la plus populaire est d'utiliser une loi d'évolution analytique et les grandeurs locales de l'écoulement pour prédire la contrainte de cisaillement. La loi de paroi nécessite toutefois de connaître la vitesse de l'écoulement en dehors de la sous-couche visqueuse, dans la région logarithmique de la couche limite. En général, cela se traduit par un $y^+ \sim 50 - 100$. Pour être plus précis, la loi de paroi utilisée consiste à calculer la vitesse de frottement en paroi U^* par une méthode itérative à partir de l'expression suivante [239, 278], en supposant un écoulement stationnaire, une couche limite à l'équilibre, l'absence de gradient de pression et de courbure,

$$\frac{U}{U^*} = (1/K) \ln\left(E \frac{U^* y}{\nu}\right), \tag{1.2}$$

avec $K = 0.41$ la constante de Von Kármán, $E = 9.2$, y la distance à la paroi, U la vitesse locale et ν la viscosité cinématique de l'écoulement. À partir de la vitesse de frottement en paroi U^*, la contrainte de cisaillement en paroi τ_w s'exprime simplement comme,

$$\tau_w = \rho\, U^{*2} \quad \text{où} \quad U^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_w}. \tag{1.3}$$

La loi de paroi décrite est une possibilité pour modéliser la région non discrétisée de la couche limite, mais d'autres modèles existent avec des hypothèses plus ou moins fortes sur les propriétés de l'écoulement et de la géométrie en paroi [205]. Grâce au modèle de paroi décrit, le coût de ce type de LES est largement réduit puisqu'il est seulement proportionnel à Re, contrairement à $Re^{13/7}$ pour une LES résolue en paroi [49]. Cependant, la plupart des modèles sont développés avec notamment l'hypothèse de couche limite turbulente complètement développée et sans gradient de pression. Or, autour des pales, une turbomachine est caractérisée par des forts gradients de pression adverse. D'autres méthodes s'intéressent à ce problème pour tenter d'améliorer les lois de paroi en présence d'un gradient de pression ou au niveau de transition laminaire/turbulent [94, 88].

1.4 Couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine

Une des caractéristiques principales d'une turbomachine est l'alternance de composants fixes et mobiles pour fournir ou récupérer du travail à l'écoulement avec le meilleur rendement possible. Pour prédire avec précision les phénomènes complexes au sein de la turbomachine générés par ses composants et transportés à travers le moteur par l'écoulement, il est nécessaire d'être capable de coupler plusieurs composants dans la même simulation. Pour y parvenir, le code de calcul utilisé doit d'abord être capable de simuler à la fois des instances fixes et mobiles. Ensuite, un traitement particulier à l'interface doit être mis en place pour transmettre correctement l'information entre les composants et/ou instances. À cause de certaines propriétés des turbomachines, la mise en place de ce couplage et plus généralement d'une simulation de turbomachine présente des difficultés.

1. Pour éviter le phénomène de résonance entre les étages, les nombres de pales des rotors et stators n'ont habituellement pas de commun diviseur. Ceci pose donc un problème majeur pour réaliser une simulation numérique sans modification géométrique. Il serait obligatoire de simuler l'étage annulaire complet de 360° puisqu'aucune périodicité ne permet de réduire la taille du domaine, nécessitant un coût de calcul très important [178].

2. L'écoulement d'une turbomachine présente de fortes instationnarités (turbulence, transition laminaire/turbulent, décollement tourbillonnaire, etc.), qui existent naturellement à cause de la présence de multiples parois, de pièces en mouvement, de vitesses importantes et de forts gradients de pression. Ainsi, pour correctement reproduire une configuration réaliste, l'interface entre les composants doit être capable de transmettre avec précision ces instationnarités.

3. Le temps de convergence est aussi un élément à prendre en compte. Étant donné la vitesse de rotation élevée des turbomachines, la convergence d'un écoulement pose peu de problèmes pour des mesures expérimentales. Mais dans le cas d'un calcul numérique pour laquelle la simulation de quelques millisecondes de temps physique peut demander des dizaines de milliers d'heures CPU, le temps de convergence est un facteur à prendre en compte. En général, les simulations numériques se limitent à quelques rotations complètes d'un étage donné [275].

4. L'opération d'échange d'information entre les composants doit être suffisamment précise. Autant que possible, le couplage entre composants doit rester transparent en termes d'erreurs numériques. Un schéma numérique doit en théorie conserver sa précision à la traversée de l'interface et il serait dommageable pour la précision de la simulation que l'échange

introduise des phénomènes non physiques dans le domaine de calcul. Par ailleurs, l'opération de couplage/d'échange ne doit pas entrainer un surcoût trop important par rapport au coût global de la simulation.

Toutes ces contraintes font de la simulation multi-composants un art difficile à maîtriser. À cette difficulté s'ajoute la contrainte sur le temps de retour d'une simulation. Dans un contexte recherche, même s'il est important, cet élément est moins contraignant. À l'inverse dans un contexte industriel, où plusieurs géométries doivent être testées lors d'une phase de développement, le coût des simulations numériques est un facteur déterminant dans le choix d'une méthode. C'est dans cette optique que plusieurs méthodes permettant un couplage multi-composants ont été développées avec différents niveaux de compromis entre le coût et la précision.

Plan de mélange

C'est probablement la méthode la plus simple pour modéliser les interactions entre un rotor et un stator. Elle utilise une hypothèse assez forte en considérant qu'une distance infinie sépare le rotor et le stator. Le sillage des pales est donc complètement mélangé avec l'écoulement moyen, ce qui permet d'imposer une moyenne azimutale des variables de l'écoulement à l'interface. La méthode a été initialement développée pour des simulations stationnaires [78]. Cependant, l'hypothèse de distance infinie est largement invalidée par les nouveaux types de compresseurs et turbines, beaucoup plus compactes qu'auparavant. Par ailleurs, la moyenne azimutale rend cette méthode inadéquate pour des simulations instationnaires comme il sera sujet dans cette thèse.

Modification de la géométrie par réduction du nombre d'aubes

Comme mentionné précédemment, il n'y a habituellement pas de périodicité machine naturelle dans une turbomachine pour éviter le phénomène de résonance. Néanmoins, il est possible d'en créer une artificiellement en modifiant le nombre d'aubes d'un ou plusieurs composants. Après la modification, en notant PGCD le plus grand commun diviseur entre les nombres d'aubes du rotor et du stator, le domaine de calcul peut alors se réduire à un secteur de $2\pi/PGCD$ (Fig. 1.3). Pour conserver le même point de fonctionnement et les mêmes profils moyens, puisque la taille des canaux est modifiée, il est nécessaire d'effectuer des modifications sur la solidité des aubes (rapport entre la corde de l'aube et la taille du canal inter-aubes). Cette modification géométrique se fait en général par une mise à l'échelle en coordonnées cylindriques [178, 255]. Généralement, cette méthode donne de très bons résultats et est très utilisée notamment en LES en transmettant avec fidélité les phénomènes aérodynamiques [129, 103]. À noter qu'à cause de la modification du nombre d'aubes, les fréquences de passage sont altérées, impactant la dynamique des écoulements instationnaires associée à ces fréquences (avec par exemple une modification des spectres acoustiques).

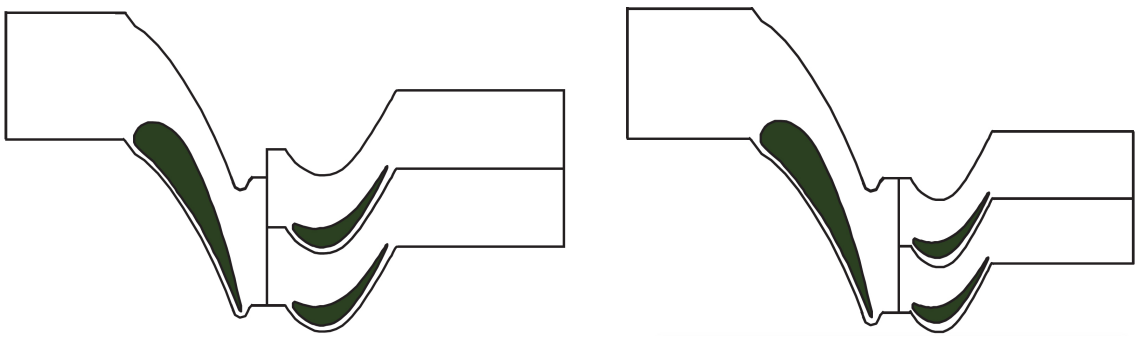


Figure 1.3: Illustration de la méthode de modification géométrique. À gauche la configuration initiale et à droite, la configuration modifiée [25].

Méthode chorochronique

La méthode chorochronique permet de limiter le domaine de calcul à seulement une pale pour chaque composant, sans modifier la géométrie initiale. Elle se base sur l'hypothèse de périodicité spatio-temporelle d'une turbomachine, c'est-à-dire en supposant que l'écoulement d'un canal donné dépend uniquement de la position relative entre le rotor et le stator [97]. Ainsi, il suffirait d'enregistrer l'information à un instant t à une extrémité du domaine pour la réinjecter à la frontière opposée au temps $t + T_{choro}$. Pour un étage rotor/stator, l'expression du temps chorochronique T_{choro} [106] est la suivante,

$$T_{\text{choro}} = \frac{2\pi}{\Omega}\left(\frac{1}{N_S} - \frac{1}{N_R}\right) = \frac{2\pi}{N_S\Omega} - \frac{2\pi}{N_R\Omega}, \tag{1.4}$$

avec Ω la vitesse de rotation du rotor, N_R le nombre de pales du rotor et N_S le nombre de pales du stator. L'information est donc stockée avant d'être injectée au bon instant. L'un des problèmes de cette méthode est le temps de convergence relativement long. De plus, de par les caractéristiques intrinsèques de la méthode, elle n'est pas capable de capturer des phénomènes instationnaires en dehors de la fréquence de passage du rotor et de ses harmoniques. De fait, elle est inadaptée pour simuler des points de fonctionnement présentant des instabilités tournantes par exemple [113]. À noter que pour les méthodes temporelles, la méthode des temps inclinés est aussi une option envisageable. Elle consiste à transformer les équations de Navier-Stockes en temps pour satisfaire la périodicité azimutale aux conditions limites [111]. Elle se limite cependant à des configurations mono-étage, avec un rapport entre les deux hauteurs de canal proche de 1 pour éviter l'apparition d'instabilités numériques. Cette méthode a par exemple été étudiée dans la thèse de Mouret [190].

Méthode de transformation de profil ou *Profile Transformation Approach* (PTA)

Avec cette méthode initialement proposée par Fourmaux [101], la géométrie des aubages n'est pas modifiée et la différence de largeur de canal entre le rotor et le stator est conservée [60]. À l'interface rotor-stator, un coefficient de compression est utilisé pour l'étage avec le plus grand pas et un coefficient de dilatation est utilisé pour celui avec le pas le plus petit. Pour échanger les grandeurs à l'interface, elles sont interpolées d'un domaine à l'autre à l'aide d'un coefficient calculé comme,

$$L_c = \frac{L_1}{L_2}, \tag{1.5}$$

avec L_1 la hauteur du canal du premier composant et L_2 la hauteur du deuxième. La méthode a été récemment utilisée pour des applications académiques et dans le cas d'une turbine haute pression isolée [117]

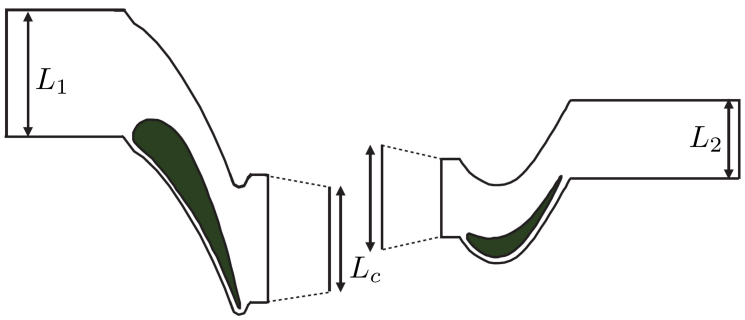


Figure 1.4: Illustration de la méthode de transformation de profil [25].

Approche *sliding mesh*

Cette approche est très souvent utilisée pour réaliser des simulations instationnaires. Les variables de l'écoulement sont échangées à l'interface par interpolation entre les deux domaines à chaque pas de temps. Elle permet de capturer l'ensemble des fréquences sans altération de la solution (si l'ordre d'interpolation est suffisant) [115, 114]. Elle fonctionne très bien pour une simulation à 360° d'une turbomachine. Cependant, elle ne permet pas de résoudre le problème d'absence de périodicité naturelle d'une machine. Ainsi, elle est souvent combinée à la méthode de réduction de nombre d'aubes pour obtenir une périodicité sectorielle. Cette méthode est particulièrement adaptée pour réaliser des simulations instationnaires étudiant l'interaction rotor/stator [287, 30]. Une variante de l'approche *sliding mesh* est utilisée dans le code AVBP pour réaliser des simulations turbomachines avec des instances fixes et mobiles. La méthode consiste à générer une région de superposition à l'interface entre les deux composants à coupler, alors qu'il n'y a pas de région de superposition dans une méthode *sliding mesh* classique. Cette approche sera détaillée davantage dans la Section 2.5.

1.5 Simulation d'un moteur complet

1.5.1 Introduction

Dans une phase de conception idéale avec des ressources de calcul illimitées, il serait possible de réaliser la simulation instationnaire complète d'un moteur depuis l'entrée d'air jusqu'à l'éjection. Grâce à cette simulation, il serait facile de comprendre les interactions entre les différents composants de la turbomachine. En modifiant la géométrie d'un élément particulier, l'ensemble des changements se répercuteraient directement sur les performances globales de la machine sans hypothèse particulière ou sans modèle de prédiction empirique. Malheureusement, comme mentionné au début de l'introduction, les capacités de calcul actuelles ne le permettent pas encore dans une phase de conception et les motoristes doivent encore se résoudre à simuler chaque composant de manière isolée (dans l'industrie, les méthodes de simulation sont même souvent différentes entre les composants, avec de la LES pour la chambre et du RANS pour les étages de compresseurs et turbines). Dans ce cas, les conditions limites en entrée et sortie sont en général définies par des grandeurs 0D moyennes, des profils 1D ou des cartographies 2D stationnaires. Ces champs sont le plus souvent obtenus à partir de moyenne temporelle des plans d'entrée ou de sortie de simulations des composants voisins, ce qui supprime toutes les instationnarités générées par les composants. En LES, l'ajout de turbulence synthétique en entrée peut permettre de générer des fluctuations, mais elles ne pourront jamais correspondre à celles réellement présentes dans la machine comme le montrera le Chapitre 5.

En prenant en compte les limitations des calculs isolés, des approches couplées ont été envisagées. Les travaux de Salvadori [237] se sont par exemple intéressés au couplage entre une chambre de combustion et un étage de turbine en RANS, en mettant en évidence les bénéfices clairs d'une simulation couplée en termes de précision. Dans un contexte similaire, Insinna [136] a aussi montré l'intérêt d'une simulation chambre/turbine couplée pour reproduire des mesures expérimentales. Enfin, le couplage chambre/turbine a aussi été largement étudié en LES pour mettre en évidence l'effet des instationnarités de l'écoulement à l'entrée de la turbine sur les prédictions [139, 86, 185, 264, 217]. Ces simulations instationnaires montrent des interactions fortes entre les deux composants, notamment avec la présence de points chauds générés par la chambre qui interagissent avec les pales de l'étage turbine en modifiant la dynamique de l'écoulement. Toutes ces études permettent de mettre en évidence les apports d'une simulation couplée à deux composants. C'est au *Center for Turbulence Research* à Stanford qu'a été mise en place la première simulation avec trois composants, le compresseur et la turbine en RANS et la chambre de combustion en LES incompressible [240, 182, 183]. Malgré l'accomplissement numérique, il n'a pas été possible d'obtenir des résultats exploitables à cause de la complexité du couplage entre les composants. Plus récemment, Romagnosi [231] a aussi réalisé une simulation à trois composants en couplant du RANS et une méthode harmonique, montrant le bénéfice d'une simulation intégrée par rapport à une méthode de couplage par plan de mélange.

Au final, jusqu'à présent, aucune simulation LES de trois composants d'une turbomachine n'est disponible dans la littérature. Partant de ce constat, dans le cadre d'une allocation PRACE de 30 millions d'heures et du projet ATOM financé et mené en collaboration avec la DGAC et le groupe Safran, il a été possible de produire une simulation instationnaire 360° du moteur DGEN-380 (Price Induction, Inc. et Akira Technologies). Cette simulation a été réalisée à un point de fonctionnement réaliste depuis l'entrée d'air jusqu'à la chambre de combustion, incluant donc la soufflante et le compresseur en plus de la chambre de combustion annulaire. Cette simulation instationnaire a principalement été réalisée par Carlos Pérez Arroyo et a fait l'objet de deux publications dans *Journal of the Global Power and Propulsion Society* [215, 216]. La problématique complète de ce chapitre peut donc se résumer en une seule question :

Quelles sont les informations supplémentaires fournies par la simulation d'un moteur complet par rapport à celle d'un composant isolé ?

À partir de cette simulation complète de référence qui rend compte de l'ensemble des interactions entre les trois composants du moteur, l'objectif est simple. Dans le cadre de cette thèse, il s'agit de réaliser en parallèle de cette simulation complète une simulation, avec des paramètres numériques identiques, de la soufflante suivie de son stator. Grâce à la comparaison entre ces deux simulations, il sera facile de comprendre et d'analyser les modifications introduites par l'interaction entre composants qui sera présente uniquement dans le cas moteur complet. Dans la suite, cette simulation moteur complet sera appelée FULLEST pour *First fUlL engine computation with Large Eddy SimulaTion*.

1.5.2 Configuration et domaines de calcul

Comme expliqué dans l'introduction, la simulation intégrée de référence ou simulation "moteur complet" est composée du fan, d'un redresseur (appelé *Outlet Guide Vane* (OGV)), du compresseur radial, de deux redresseurs radial et axial et enfin de la chambre de combustion. La vue générale du moteur complet est présentée en Fig. 1.5. À noter que la simulation est désignée par abus de langage comme une simulation moteur complet, alors qu'en réalité il manque la turbine derrière la chambre de combustion pour avoir un moteur réellement complet. Comme le montre les flèches donnant la direction de l'écoulement, le moteur est bi-flux, avec un flux primaire qui traverse le compresseur et la chambre de combustion, alors que le flux secondaire contourne la partie centrale du moteur. À titre indicatif, le taux de dilution du moteur est de 6.84 au point de fonctionnement nominal.

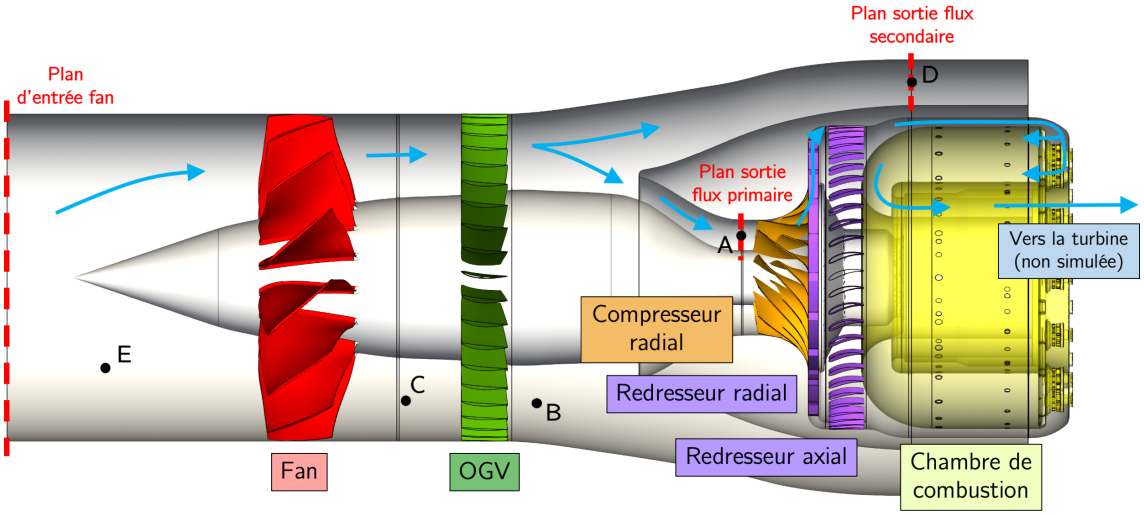


Figure 1.5: Vue générale du domaine de calcul complet. La direction de l'écoulement est indiquée par les flèches bleues. Les positions des plans et des sondes utilisés dans les comparaisons à suivre sont aussi indiquées.

Malheureusement, comme la plupart des turbomachines, pour des raisons de stabilité, le moteur ne possède pas de périodicité naturelle. Étant donné que l'objectif de cette étude est de comparer la simulation intégrée 360° à des simulations de secteur de composant isolé, il a été nécessaire d'adapter le nombre de pales de chaque étage pour obtenir une périodicité intéressante (méthode de réduction du nombre d'aubes). Les détails techniques de cette manipulation sont donnés dans [215]. Une synthèse des modifications effectuées est fournie dans la Table 1.1. Ainsi, il a été possible d'obtenir des périodicités de 1/14 pour le domaine FAN + OGV, 1/11 pour l'ensemble compresseur et 1/13 pour la chambre de combustion.

		Nombre de pales originel	Nombre de pales après modification	Nombre de secteurs sur 360°
Fan		14	14	14
OGV		40	42	
Compresseur radial	Rouet	11	11	11
	Splitter	11	11	
Diffuseur	Radial	19	22	
	Axial	57	55	
Chambre de combustion		-	-	13

Table 1.1: Détails des modifications du nombre de pales de chaque étage pour obtenir une périodicité sectorielle.

La simulation est réalisée à l'aide du code AVBP avec le schéma de deuxième ordre en espace et en temps Lax-Wendroff [165]. Le modèle de viscosité de sous-maille retenu est le modèle *Wall-Adapting Local Eddy* (WALE) [90]. En termes de conditions limites, les conditions d'entrée et de sorties sont imposées grâce à des conditions limites non réfléchissantes (NSCBC) [208]. Le débit en entrée est imposé sans injection de turbulence synthétique et la pression statique est imposée pour les deux plans de sorties [197]. Pour la combustion, une chimie réduite à 6 espèces et 2 réactions est utilisée [56] avec un modèle de flamme épaissie [102] pour s'affranchir d'un raffinement trop important dans la chambre. Enfin, pour modéliser les multi-perforations à la surface des parois de la chambre, le modèle d'injection hétérogène de Bizzari [34] est utilisé.

Le couplage entre les instances fixes et mobiles de la configuration est réalisé grâce à la méthode MISCOG disponible dans AVBP [282, 71]. Cette méthode est décrite avec plus de détails dans la Section 2.5. En résumé, elle permet d'échanger les grandeurs conservatives entre plusieurs instances du même code AVBP grâce à une interpolation d'ordre 3 en utilisant la librairie externe CWIPI [222, 87]. En pratique, tous les éléments fixes du moteur sont regroupés au sein de la même instance (instance #1). Le fan, avec une vitesse de rotation de 13053 rpm, est isolé dans l'instance #2 et le compresseur radial en rotation à 51930 rpm (dans le sens opposé au fan) est contenu dans l'instance #3. Cette décomposition est rappelée en Fig. 1.6.

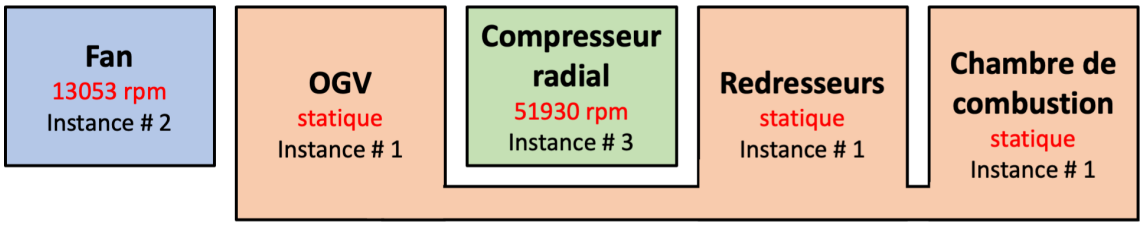


Figure 1.6: Diagramme de la décomposition en sous-domaines de la configuration moteur complet.

Concernant le maillage, la région du fan et des OGVs est discrétisée avec une taille de maille

uniforme égale à 1 mm, permettant d'atteindre une valeur de y^+ moyenne autour de 100 en paroi. Le jeu en tête de pale du fan contient environ 17 mailles. Dans la région du compresseur, le raffinement est plus fin avec un maillage uniforme de 0.25 mm dans la partie volumique et 0.125 mm en paroi. Ce raffinement plus important permet de conserver un y^+ moyen autour de 75 au niveau des pales malgré l'augmentation de vitesse et permet d'avoir environ 8 mailles dans le jeu en tête de pale du rouet compresseur. Dans la chambre de combustion, une attention particulière est accordée à l'injecteur, aux trous primaires et aux trous de dilution pour obtenir un y^+ moyen de 50 dans ces régions alors qu'il est de 150 dans le reste de la chambre. Au total, le maillage complet de la simulation FULLEST sur 360° contient 2.1 milliards de cellules et la répartition des mailles dans chaque instance est donnée dans la Table 1.2. Le pas de temps global est contraint par les mailles situées dans le jeu du compresseur. Avec un CFL = 0.9, le pas de temps obtenu est de 8.9×10^{-9} s. Au final, en tenant compte de la taille du maillage et du pas de temps relativement faible, le coût calcul de la simulation FULLEST se situe autour de 300 000 HCPU/ms, soit environ 350 000 HCPU par révolution du compresseur, 1 400 000 HCPU par révolution du fan ou 3 000 000 HCPU par temps convectif (entre l'entrée du fan et la sortie de la chambre). Des détails additionnels sur la méthodologie pour réaliser un tel maillage, son partitionnement et l'initialisation de la simulation sont donnés dans [215]. Les manipulations ont principalement été réalisées grâce au logiciel HIP [191] pour dupliquer azimutalement les domaines. Grâce au code de raffinement de maillage MMG3D [69], les maillages ont aussi été raffinés au niveau des régions d'intérêt en ciblant les régions de forte dissipation d'énergie cinétique avec une métrique adaptée [70].

Instance	Instance #1	Instance #2	Instance #3
Composition du domaine	OGV, Diffuseurs et chambre de combustion	Fan	Rouet compresseur
Type de domaine	Statique	En rotation à 13053 rpm	En rotation à 51930 rpm
Nombre de mailles	1300 M	380 M	420 M
Pas de temps moyen [s]	8.9×10^{-9}		
Coût de calcul	300 000 HCPU/ms - 1 400 000 HCPU/révolution fan		

Table 1.2: Détails numériques de la simulation moteur complet FULLEST.

Pour le maillage du domaine de la simulation isolée FAN + OGV, le même raffinement que la configuration FULLEST est utilisé. La condition de stabilité est également fixée à CFL = 0.9, mais elle permet un pas de temps plus haut puisque les tailles de maille du domaine sont plus importantes, combinées à des vitesses plus faibles. Grâce à la périodicité à 1/14, il est possible de ne simuler qu'un seul secteur du domaine FAN + OGV, réduisant significativement la taille des maillages, ainsi que le coût calcul de la simulation. Les détails du domaine sont donnés dans la Table 1.3.

Instance	Instance #1	Instance #2
Composition du domaine	OGV	Fan
Type de domaine	Statique	En rotation à 13053 rpm
Nombre de mailles	25 M	27 M
Pas de temps moyen [s]	6.8×10^{-8}	
Coût de calcul	950 HCPU/ms - 4 400 HCPU/révolution fan	

Table 1.3: Détails numériques de la simulation isolée FAN + OGV.

1.5.3 Résultats : comparaison simulation intégrée/simulation isolée

L'objectif de la section résultats qui va suivre est de comparer la simulation moteur complet FULLEST à la simulation isolée FAN + OGV qui a été réalisée dans le cadre de cette thèse. Les comparaisons avec les domaines isolés compresseur seul et chambre seule sont fournies dans [216]. De la même manière que pour la construction du maillage, les détails de la convergence des simulations sont donnés dans [215]. En résumé, les valeurs moyennes convergées sont acquises sur une durée totale de 50 ms, ce qui représente environ 43 rotations du compresseur radial, 11 rotations du fan ou 5 temps convectifs (tel que défini précédemment). À noter que le même temps de moyenne est utilisé pour les deux simulations comparées. Le point de fonctionnement simulé correspond au point de fonctionnement nominal du moteur.

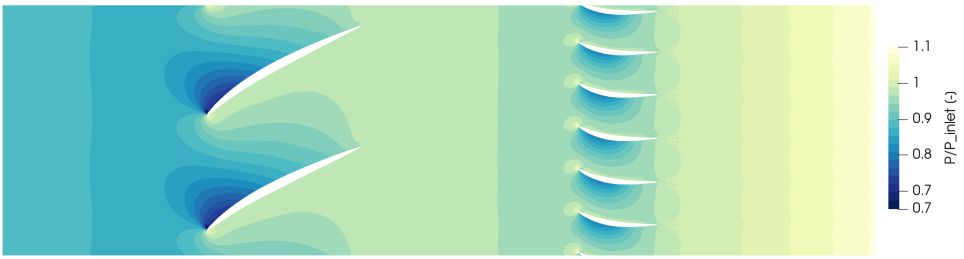
La Table 1.4 présente les différences relatives par rapport aux données expérimentales du débit, de la température totale et de la pression totale pour les deux simulations comparées aux trois plans mis en évidence sur la Fig. 1.5. Globalement, l'ensemble des grandeurs aux trois positions présente des différences relatives par rapport à l'expérience inférieures à 1 %. Une exception est à relever : la pression totale au plan d'entrée et à la sortie du flux secondaire. L'écart au plan d'entrée pour les deux simulations peut s'expliquer par la différence de géométrie entre les simulations et l'expérience. Dans le cas expérimental, la nacelle complète du moteur est présente, ce qui peut modifier la topologie de l'écoulement en entrée. Alors que dans les simulations, c'est un tube droit qui est utilisé sans la complexité de la nacelle. Au niveau du plan de sortie du flux secondaire, la différence s'explique par un choix fait lors des deux simulations. La pression statique de sortie à ce plan a été adaptée pour obtenir le bon taux de dilution entre les flux primaire et secondaire. Respecter la répartition de débit semblait plus important au niveau de la dynamique de l'écoulement que de respecter la pression totale de l'expérience. À noter que cette section s'intéresse en particulier à la différence entre une simulation intégrée moteur complet et une simulation isolée FAN + OGV. Il est donc intéressant de remarquer que même si la différence relative à ce plan est supérieure à 4 % pour les deux simulations, les deux valeurs sont très proches entre elles. Cela signifie que le point de fonctionnement obtenu par les deux simulations est comparable.

		FAN + OGV	FULLEST
Entrée FAN	Q	- 0.27 %	0.62 %
	Tt	0.10 %	0.13 %
	Pt	-1.11 %	-0.74 %
Sortie flux primaire	Q	0.68 %	0.29 %
	Tt	-0.13 %	-0.20 %
	Pt	0.46 %	0.10 %
Sortie flux secondaire	Q	-0.41 %	0.07 %
	Tt	-0.36 %	-0.45 %
	Pt	-4.63 %	-4.13 %

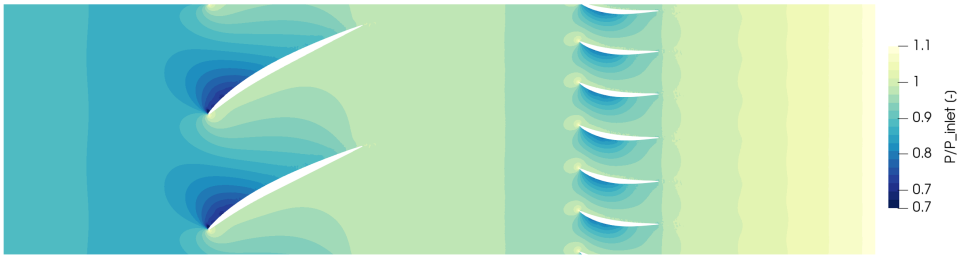
Table 1.4: Différences relatives du débit, de la température totale et de la pression totale des deux simulations par rapport aux données expérimentales (les valeurs absolues ne sont pas données pour des raisons de confidentialité).

Pour poursuivre la comparaison, les contours de pression statique moyenne adimensionnée par la pression d'entrée à mi-hauteur de veine du domaine FAN + OGV sont comparés pour les simulations FAN + OGV et FULLEST (Fig. 1.7). En accord, avec les résultats précédents sur l'étude du point de fonctionnement, les deux contours sont très similaires. Dans les deux cas, une zone de faible pression est observée au niveau de l'extrados des aubes du fan et du redresseur. Il n'y a pas de différence significative entre les deux simulations, mise à part quelques régions très ponctuelles et

ces différences peuvent être expliquées par la légère disparité de point de fonctionnement. Au final, la distribution de pression dans les deux domaines, et donc la topologie générale de l'écoulement semblent très proches. Cela signifie que pour prédire l'aérodynamique globale de l'étage, la simulation isolée, sans le compresseur en aval semble suffisante.



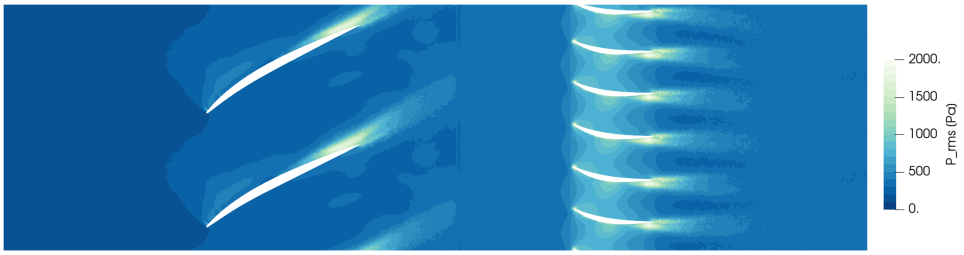
(a) FAN + OGV.



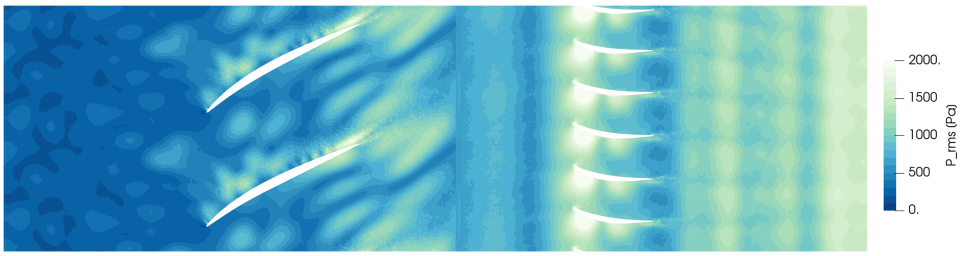
(b) FULLEST.

Figure 1.7: Contour de pression statique moyenne adimensionnée par la pression d'entrée à mi-hauteur de veine pour les deux simulations.

Ensuite, les contours de fluctuations RMS moyennes de pression statique sont présentés à mi-hauteur de veine (Fig. 1.8) et sur une coupe méridienne (Fig. 1.9) du domaine FAN + OGV pour les deux simulations. Pour la simulation FAN + OGV, les deux contours mettent en évidence trois sources principales de fluctuations de pression. L'amplitude des fluctuations est de l'ordre de 1500 à 2000 Pa, soit environ 4 à 5 % de la pression statique locale. Les deux premières sont situées dans le sillage du fan et du redresseur à cause des instationnarités générées par la présence des pales. La troisième source est localisée au niveau du jeu en tête de pale du fan. Ce phénomène est assez classique puisque l'écoulement du côté de l'intrados de la pale passe à travers le jeu à cause du déséquilibre de pression, générant une forte turbulence. Pour la simulation intégrée FULLEST, les deux contours sont complètement différents. Un niveau élevé de fluctuations de pression est observé sur l'ensemble du domaine. En observant, la coupe méridienne du cas FULLEST (Fig. 1.9), il est clair que la source de ces fluctuations est située en aval du plan de sortie du flux primaire. Ces deux comparaisons montrent que la présence du compresseur en aval du domaine fan joue un rôle déterminant sur les niveaux de fluctuations de pression et donc sur l'acoustique de la simulation. Cela laisse entendre que pour ce type de simulation, une simulation isolée est incapable de reproduire correctement et de façon détaillée et précise l'écoulement d'une simulation intégrée multi-composants malgré des valeurs globales/intégrées correctes. À noter que même si les contours de pression statique étaient très proches (Fig. 1.7), l'acoustique est quant à elle très différente. Or, cette modification de l'acoustique dans le domaine peut jouer un rôle important sur la façon dont évolue l'écoulement à la traversée de l'étage. Par exemple, des fortes fluctuations à l'extrados des aubes du fan, proche du bord de fuite, peuvent entraîner une déstabilisation de la couche limite et provoquer une transition laminaire/turbulent plus précoce que dans le calcul isolé.

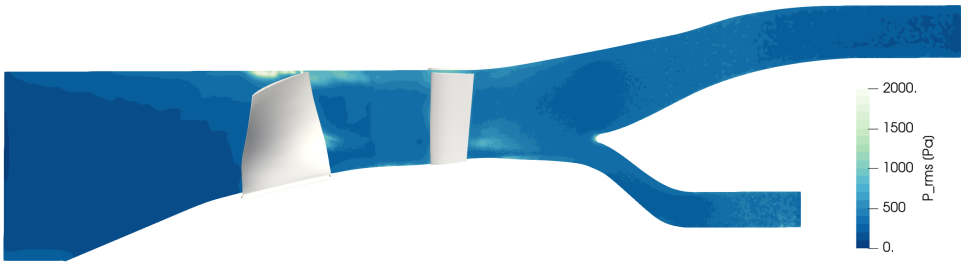


(a) FAN + OGV.

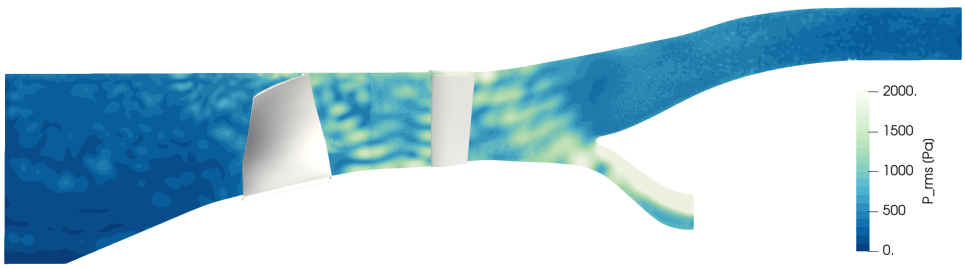


(b) FULLEST.

Figure 1.8: Contour de fluctuation RMS de pression statique à mi-hauteur de veine pour les deux simulations.



(a) FAN + OGV.



(b) FULLEST.

Figure 1.9: Coupe méridienne de fluctuation RMS de pression statique pour les deux simulations.

Pour vérifier l'impact du compresseur sur l'écoulement et plus spécifiquement l'acoustique qui se développe dans le domaine fan, une analyse est faite sur les signaux de pression statique de plusieurs sondes du domaine. La position de ces sondes est indiquée sur la Fig. 1.5. Pour permettre une compréhension plus fine de l'acoustique présente au sein du moteur, il est important de définir trois fréquences,

- la fréquence de passage du fan dans le référentiel du domaine statique, définie comme,

$$f_{\mathrm{FAN}} = \Omega_{\mathrm{FAN}} \cdot N_{\mathrm{FAN}} = \frac{13053 \times 14}{60} = 3045.7 \text{ Hz}, \tag{1.6}$$

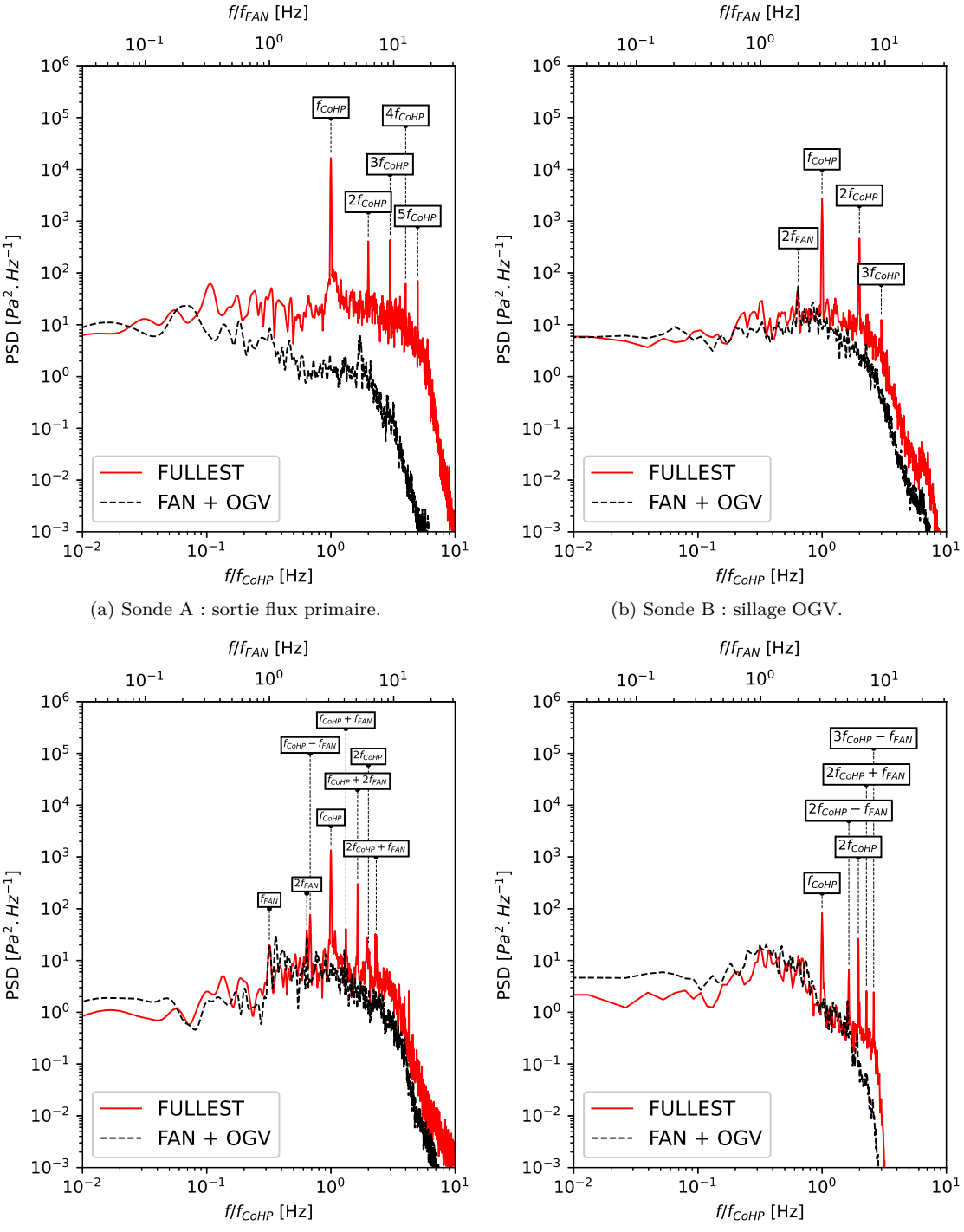
- la fréquence de passage du compresseur radial dans le référentiel du domaine statique, définie comme,

$$f_{\mathrm{CoHP}} = \Omega_{\mathrm{CoHP}} \cdot N_{\mathrm{CoHP}} = \frac{51930 \times 11}{60} = 9520.5 \text{ Hz}, \tag{1.7}$$

- et la même fréquence de passage du compresseur radial mais dans le référentiel du domaine tournant du FAN s'écrit comme (le compresseur et le fan tournent dans des sens opposés, d'où le signe +),

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{CoHP,rel.FAN}} &= (\Omega_{\mathrm{CoHP}} - \Omega_{\mathrm{FAN}}) \cdot N_{\mathrm{CoHP}}, \\ &= \frac{(51930 + 13053) \times 11}{60} = 11913.6 \text{ Hz}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

En étudiant les densités spectrales de puissance (PSD) aux différentes positions, il est clair que des différences très notables existent entre les simulations FAN + OGV et FULLEST (Figs. 1.10 et 1.11). Pour la simulation FULLEST, dans le domaine statique, la fréquence du compresseur f_{CoHP} ainsi que plusieurs de ses harmoniques apparaissent, alors qu'elles sont totalement absentes dans le spectre FAN + OGV. Cet effet est notamment visible sur la PSD de la sonde A du cas FULLEST (Fig. 1.10a), localisée à la sortie du flux primaire, sur laquelle la fréquence f_{CoHP} et ses 4 premières harmoniques dominent le spectre. Dans [216], il a été montré que cette activité spectrale est générée par le choc présent à l'entrée du compresseur radial. À l'inverse, sur la simulation FAN + OGV, ces fréquences ne sont pas présentes puisqu'il n'y pas de compresseur en aval. Les contours de fluctuations précédents ont aussi montré que les ondes acoustiques remontaient jusqu'au fan et aux OGVs. Ainsi, en analysant la PSD de la sonde B (Fig. 1.10b) située dans le sillage des OGVs, il n'est pas surprenant d'observer encore les fréquences f_{CoHP}, $2f_{CoHP}$ et $3f_{\mathrm{CoHP}}$ pour le cas FULLEST alors qu'elles ne sont pas visibles dans le cas FAN + OGV. Cependant, les deux simulations présentent bien la fréquence $2f_{\mathrm{FAN}}$ qui provient du fan en amont dans leur spectre respectif. Il est intéressant de remarquer que l'effet du compresseur est aussi notable au-delà. Par exemple, la sonde C positionnée entre le fan et les OGVs montre aussi la fréquence f_{CoHP}, mais aussi des combinaisons plus complexes entre la fréquence du fan en amont f_{FAN} et f_{CoHP} (Fig. 1.10c). Encore une fois, ces combinaisons ne sont visibles que sur le cas FULLEST. Le cas FAN + OGV met uniquement en évidence la fréquence f_{FAN} avec ses premières harmoniques. Il est notable de souligner que des résultats similaires ont été observés par des mesures expérimentales menées par la NASA sur le même moteur, où la fréquence du compresseur apparaît en plus de celle du fan sur le signal d'une sonde localisée entre le fan et les OGVs [37]. L'effet du compresseur est même visible à la sortie du flux secondaire, grâce à la sonde D (Fig. 1.10d). Le contenu spectral du cas FULLEST est aussi dominé par la fréquence f_{CoHP}, ainsi que sa première harmonique et des combinaisons avec la fréquence du fan f_{FAN}.



(a) Sonde A : sortie flux primaire.

(b) Sonde B : sillage OGV.

(c) Sonde C : entrée OGV.

(d) Sonde D : sortie flux secondaire.

Figure 1.10: Densités spectrales de puissance du signal de pression statique des sondes dans le domaine statique OGV.

Enfin, encore plus surprenant, pour le cas FULLEST, la sonde E située en amont du fan présente un spectre dominé par la fréquence $f_{\mathrm{CoHP,rel.FAN}}$ qui correspond à la fréquence du compresseur dans le domaine en rotation du fan (Fig. 1.11). Dans le domaine tournant du fan, les conclusions sont très similaires à celles faites dans le domaine statique puisque cette fréquence n'est pas visible sur le cas FAN + OGV.

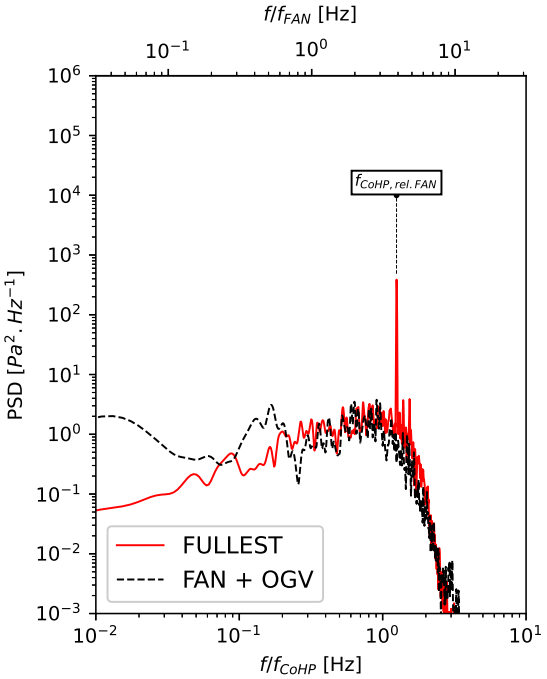


Figure 1.11: Densités spectrales de puissance du signal de pression statique de la sonde E : entrée fan (la sonde est en rotation avec le maillage).

1.5.4 Conclusion et ouverture sur les chapitres suivants

Au final, la courte comparaison entre les deux simulations donne lieu à un constat simple : la présence du compresseur en aval du domaine FAN + OGV modifie fortement la topologie de l'écoulement par rapport à une simulation isolée FAN + OGV seuls. Les chocs présents dans le compresseur radial génèrent des fluctuations importantes de pression qui remontent jusqu'au domaine de la soufflante. Ainsi, sur une telle configuration, une simulation isolée n'est pas en mesure de donner des résultats comparables à une simulation intégrée. À noter que davantage de résultats et de comparaison sont disponibles dans [215, 216].

L'étude présentée ici met donc en lumière un problème important pour simuler avec précision l'écoulement d'une turbomachine. La simulation dite moteur complet est capable de reproduire l'ensemble des phénomènes physiques de la turbomachine. Le couplage entre les composants est parfaitement reproduit puisqu'ils échangent tout au long de la simulation par le biais de différentes instances du même code de calcul. Malgré tout, l'inconvénient majeur de cette simulation est son coût, largement prohibitif pour être réalisée pour d'autres moteurs sans avoir accès à d'énormes capacités de calcul. À l'inverse, le coût de la simulation isolée FAN + OGV est beaucoup faible, puisque le domaine ne contient qu'un seul secteur. Cependant, comme l'ont montré les comparaisons précédentes, cette simulation isolée présente des différences importantes par rapport à la simulation moteur complet. Malgré son coût plus réduit, elle ne permet pas de reproduire avec précision la physique de l'écoulement au sein du moteur. En particulier, l'impact du compresseur sur l'écoulement du domaine FAN + OGV est complètement absent de la simulation isolée, alors que la simulation intégrée met en évidence des effets importants notamment au niveau des fluctuations de pression.

Étant donné les différences entre les simulations intégrée et isolée, il est nécessaire de proposer des solutions pour résoudre ces problèmes. Trois types de solutions sont apportées dans cette thèse. Deux d'entre elles sont d'ordre numérique et ayant pour objectif à terme des gains en coût de calcul. La troisième solution investiguée est d'ordre physique visant à améliorer la mise en données d'un calcul isolé afin de reproduire au mieux les effets du composant amont.

- Premièrement, dans le Chapitre 3, une analyse des schémas numériques existants permet

de détailler des pistes d'améliorations pour ces derniers ou d'en développer de nouveaux, plus précis et plus robustes. Augmenter la précision d'un schéma (en particulier son ordre de convergence) permet de réduire le coût d'une simulation à niveau d'erreur fixé. Cela peut par exemple s'appliquer dans le cas d'une simulation intégrée pour en réduire le coût global.

- Deuxièmement, le Chapitre 4 s'intéresse à la contrainte imposée sur le pas de temps par la condition CFL. En effet, dans un code explicite, le pas de temps de l'ensemble du domaine est en général contraint par la condition CFL des plus petites mailles du maillage. Or, ce petit pas de temps est adapté uniquement aux petites mailles alors qu'il pourrait être bien plus élevé pour le reste du domaine. Cela a pour conséquence d'accroître artificiellement le coût d'une simulation. Dans le but de limiter cet effet, une méthode de pas de temps local est introduite pour réduire le coût total d'une simulation multi-composants en relaxant localement la contrainte imposée par le CFL sur le pas de temps.

- Troisièmement, le Chapitre 5 décrit une méthode utilisée pour générer un nouveau type de condition limite d'entrée instationnaire en tenant compte du couplage entre la chambre et la turbine dans une configuration turbine isolée. Ce chapitre étudie plus généralement l'impact des conditions limites sur une simulation isolée. Cette problématique est particulièrement intéressante puisque si la condition limite est suffisamment réaliste et est capable de reproduire le couplage avec les composants voisins, il est possible d'obtenir des résultats proches d'une simulation intégrée pour un coût de calcul beaucoup moins élevé. Comme le montre les comparaisons précédentes, des conditions standards ne permettent pas de reproduire ce couplage. Ce chapitre expose la construction de conditions limites plus réalistes à partir d'une base de données issue d'une simulation intégrée. Par exemple, dans le cas d'une turbine, ce type de conditions limites a l'avantage de permettre des petites modifications de géométrie, tout en modélisant le couplage avec la chambre de combustion, sans nécessiter une simulation intégrée pour chaque modification.

Chapitre 2

Équations de Navier-Stokes pour la LES et leur résolution numérique dans un contexte turbomachine

> *Humankind has the science and technology to destroy itself or to provide prosperity for all. But while science offers us these opportunities, science will not make that choice for us. Only the moral power of a world acting as a community can.*
>
> — Margaret Beckett

2.1 Introduction 39
2.2 Forme générale des équations de Navier-Stokes 40
2.2.1 Équations de conservation 40
2.2.2 Équation d'état 40
2.3 Équations de la simulation aux grandes échelles 41
2.3.1 Filtrage des équations de Navier-Stokes 41
2.3.2 Fermeture des équations de transport : modèles de sous-mailles 42
2.4 Méthodes numériques pour la LES dans le code AVBP 44
2.4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes 44
2.4.2 Discrétisation du domaine de calcul et notations associées 47
2.4.3 Les différents schémas de convection du formalisme *cell-vertex* 49
2.4.4 Résolution des termes diffusifs 57
2.4.5 Viscosité artificielle 58
2.4.6 Discrétisation temporelle 60
2.4.7 Conditions limites 62
2.5 Couplage multi-composants : méthode MISCOG 63
2.6 Conclusion 65

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les équations de Navier-Stokes dans le contexte de la simulation aux grandes échelles. Des détails sont ensuite donnés sur les méthodes numériques nécessaires à leur résolution comme le maillage et le formalisme associé, les schémas convectifs et diffusifs et la stabilisation des simulations par viscosité artificielle. Enfin, pour permettre la simulation de configurations multi-composants, la méthode MISCOG est décrite. Elle rend possible le couplage entre différentes instances fixes et/ou mobiles en conservant l'ordre des schémas numériques utilisés. Toutes les informations décrites dans ce chapitre sont spécifiques au code AVBP, qui est le code LES utilisé pendant cette thèse.

Note : dans ce chapitre, pour simplifier les écritures, la règle de la sommation d'Einstein est adoptée, c'est-à-dire que si l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un même terme, cela sous-entend que ce dernier est sommé sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice.

2.2 Forme générale des équations de Navier-Stokes

2.2.1 Équations de conservation

Les équations de conservation qui décrivent l'évolution d'un écoulement compressible sans réaction chimique et sans terme source s'écrivent,

- pour l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i\right) = 0, \tag{2.1}$$

- pour les équations de conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[P\delta_{ij} - \tau_{ij}\right], \tag{2.2}$$

- et pour l'équation de conservation de l'énergie totale,

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho E u_j\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i P\delta_{ij} - \tau_{ij} + q_j\right], \tag{2.3}$$

avec ρ la masse volumique, u_i les composantes du vecteur vitesse, E l'énergie totale et q le flux de chaleur. Pour fermer le système d'équations, il est nécessaire de déterminer la pression P, le tenseur des contraintes τ et le flux de chaleur q.

2.2.2 Équation d'état

La loi des gaz parfaits permet de relier les différentes propriétés thermodynamiques du fluide. La pression P s'exprime comme :

$$P = \rho R T, \tag{2.4}$$

avec R la constante des gaz parfaits ($R = 287.058\ J.kg^{-1}.K^{-1}$) et T la température.

Ensuite, pour un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes s'écrit,

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right). \tag{2.5}$$

D'autre part, la loi de Sutherland [258] fournit une relation entre la viscosité dynamique μ du fluide et la température T,

$$\mu(T) = \mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{T_0 + 110.4}{T + 110.4}, \tag{2.6}$$

avec, $\mu_0 = 1.711 \times 10^{-5}\ kg.m.s^{-1}$ et $T_0 = 273.15\ K$ dans le cas de l'air.

Enfin, le flux de chaleur q s'exprime comme,

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{2.7}$$

avec λ le coefficient de conductivité thermique, obtenu à partir du nombre de Prandtl Pr (considéré comme constant en temps et en espace et égale à 0.71 pour de l'air [62]), $\lambda = \frac{\mu C_p}{Pr}$ et C_p la capacité calorifique massique à pression constante, tabulée en fonction de l'enthalpie.

2.3 Équations de la simulation aux grandes échelles

2.3.1 Filtrage des équations de Navier-Stokes

Dans un calcul LES, seules les grosses structures turbulentes, très énergétiques et principalement liées à la géométrie et au point de fonctionnement sont résolues alors que les plus petites et plus universelles sont modélisées. Cette séparation des échelles est réalisée par un filtre spatial permettant de simuler les tourbillons de taille supérieure au filtre imposé et de ne modéliser que les tourbillons de taille plus petite [211]. Le filtrage peut s'effectuer implicitement grâce au maillage ou explicitement en utilisant un filtre passe-bas. En notant Δ la longueur de coupure du filtre, le nombre d'onde $\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}$ représente la limite entre le champ résolu et le champ modélisé. Toutes les structures turbulentes avec un nombre d'onde supérieur à κ_c seront résolues alors que les autres seront modélisées. Dans AVBP, aucun filtre n'est appliqué explicitement. Le filtrage est implicite et découle de la résolution des équations de Navier-Stokes sur un domaine discrétisé. Pour les écoulements compressibles, un filtrage spatial au sens de Favre pondéré par la masse volumique est couramment utilisé [236],

$$\bar{\rho}\tilde{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho f\left(x',t\right) G\left(x-x'\right) dx', \tag{2.8}$$

avec f une variable quelconque et G la fonction de filtrage. L'opérateur $\bar{\bullet}$ fait référence à la variable filtrée, alors que l'opérateur $\tilde{\bullet}$ dénote le filtrage au sens de Favre, tel que $\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$. Par construction, il est recommandé que la fonction de filtrage G satisfasse la condition de normalisation,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx = 1. \tag{2.9}$$

Il est maintenant possible d'appliquer ce filtrage aux équations de Navier-Stokes en décomposant tout scalaire f en une partie résolue $\tilde{f}$ et une partie modélisée (dite de sous-maille) f',

$$f = \tilde{f} + f'. \tag{2.10}$$

Les équations filtrées de Navier-Stokes s'écrivent alors,

- pour l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\right) = 0, \tag{2.11}$$

- pour les équations de conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{P}\delta_{ij} - \overline{\tau_{ij}} - \overline{\tau_{ij}}^t\right], \tag{2.12}$$

- pour l'équation de conservation de l'énergie totale,

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}_j\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i\left(P\delta_{ij} - \tau_{ij}\right)} + \overline{q_j} + \overline{q_j}^t\right]. \tag{2.13}$$

Le filtrage des équations fait apparaître des termes de sous-maille qui empêchent la fermeture du système d'équations, au premier ordre desquels figurent le tenseur des contraintes de sous-maille $\overline{\tau_{ij}}^t$ et le flux de chaleur de sous-maille $\overline{q_j}^t$. Ils s'expriment respectivement,

$$\overline{\tau_{ij}}^t = -\overline{\rho}\left(\widetilde{u_iu_j} - \widetilde{u}_i\widetilde{u}_j\right), \tag{2.14}$$

$$\overline{q_i}^t = \overline{\rho}\left(\widetilde{u_iE} - \widetilde{u}_i\widetilde{E}\right), \tag{2.15}$$

et représentent les échelles de la turbulence que le maillage est incapable de capturer. Ils contiennent les informations des échelles de turbulence plus petites que la largeur du filtre appliqué (ou de la taille de maille pour le filtrage explicite). Pour fermer le système, il est nécessaire de modéliser le comportement de ces petites échelles.

2.3.2 Fermeture des équations de transport : modèles de sous-mailles

La turbulence est un phénomène caractérisé par un transfert d'énergie depuis des structures de grandes échelles vers celles de petites tailles (cascade énergétique [206]). Pour fournir une solution compatible avec la physique de l'écoulement, le code de calcul doit donc être capable de dissiper une quantité d'énergie qui correspond à ce phénomène de transfert. Comme décrit précédemment, l'utilisation d'un modèle de sous-maille (aussi appelé modèle SGS ou *Sub-Grid Scale model*) pour représenter les structures de petites tailles est un pré-requis essentiel à la LES [211]. Par analogie aux méthodes utilisées avec les équations moyennées RANS, une hypothèse de viscosité turbulente est utilisée pour fermer les équations filtrées, en introduisant ν_t, dont la définition est donnée par la suite,

$$\overline{\tau_{ij}}^t = \overline{\rho}\nu_t\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right). \tag{2.16}$$

Sur cette base, plusieurs modèles peuvent être dérivés en fonction de l'expression fournie pour ν_t. Les sous-sections qui suivent décrivent les modèles disponibles dans AVBP pour calculer ν_t.

Modèle de Smagorinsky

Dans le modèle de Smagorinsky [254], la viscosité turbulente ν_t s'exprime comme,

$$\nu_t = \left(C_S\Delta\right)^2\sqrt{2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}}, \tag{2.17}$$

avec C_S la constante de Smagorinsky qui a une valeur comprise entre 0.1 et 0.18 selon les cas, Δ la taille caractéristique du filtre choisie comme $\Delta \propto (V_e)^{1/3}$ (V_e étant le volume de cellule) et $\widetilde{S}_{ij}$ le tenseur des taux de déformations résolues.

Ce modèle a la particularité de fournir un bon niveau de dissipation de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'une turbulence homogène isotrope (THI). Il est cependant trop dissipatif en dehors des cas THI et n'est également pas adapté aux écoulements proche paroi [236] (mais il peut être utilisé dans le cas des LES non résolues en paroi). Le modèle de Smagorinsky filtré [89] existe aussi, avec pour but d'obtenir une meilleure représentativité des phénomènes locaux au sein d'écoulements turbulents complexes. La transition est aussi mieux prédite avec ce modèle.

Modèle WALE

Pour le modèle WALE (*Wall Adaptating Local Eddy-viscosity*) [195], la viscosité turbulente ν_t s'écrit,

$$\nu_t = (C_\omega \Delta)^2 \frac{(s^d_{ij} s^d_{ij})^{3/2}}{(\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij})^{5/2} + (s^d_{ij} s^d_{ij})^{5/4}} \ , \tag{2.18}$$

avec $C_\omega = 0.4929$ la constante du modèle, $\Delta \propto (V_e)^{1/3}$ la taille caractéristique du filtre et,

$$s^d_{ij} = \frac{1}{2}(\widetilde{g}^2_{ij} - \widetilde{g}^2_{ij}) - \frac{1}{3}\widetilde{g}^2_{kk}\delta_{ij}, \tag{2.19}$$

où $\widetilde{g}_{ij} = \partial \widetilde{u}_i / \partial x_j$ est le gradient des vitesses résolues. Ce modèle a été développé pour des écoulements en canaux avec pour but de fournir de bons résultats en proche paroi et est donc adapté à des LES résolues en paroi.

Modèle σ

Dans le cas du modèle σ [196, 266], la viscosité turbulente ν_t est donnée par,

$$\nu_t = (C_\sigma \Delta)^2 \ \frac{\sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1^2}, \tag{2.20}$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ les valeurs singulières du tenseur gradient des vitesses et $C_\sigma = 1.5$ la constante du modèle. Le modèle σ a été développé pour palier à certains problèmes rencontrés par les modèles statiques. Il est aussi très performant sur des configurations 3D complexes.

Modèle "équation de k"

Pour ce modèle [20], la viscosité turbulente s'exprime par,

$$\nu_t = C_k \Delta k_t^{1/2}. \tag{2.21}$$

Elle fait intervenir l'énergie cinématique turbulente de sous-maille k_t définie comme,

$$k_t = \frac{1}{2}(\widetilde{u_i u_i} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i). \tag{2.22}$$

L'avantage de ce modèle réside dans le fait que la viscosité turbulente n'est pas directement reliée aux gradients de vitesse locaux. Ce qui permet de simuler correctement les régions avec une forte énergie turbulente de sous-maille mais des gradients de vitesse peu résolus.

Modèle du flux de chaleur de sous-maille

La contribution de sous-maille du flux de chaleur $\overline{q_j}^t$ est généralement simplement modélisée comme,

$$\overline{q_j}^t = \lambda_t \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i}, \tag{2.23}$$

où λ_t est le coefficient de conductivité thermique modifié,

$$\lambda_t = \frac{\mu_t \overline{C_p}}{Pr_t}. \tag{2.24}$$

La valeur du Prandtl turbulent Pr_t est choisie en fonction du type d'écoulement étudié (une valeur autour de 0.5 est conseillée pour une THI [186]).

Cette section constitue une rapide introduction du principe de la LES. Pour avoir une présentation détaillée de la LES ainsi qu'une description complète des équations, des opérations de filtrage et des difficultés liées à la simulation instationnaire, il est par exemple possible de se référer au livre de Pierre Sagaut sur le sujet [236].

2.4 Méthodes numériques pour la LES dans le code AVBP

2.4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

Les équations filtrées de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous forme compacte comme,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0, \tag{2.25}$$

avec $\mathbf{U}$ contenant les grandeurs conservatives $(\rho, \rho\mathbf{U}, \rho E)^T$ et $\vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})^T$ le tenseur des flux de $\mathbf{U}$. Le flux $\vec{\mathcal{F}}$ est habituellement divisé en deux composantes, une partie convective $\vec{\mathcal{F}}^C$ et une partie diffusive $\vec{\mathcal{F}}^V$,

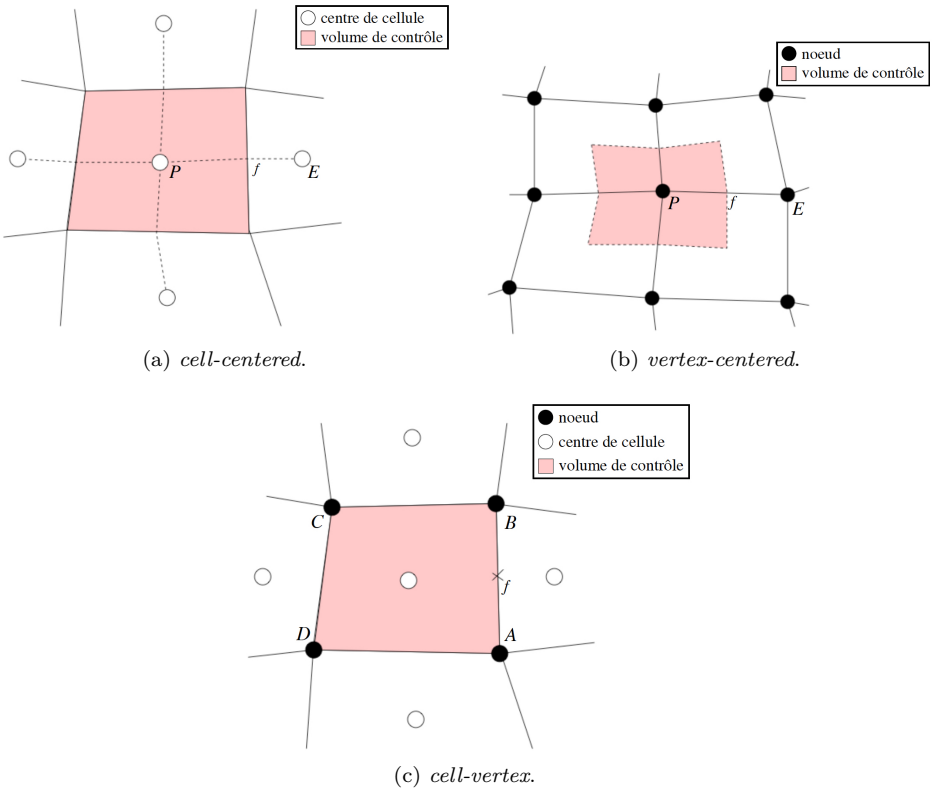
$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}^C(\mathbf{U}) + \vec{\mathcal{F}}^V(\mathbf{U}, \vec{\nabla}\mathbf{U}). \tag{2.26}$$

Le flux convectif $\vec{\mathcal{F}}^C$ s'exprime seulement à partir de $\mathbf{U}$ et correspond au flux des équations d'Euler, alors que le flux diffusif $\vec{\mathcal{F}}^V$ dépend à la fois de $\mathbf{U}$ et de ses gradients. Dans le cas de la LES, le terme $\vec{\mathcal{F}}^V$ contient aussi le tenseur de viscosité turbulente et le flux de chaleur de sous-maille.

Pour résoudre numériquement les équations filtrées de Navier-Stokes, trois formulations numériques sont possibles :

- la méthode centrée cellules ou *cell-centered*. Dans ce cas, les variables de l'écoulement sont stockées au centre de chaque cellule et le bilan des lois de conservation est fait sur un volume de contrôle correspondant aux cellules du maillage (Fig. 2.1a). Des détails supplémentaires sont disponibles dans la littérature [227, 128, 259].
- la méthode centrée sommets ou *vertex-centered*. Ici, les variables de l'écoulement sont stockées aux nœuds du maillage et le bilan se fait dans le volume autour de chaque nœud, appelé volume dual (à opposer au volume primal pour la méthode *cell-centered*). Plusieurs définitions sont possibles pour le volume dual [27, 229, 79]. La plus classique, celle utilisée dans AVBP, consiste à relier les centres des cellules avec les centres des arrêtes (Fig. 2.1b). La littérature est aussi très riche pour cette méthode [27, 177, 42, 43]. En termes d'inconvénient, il est à signaler que la méthode demande d'élargir le stencil du schéma au-delà des plus proches voisins pour obtenir un ordre de convergence supérieur à 2.

- la méthode cellules et sommets ou *cell-vertex* (utilisée dans AVBP). Par rapport aux deux premières, la méthode se distingue par le fait que les variables ne sont pas stockées au centre des volumes de contrôle. Le bilan se fait dans les cellules du maillage, alors que les solutions sont définies aux nœuds (Fig. 2.1c). Cette méthode présente des similitudes avec les éléments finis puisque le flux est intégré le long des arrêtes et non pas en calculant le flux qui traverse la surface d'intégration [188]. Des études ont aussi montré que la méthode *cell-vertex* était plus précise et plus robuste aux perturbations de maillage [259, 260, 229]. Par ailleurs, comme le bilan est fait sur les cellules, une opération supplémentaire est requise pour faire la mise à jour temporelle des valeurs nodales [232, 66]. Cela entraine un coût supplémentaire. Enfin, comme pour les autres méthodes, avec la méthode *cell-vertex*, des oscillations en damiers (ou *wiggles*) peuvent apparaître dans le domaine de calcul, ce qui nécessite l'utilisation de viscosité artificielle pour les dissiper.



(a) *cell-centered.* (b) *vertex-centered.*

(c) *cell-vertex.*

Figure 2.1: Comparaison des méthodes de discrétisation [161].

AVBP qui est le code de calcul exploité tout au long de cette thèse, utilise le formalisme *cell-vertex*. Cela signifie que numériquement, le cœur du code est construit comme suit.

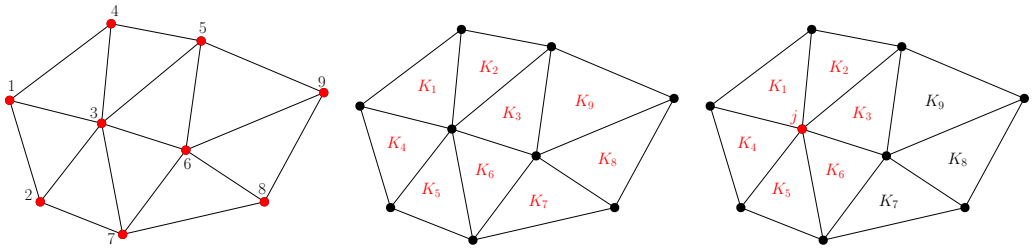
Notations

Pour plus de clarté dans les équations qui vont suivre, les notations suivantes sont introduites.

- L'indice j fait référence à la numérotation globale des nœuds du domaine. On a donc $j \in [1, ..., N_h]$, avec N_h le nombre total de nœuds du maillage (Fig. 2.2a).
- L'indice e fait référence à la numérotation globale des cellules ou des éléments du maillage, avec $e \in [1, ..., N_K]$ et N_K le nombre total de cellules du maillage (Fig. 2.2b). L'ensemble $\mathcal{T}_h$ contient la totalité des cellules K_e du maillage, telle que $\forall e \in [1, ..., N_K], K_e \in \mathcal{T}_h$. Pour simplifier la notation, une sommation sur l'ensemble des cellules du maillage sera

notée $\sum_{e\in\mathcal{T}_h}$, alors qu'elle signifie mathématiquement $\sum_{e|K_e\in\mathcal{T}_h}$.

- L'ensemble des éléments (ou cellules) contenant le nœud j est désigné par $\mathcal{D}_j$, tel que $\mathcal{D}_j = \bigcup_{e|j\in K_e} K_e$ (Fig. 2.2c). L'opération de sommation des contributions des cellules contenant le nœud j s'écrira en simplifiant $\sum_{e\in\mathcal{D}_j}$, mais correspond en réalité à $\sum_{e|j\in K_e}$.
- L'indice k désignera la numérotation locale des sommets (ou vertex) d'une cellule. Pour une cellule K_e composée de n_v^e vertex, $k \in [1, ..., n_v^e]$ (Fig. 2.2d). La sommation locale sur les nœuds d'une cellule s'écrira en simplifiant $\sum_{k\in K_e}$, qui signifie $\sum_{k|k\in K_e}$.
- L'indice f fait référence aux faces d'un élément (Fig. 2.2e). La sommation sur les faces liées (adjacentes) à un vertex k sera notée $\sum_{f\ni k}$, mais signifie $\sum_{f|k\in f}$.
- Le symbole ∂ devant un domaine ou un élément désignera les bords de ce domaine. Par exemple, ∂K_e désigne les bords de l'élément K_e (Fig. 2.2f).



(a) Numérotation globale des nœuds.

(b) Numérotation globale des éléments.

(c) Ensemble des éléments contenant le noeud j, $\mathcal{D}_j = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6$.

(d) Numérotation locale des vertex d'un élément.

(e) Faces associées au vertex k dans l'élément K_e.

(f) Bords ∂K_e de l'élément K_e.

Figure 2.2: Représentation des notations introduites.

Comme pour les autres méthodes, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes par la méthode *cell-vertex* nécessite de discrétiser le domaine de calcul Ω par un ensemble fini d'éléments K_e (des polygones en 2D ou des polyèdres en 3D) qui constitue le maillage du domaine Ω,

$$\Omega = \bigcup_{K_e\in\mathcal{T}_h} K_e, \tag{2.27}$$

avec $\mathcal{T}_h$ l'ensemble des éléments du maillage et K_e un élément du maillage d'indice e.

Une fois le domaine discrétisé, il est possible de résoudre l'Eq. (2.25) en calculant le résidu de chaque élément K_e grâce au théorème de Green-Gauss,

$$\mathbf{R}_e = \frac{1}{V_e}\int_{K_e} \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h \, dV = \frac{1}{V_e}\oint_{\partial K_e} \vec{\mathcal{F}}_h \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{1}{dV_e}\sum_{k\in K_e} \vec{\mathcal{F}}_k \cdot \vec{S}_k, \tag{2.28}$$

avec ∂K_e les bords de l'élément K_e, V_e la surface de l'élément K_e en 2D ou son volume en 3D, d la dimension, $\vec{\mathcal{F}}_h$ le flux numérique approximant $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{F}}_k$ le flux au nœud k et S_k la normale au nœud k, définie comme l'opposé de la somme des 2 normales aux deux faces adjacentes (calcul détaillé par la suite).

Une fois les résidus aux cellules calculés, l'information est distribuée aux nœuds pour mettre à jour le vecteur solution. Dans une forme semi-discrète, *i.e.* avec un avancement en temps parfait, le résidu au nœud j s'écrit,

$$\frac{d\mathbf{U}_j}{dt} = \mathbf{R}_j = -\frac{1}{V_j}\sum_{e\in\mathcal{D}_j} \underline{\mathbf{D}}_{j,e} V_e \mathbf{R}_e, \tag{2.29}$$

où $\underline{\mathbf{D}}_{j,e}$ est une matrice de distribution qui permet de distribuer le résidu du centre de la cellule K_e au nœud j. Il faut ici noter ici, que pour assurer la conservativité du schéma numérique, la somme des matrices de distribution doit être égale à la matrice identité: $\sum_{k\in K_e} \underline{\mathbf{D}}_{k,e} = \mathbf{I}$ [257].

2.4.2 Discrétisation du domaine de calcul et notations associées

Types d'éléments

Pour discrétiser les équations précédemment introduites, il est nécessaire de définir un maillage sur lequel les équations seront résolues. Le code de calcul AVBP a la capacité d'utiliser des maillages hybrides, c'est-à-dire des maillages avec des types d'éléments différents. En deux dimensions, il est par exemple possible de combiner des triangles et des quadrilatères. Une illustration des types d'éléments utilisables dans AVBP est donnée en Fig. 2.3.

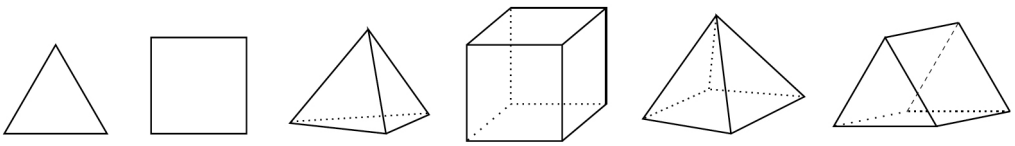


Figure 2.3: Illustration des différents types d'éléments pouvant être utilisés dans AVBP. De gauche à droite : triangle, quadrilatère, tétraèdre, hexaèdre, pyramide, prisme [161].

Définition des normales

Comme il sera décrit par la suite, la résolution des équations nécessite aussi la définition de la normale des vertex de chaque élément. Ces normales sont obtenues à partir des normales aux faces $\vec{S}_f$ de l'élément en question, pointant vers l'extérieur. À noter que les normales sont proportionnelles à l'aire de la face concernée, elles ne sont pas unitaires. En trois dimensions, pour une face triangulaire, la normale est unique mais pour une face quadrangulaire, les 4 sommets de la face sont dans le cas général non coplanaires. Dans ce cas, la face quadrangulaire est divisée en 4 triangles selon ses deux diagonales et la normale $\vec{S}_f$ est définie comme la moyenne des 4 normales des triangles (Fig. 2.4).

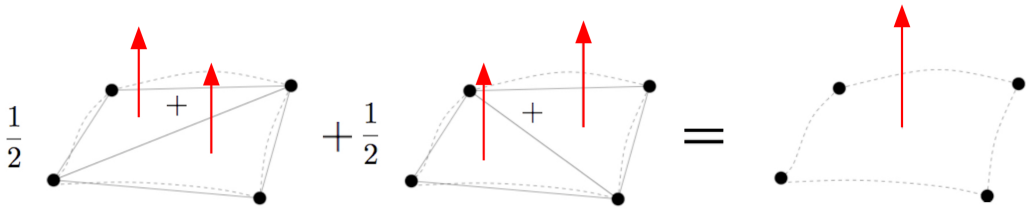
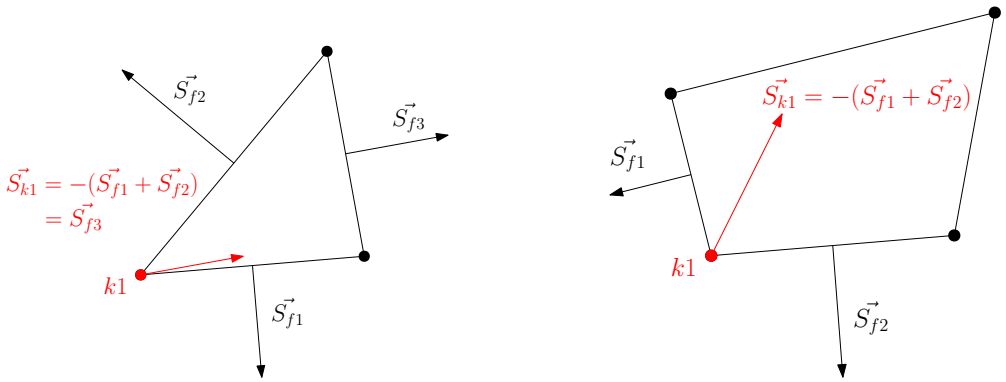


Figure 2.4: Calcul de la normale d'une face quadrangulaire [161].

Une fois les normales aux faces obtenues, la normale $\vec{S_k}$ au vertex k est calculée par sommation des normales aux faces adjacentes à k,

$$\vec{S_k} = \sum_{f \ni k} -\frac{d}{n_v^f} \vec{S}_f, \tag{2.30}$$

avec $\vec{S}_f$ la normale à la face f, n_v^f le nombre de vertex qui compose la face f et d la dimension du domaine. Le signe "-" vient du fait que les normales aux vertex sont choisies comme pointant vers l'intérieur de l'élément. En deux dimensions, deux exemples pour un triangle et un quadrilatère sont donnés en Fig. 2.5. Dans le cas particulier d'un triangle, comme la somme des normales aux faces est nulle, la normale à un vertex correspond à la normale de la face opposée.



(a) Cas d'un triangle.

(b) Cas d'un quadrilatère.

Figure 2.5: Calcul de la normale à un vertex appartenant à un triangle et un quadrilatère quelconque.

À noter que pour assurer la consistance des schémas numériques, la relation suivante doit être vérifiée (ce qui est le cas avec la définition introduite),

$$\sum_{k \in K_e} \vec{S_k} = \vec{0}. \tag{2.31}$$

Définition des volumes

Par ailleurs, le volume des différents éléments jouent aussi un rôle important dans la résolution des équations. Ainsi, le volume V_e d'un élément K_e est défini par,

$$V_e = -\frac{1}{d^2} \sum_{k \in K_e} \vec{x}_k \cdot \vec{S}_k, \tag{2.32}$$

avec $\vec{x}_k$ les coordonnées spatiales du vertex k. À partir des volumes des éléments du voisinage d'un nœud j, son volume de contrôle associé V_j (aussi appelé volume dual) s'exprime comme,

$$V_j = \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \frac{V_e}{n_v^e}, \tag{2.33}$$

avec n_v^e le nombre de vertex de l'élément K_e. Ce volume V_j correspond au volume du domaine $\mathcal{C}_j$ sur le Fig. 2.6.

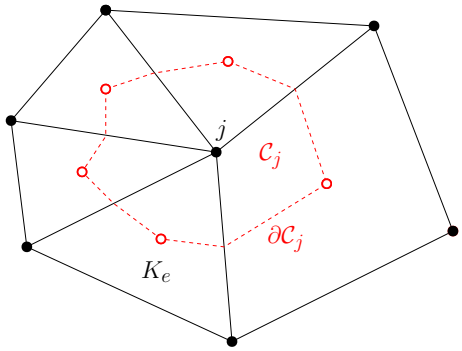


Figure 2.6: Volume de contrôle associé au nœud j.

2.4.3 Les différents schémas de convection du formalisme *cell-vertex*

Cette section s'intéresse uniquement à la discrétisation du terme convectif des équations de Navier-Stokes dans AVBP, *i.e* le terme $\vec{\mathcal{F}}^C$ introduit précédemment à l'aide des schémas LW et TTG.

Schéma Lax-Wendroff (LW)

Le schéma Lax-Wendroff [165, 164] est un schéma numérique qui combine les discrétisations temporelles et spatiales, aussi appelé schéma à discrétisation totale. Initialement introduit par R-H. Ni [194], il a ensuite été adapté au formalisme *cell-vertex* par Hall [121] et détaillé par Crumpton [66]. L'idée principale est d'utiliser l'équation de continuité pour remplacer les dérivées temporelles de premier ordre et second ordre par des dérivées spatiales dans le développement de Taylor à l'ordre 3 du vecteur solution. Le point de départ consiste à écrire un développement de Taylor en temps jusqu'à l'ordre 3 du vecteur solution à l'itération $n+1$, $\mathbf{U}^{n+1}$ autour du vecteur solution à l'itération n, $\mathbf{U}^n$,

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right)^n + O\left(\Delta t^3\right), \tag{2.34}$$

avec Δt le pas de temps.

L'équation de conservation s'exprime comme (dans la suite $\vec{\mathcal{F}}$ fait référence aux flux convectifs, le traitement des termes diffusifs sera abordé plus tard dans le chapitre),

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^n = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}\right)^n, \tag{2.35}$$

et à partir de l'Eq. (2.35), la dérivée d'ordre 2 s'exprime comme,

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right)^n = \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial t}\right)^n. \tag{2.36}$$

En utilisant la matrice Jacobienne des flux définie par,

$$\vec{\mathcal{A}}^n = \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial \mathbf{U}}\right)^n, \tag{2.37}$$

la dérivée temporelle des flux s'écrit,

$$\left(\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial t}\right)^n = \left(\vec{\mathcal{A}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^n. \tag{2.38}$$

En remplaçant la dérivée temporelle des flux, la dérivée d'ordre 2 est égale à,

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right)^n = -\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\mathcal{A}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)\right]^n = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}\right)^n. \tag{2.39}$$

En substituant les termes de premier ordre et second ordre dans l'Eq. (2.34) par les expressions des Eqs. (2.35) et (2.39), le schéma LW dans sa forme non discrétisée s'écrit,

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \Delta t \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}\right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}\right)^n, \tag{2.40}$$

ou sous la forme d'un résidu,

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n. \tag{2.41}$$

Par intégration de l'Eq. (2.41) sur le volume de contrôle $\mathcal{C}_j$ associé au noeud j, la discrétisation spatiale du schéma LW est obtenue,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{V_j} \int_{\mathcal{C}_j} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n \, dV + \frac{\Delta t}{2V_j} \int_{\mathcal{C}_j} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n \, dV, \\
&= -\frac{1}{V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \frac{1}{n_v^e} V_e \mathbf{R}_e^n + \frac{\Delta t}{2V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \int_{\partial(\mathcal{C}_j \cap K_e)} (\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}})^n \cdot \vec{n} \, dS, \\
&= -\frac{1}{V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \frac{1}{n_v^e} V_e \mathbf{R}_e^n + \frac{\Delta t}{2dV_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \left(\vec{\mathcal{A}}_e \mathbf{R}_e\right)^n \cdot \vec{S}_{j,e}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

avec $\vec{\mathcal{A}}_e = \left(\underline{\mathbf{A}}_e, \underline{\mathbf{B}}_e, \underline{\mathbf{C}}_e\right)^T$ où $\underline{\mathbf{A}}_e$, $\underline{\mathbf{B}}_e$ et $\underline{\mathbf{C}}_e$ sont les matrices Jacobiennes des flux convectifs moyennées au sein de la cellule K_e, telles que,

$$\underline{\mathbf{A}}_e = \frac{1}{n_v^e} \sum_{k | k \in K_e} \mathbf{A}_k. \tag{2.43}$$

Au final, pour faire un parallèle avec l'Eq. (2.29), le schéma LW peut s'exprimer avec la matrice $\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{LW}$ comme,

$$\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{LW}} = \frac{1}{n_v^e} \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2dV_e} \vec{\mathcal{A}}_e^n \cdot \vec{S}_{j,e}, \tag{2.44}$$

qui se décompose en une partie centrée et une partie dissipative qui permet de stabiliser le schéma [14]. Le schéma LW a aussi la grande qualité d'être d'ordre 2 en espace et en temps avec un stencil aussi compact (uniquement les plus proches voisins) [74]. Néanmoins, malgré des propriétés intéressantes, certaines caractéristiques ne sont pas suffisantes, notamment sur l'ordre ou le niveau de dissipation, pour permettre de réaliser des LES précises. Ces propriétés seront abordées plus en détails dans le Chapitre 3.

Schémas de la famille Taylor-Galerkin

Les schémas issus de la méthode *cell-vertex* comme le schéma LW présenté précédemment peuvent en fait être apparentés à une classe plus large de schémas numériques appelés schémas à résidus distribués ou *fluctuation splitting*. Initialement introduites par Roe [228], ces méthodes à résidus distribués sont apparues comme une alternative aux schémas décentrés volumes finis classiques. La thèse de Lamarque [161] a mis en évidence les liens très clairs entre les méthodes des éléments finis de Galerkin et de Petrov-Galerkin avec les schémas à résidus distribués.

Dans les deux méthodes, les résidus calculés au sein de chaque cellule du maillage sont distribués aux sommets des cellules par le biais de coefficients qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une matrice de distribution, similaire à la matrice $\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{LW}}$ introduite précédemment pour LW. Historiquement, les schémas à résidus distribués (N, LDA, PSI) [257, 75, 7, 184] sont des schémas décentrés amont alors que les méthodes *cell-vertex* ont été utilisées pour développer des schémas centrés. Néanmoins, dans le cadre d'équations de convection linéaire, les formulations *residual splitting* et *cell-vertex* sont équivalentes [233], ce qui implique qu'un schéma développé pour une méthode est aussi applicable à la seconde. La méthode *residual splitting* a été particulièrement étudiée dans les travaux d'Abgrall et ses collaborateurs [3, 6, 4, 184, 224, 9, 73, 131]. En particulier, plusieurs auteurs font référence au fait que les méthodes de distribution de résidus, et donc les schémas issus du formalisme *cell-vertex* peuvent s'écrire comme une méthode de Galerkin pour les schémas centrés classiques ou comme une méthode de Petrov-Galerkin pour les schémas décentrés [184, 10, 188]. Il est par exemple possible d'obtenir un schéma SUPG (Streamwise Upwind Petrov-Galerkin) [36, 257] et les schémas décentrés LDA et PSI [257, 75, 7, 184] en utilisant les formulations adéquates pour les fonctions tests et les fonctions de forme associées à la méthode Petrov-Galerkin [274, 133].

Dans ce contexte et dans le but de proposer une alternative au schéma LW, une seconde famille de schémas numériques *cell-vertex* a été introduite. Étant donné le lien précédemment mis en évidence avec la méthode *cell-vertex*, leur formulation se base sur les méthodes éléments finis de Galerkin et de Petrov-Galerkin. Cette section présente une introduction brève de ces schémas, sans toute la rigueur mathématique des ouvrages spécialisés sur le sujet (voir par exemple [14] ou [219]).

Introduction au formalisme éléments finis

Afin de présenter le formalisme éléments finis et pour simplifier les expressions, l'équation de convection linéaire à coefficients constants est considérée,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} u = 0, \tag{2.45}$$

avec $\vec{c}$ une vitesse de convection uniforme.

En discrétisant le domaine de calcul Ω par des éléments $\mathbb{P}_1$ (triangles en 2D et tétraèdres en 3D, voir Fig. 2.8), la solution est approximée par,

$$u_h(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_h} U_k(t) \phi_k(\vec{x}), \tag{2.46}$$

avec $\phi_k(\vec{x})$ la fonction de forme associée au nœud k. Dans le cas des éléments $\mathbb{P}_1$, il s'agit de fonctions de forme continues et linéaires, définies par,

$$\begin{cases} \phi_k(\vec{x}) = 1 \text{ si } \vec{x} = \vec{x}_k, \\ \phi_k(\vec{x}) = 0 \text{ si } \vec{x} \neq \vec{x}_k. \end{cases} \tag{2.47}$$

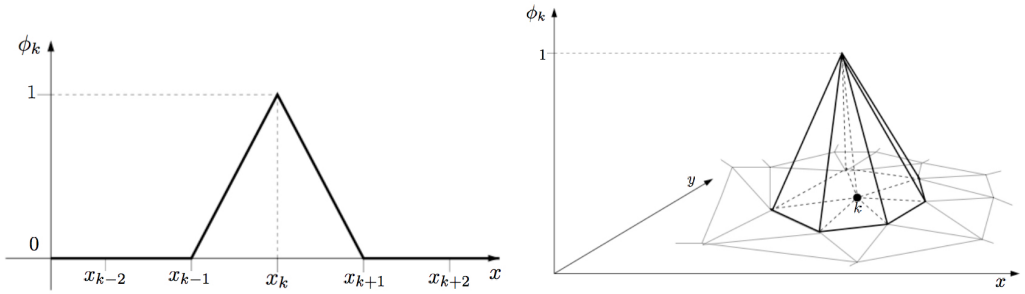


Figure 2.7: Fonctions de forme linéaires pour des éléments $\mathbb{P}_1$ [161]. À gauche la fonction "chapeau" en 1D et à droite une fonction "tente" sur un maillage triangulaire.

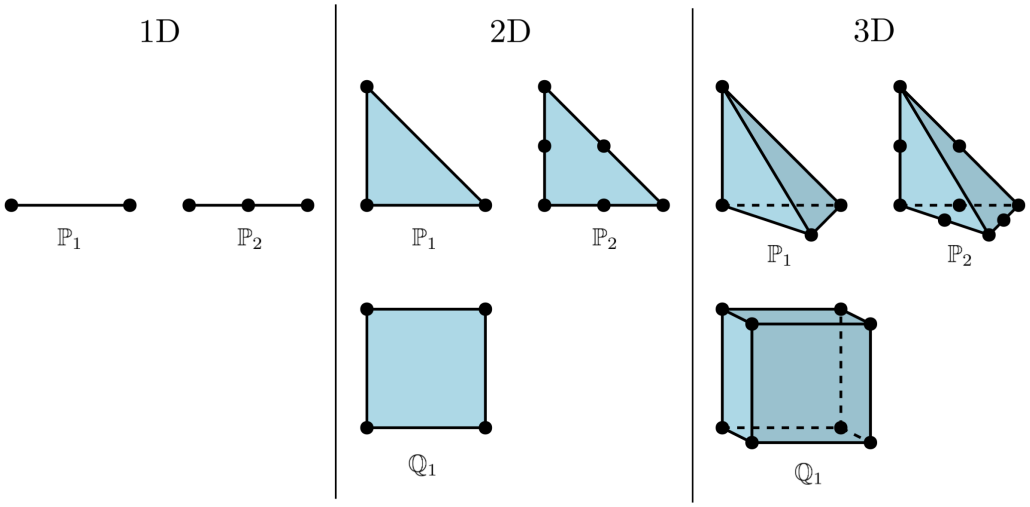


Figure 2.8: Illustration des différents types d'éléments en 1D, 2D et 3D. Les éléments de type $\mathbb{P}_1$ sont associés à des fonctions linéaires, et par extension les éléments de type $\mathbb{P}_2$ sont associés à des fonctions quadratiques. Les éléments de type $\mathbb{Q}_1$ sont associés à des fonctions bilinéaires.

En appliquant la méthode de Petrov-Galerkin, l'Eq. (2.45) revient à trouver u_h dans l'espace des solutions, telle que,

$$\left\langle \frac{\partial u_h}{\partial t} + \vec{c}\cdot\vec{\nabla}u_h \mid \psi_j \right\rangle = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + \vec{c}\cdot\vec{\nabla}u_h \right) \psi_j \, dV = 0 \quad \forall j \in [1, N_h]\,, \tag{2.48}$$

avec ψ_j une fonction test associée au nœud j et $\langle \bullet \rangle$ le produit scalaire adéquat associé à l'espace des solutions.

Si $\psi_j = \phi_j$, la méthode est appelée méthode des éléments finis de Galerkin, alors que si $\psi_j \neq \phi_j$, la méthode s'intitule méthode des éléments finis de Petrov-Galerkin.

En remplaçant u_h par l'expression de l'Eq. (2.46) dans l'Eq. (2.48), cette dernière s'exprime comme,

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{N_h} \frac{dU_k}{dt} \phi_k \psi_j \, dV + \int_\Omega \sum_{k=1}^{N_h} U_k \vec{c}\cdot\vec{\nabla}\phi_k \psi_j \, dV = 0 \quad \forall j \in [1, N_h]\,. \tag{2.49}$$

En utilisant la discrétisation du domaine Ω, l'expression se résume à une sommation sur l'ensemble des éléments du domaine de la forme,

$$\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\int_{K_e}\sum_{k=1}^{N_h}\frac{dU_k}{dt}\phi_k\psi_j\,dV+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\int_{K_e}\sum_{k=1}^{N_h}U_k\vec{c}\cdot\vec{\nabla}\phi_k\psi_j\,dV=0\quad\forall j\in[1,N_h]\,. \tag{2.50}$$

Le support des fonctions de forme ϕ_k étant compacte, l'expression précédente se réécrit en réduisant la sommation sur les vertex de l'intégrale contribuant à l'élément K_e de telle sorte que,

$$\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\frac{dU_k}{dt}\int_{K_e}\phi_k\psi_j\,dV+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}U_k\int_{K_e}\vec{c}\cdot\vec{\nabla}\phi_k\psi_j\,dV=0\quad\forall j\in[1,N_h]\,. \tag{2.51}$$

Pour finir l'Eq. (2.51) peut être reformulée sous forme matricielle par,

$$\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\mathcal{M}^e_{jk}\frac{dU_k}{dt}+\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\vec{c}\cdot\mathcal{K}^e_{jk}U_k=0\quad\forall j\in[1,N_h]\,, \tag{2.52}$$

avec,

$$\mathcal{M}^e_{jk}=\int_{K_e}\phi_k\psi_j\,dV, \tag{2.53}$$

$$\mathcal{K}^e_{jk}=\int_{K_e}\vec{\nabla}\phi_k\psi_j\,dV. \tag{2.54}$$

En tenant compte de la compacité des fonctions de forme ϕ_k et des fonctions tests ψ_j, les termes des matrices précédentes sont nuls pour tout nœud k ne faisant pas partie des plus proches voisins du nœud j. L'Équation (2.52) peut alors s'exprimer sous forme matricielle comme,

$$[\mathcal{M}]\frac{d\{U\}}{dt}+[\mathcal{K}]\{U\}=0, \tag{2.55}$$

avec,

$$\mathcal{M}_{jk}=\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\mathcal{M}^e_{jk}, \tag{2.56}$$

$$\mathcal{K}_{jk}=\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\mathcal{K}^e_{jk}, \tag{2.57}$$

avec l'apparition d'une matrice de masse, le schéma numérique est implicite en espace. Cela signifie que la matrice de masse doit être inversée. Cependant, dans le cas général, la matrice n'est pas inversée exactement. Des méthodes existent pour approximer cette inverse à un coût réduit.

Famille des schémas Two-Step Taylor-Galerkin (TTG)

À partir de cette formulation éléments finis, plusieurs schémas ont été introduits. Le schéma LW éléments finis est une option (LW-FE), combinant la discrétisation LW et le formalisme éléments finis décrit précédemment. Cependant, il souffre d'un domaine de stabilité très réduit, notamment dans le cas d'un problème multidimensionnel [83]. Autre exemple, le schéma à une étape Euler-Taylor-Galerkin (ETG), appelé aussi Lax-Wendroff-Taylor-Galerkin, utilise un développement

en série de Taylor jusqu'à l'ordre 4. Dans ce cas, à la manière de LW, les dérivées temporelles première et seconde sont remplacées par des dérivées spatiales et la dérivée troisième utilise une astuce pour l'intégrer dans la matrice de masse [83, 246]. Cependant, même si le schéma ETG est précis à l'ordre 3 en espace et en temps, il présente plusieurs inconvénients. Premièrement, le terme de la matrice de masse n'est pas constant puisqu'il est modifié par la dérivée troisième et doit donc être recalculé à chaque itération. Deuxièmement, comme pour LW-FE, le domaine de stabilité est aussi réduit pour les problèmes multidimensionnels (même s'il reste plus large que celui de LW-FE) [83].

Les défauts des schémas à une étape tels que ceux décrits précédemment ont encouragé le développement de nouveaux schémas à deux étapes. Ces développement ont débuté par les travaux de Selmin et Quartapelle en présentant le schéma LW-TG à deux étapes [246, 218]. Par la suite, Colin et Rudgyard ont généralisé cette formulation, en décrivant une nouvelle famille de schémas sous la forme prédicteur-correcteur avec six paramètres à fixer [57]. Cette famille spécifique de schémas peut s'écrire sous la forme,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n &= u^n + \alpha\Delta t\frac{\partial u^n}{\partial t} + \beta\Delta t^2\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2}, \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t\left(\theta_1\frac{\partial u^n}{\partial t} + \theta_2\frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial t}\right) + \Delta t^2\left(\epsilon_1\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \epsilon_2\frac{\partial^2 \tilde{u}^n}{\partial t^2}\right). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Deux schémas très intéressants issus de cette famille ont été obtenus : TTG4A [218] et TTGC [57]. Leurs coefficients respectifs sont donnés en Table 2.1. Le schéma TTG4A est d'ordre 3 en espace et en temps en utilisant des fonctions de forme linéaires mais s'avère assez dissipatif, alors que le schéma TTGC, lui aussi d'ordre 3 en espace et en temps, présente un meilleur niveau de dissipation (avec $\gamma = 0.01$) et est plutôt préféré pour la LES. Les détails du choix des coefficients et les propriétés de ces schémas seront analysés dans le Chapitre 3.

Schémas	α	β	θ_1	θ_2	ϵ_1	ϵ_2
LW (1 étape)	0	0	1	0	1/2	0
TTG4A	1/3	1/12	1	0	0	1/2
TTGC (γ)	$1/2-\gamma$	1/6	0	1	γ	0

Table 2.1: Coefficients des schémas TTG.

À noter que d'autres variantes de ces schémas existent, notamment avec les schémas à s étapes de Safjan et Oden [235], qui peuvent atteindre un ordre de précision de $2s$. Ils restent néanmoins plus coûteux et complexes à implémenter.

Le point de départ des schémas de la famille Two-Step Taylor-Galerkin est le même que pour le schéma LW. Il consiste à :

1. Écrire un développement de Taylor à l'ordre 3 du vecteur solution pour les deux étapes de prédicteur-correcteur.
2. Remplacer les dérivées temporelles par les dérivées spatiales grâce à l'équation de conservation.

Ainsi, les schémas TTG s'écrivent sous la forme générale,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^n &= \mathbf{U}^n - \alpha\Delta t\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}^n + \beta\Delta t^2\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}^n\right), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n - \Delta t\vec{\nabla}\cdot\left(\theta_1\vec{\mathcal{F}}^n + \theta_2\vec{\tilde{\mathcal{F}}}^n\right) + \Delta t^2\left[\epsilon_1\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}^n\right) + \epsilon_2\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\tilde{\mathcal{A}}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{\mathcal{F}}}^n\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.59}$$

À la différence du schéma LW qui se sert du formalisme volumes finis pour la discrétisation en espace, les schémas de la famille Taylor-Galerkin utilisent la méthode éléments finis de Galerkin ($\psi_i = \phi_i$) pour discrétiser l'Eq. (2.59).

Dans AVBP, comme dans beaucoup d'autres codes, l'approximation du produit des variables est faite, c'est-à-dire que les flux sont approximés avec les mêmes fonctions de forme que le vecteur solution,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_h(\vec{x},t) &= \sum_{k=1}^{N_h} \vec{\mathcal{F}}_k(t)\phi_k(\vec{x}), \\ \mathbf{U}_h(\vec{x},t) &= \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{U}_k(t)\phi_k(\vec{x}). \end{aligned} \tag{2.60}$$

En appliquant la méthode de Galerkin à l'Eq. (2.59), la formulation faible du problème est obtenue pour chaque nœud j en multipliant par la fonction test ϕ_j et en intégrant sur le domaine Ω,

$$\begin{aligned} \mathbf{MU}_j(\tilde{\mathbf{U}}_h^n - \mathbf{U}_h^n) &= \int_\Omega (\tilde{\mathbf{U}}_h^n - \mathbf{U}_h^n)\phi_j dV = -\alpha\Delta t \mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \beta\Delta t^2 \mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right), \\ \mathbf{MU}_j(\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n) &= \int_\Omega (\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n)\phi_j dV = -\Delta t\left(\theta_1 \mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \theta_2 \mathbf{L}_j\left(\tilde{\mathbf{U}}_h^n\right)\right) \\ &\qquad + \Delta t^2\left(\varepsilon_1 \mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \varepsilon_2 \mathbf{LL}_j\left(\tilde{\mathbf{U}}_h^n\right)\right), \end{aligned} \tag{2.61}$$

avec les opérateurs $\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$, $\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ et $\mathbf{MU}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ qui s'expriment comme,

$$\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = \int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h^n \phi_j \, dV, \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) &= \int_\Omega \phi_j \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h\right)^n dV, \\ &= \oint_{\partial\Omega} \phi_j \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h\right)^n \cdot \vec{n}\, dS - \int_\Omega \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h\right)^n \cdot \vec{\nabla}\phi_j \, dV, \quad \text{(IPP)} \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\mathbf{MU}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = \int_\Omega \mathbf{U}_h^n \phi_j \, dV. \tag{2.64}$$

À noter que l'intégration par parties (IPP) du terme $\mathbf{LL}_j$ est essentielle pour remplacer la dérivée seconde par des dérivées premières, permettant ainsi d'utiliser des éléments linéaires. Grâce à l'approximation des produits de variables supposant la même fonction de forme pour les flux et le vecteur solution donnée par l'Eq. (2.60), les termes (2.62) et (2.63) sont exprimés après discrétisation du domaine Ω par un double sommation comme,

$$\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e} \vec{\mathcal{F}}_k^n \cdot \int_{K_e} \vec{\nabla}\phi_k\phi_j \, dV, \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) &= \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \vec{\mathcal{A}}_e^n \cdot \sum_{k\in K_e} \int_{\partial K_e\cap\partial\Omega} \left(\vec{\mathcal{F}}_k^n\cdot\vec{\nabla}\phi_k\right)\phi_j\vec{n}\, dS \\ &\quad - \sum_{e\in\mathcal{T}_h} \vec{\mathcal{A}}_e^n \cdot \sum_{k\in K_e} \int_{K_e} \left(\vec{\mathcal{F}}_k^n\cdot\vec{\nabla}\phi_k\right)\vec{\nabla}\phi_j \, dV. \end{aligned} \tag{2.66}$$

En utilisant les expressions (2.65) et (2.66), le système (2.61) s'exprime alors sous forme matricielle et discrétisée comme,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(\tilde{\mathbf{U}}_h^n - \mathbf{U}_h^n\right) &= -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}_h^n\right), \\
\mathbf{M}\left(\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n\right) &= -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}_h^n\right)\right) \\
&\quad + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \epsilon_2\mathbf{LL}\left(\tilde{\mathbf{U}}_h^n\right)\right),
\end{aligned} \tag{2.67}$$

avec $\mathbf{M}$ la matrice de masse dont les termes s'écrivent,

$$\mathbf{M}_{jk} = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\int_{K_e}\phi_k\phi_j\, dV. \tag{2.68}$$

Comme mentionné dans la Section 2.4.3, l'inversion de la matrice de masse est une étape importante pour cette famille de schémas et il en résulte des propriétés intéressantes directement dues au fait qu'ils sont écrits de manière implicite par ce biais. Cependant, l'inversion exacte de la matrice de masse est une opération qui se révèle très coûteuse à la fois en temps de calcul et en mémoire. La matrice de masse étant définie positive et à diagonale dominante, il est toutefois possible d'approximer son inverse par la méthode de Jacobi. Les travaux de Colin et Rudgyard ont montré que deux itérations de la méthode de Jacobi suffisent pour obtenir de très bons résultats pour le schéma TTGC [57]. L'impact du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi est étudié plus en détails dans l'Annexe B.1.2.

Dans AVBP, le calcul des termes $\mathbf{L}$ et $\mathbf{LL}$ se fait de façons différentes en fonction du type d'élément utilisé.

a) Pour des éléments linéaires (éléments $\mathbb{P}_1$, voir Fig. 2.8), le calcul de $\mathbf{L}$ est identique au premier terme de l'Eq. (2.42) pour le schéma LW en volumes finis, *i.e.*,

$$\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = -\frac{1}{V_j}\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\frac{1}{n_v^e}V_e\mathbf{R}_e^n. \tag{2.69}$$

Pour $\mathbf{LL}$, en omettant le terme de bord (donc pour un nœud au centre du domaine), l'Eq. (2.66) peut s'exprimer comme,

$$\begin{aligned}
\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) &= -\sum_{e\in\mathcal{T}_h}\vec{\mathcal{A}}_e^n\cdot\sum_{k\in K_e}\int_{K_e}\left(\vec{\mathcal{F}}_k^n\cdot\vec{\nabla}\phi_k\right)\vec{\nabla}\phi_j\, dV, \\
&= -\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\vec{\mathcal{A}}_e^n\cdot\int_{K_e}\vec{\nabla}\phi_j dV\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k^n\cdot\vec{\nabla}\phi_k\right), \\
&= \frac{1}{d}\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\left(\vec{\mathcal{A}}_e\mathbf{R}_e\right)^n\cdot\vec{S}_e,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

puisqu'en utilisant la définition des fonctions de formes linéaires, $\int_{K_e}\vec{\nabla}\phi_j dV = \vec{S}_e$. Le cas particulier du traitement des termes de bord nécessite toutefois d'être abordé, ce qui est reporté dans l'Annexe A.

Dans le cas des éléments linéaires et avec une forme semi-discrète comme celle présentée par l'Eq. (2.29), *i.e.* avec un avancement en temps parfait, le résidu au nœud j pour les schémas TTG peut alors s'écrire,

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{M}_{jk}\frac{d\tilde{\mathbf{U}}_j}{dt} &= \sum_k \mathbf{M}_{jk}\tilde{\mathbf{R}}_j = -\frac{1}{V_j}\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,1S}}V_e\mathbf{R}_e,\\ \sum_k \mathbf{M}_{jk}\frac{d\mathbf{U}_j}{dt} &= \sum_k \mathbf{M}_{jk}\mathbf{R}_j = -\frac{1}{V_j}\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\left(\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}}V_e\mathbf{R}_e + \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}}V_e\tilde{\mathbf{R}}_e\right),\end{aligned} \tag{2.71}$$

où $\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,1S}}$, $\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}}$ et $\tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}}$ correspondent aux matrices de distribution définies par,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,1S}} &= \frac{\alpha}{n_v^e}\mathbf{I} - \frac{\beta\Delta t}{dV_e}\vec{\mathcal{A}}_e^n\cdot\vec{S}_{j,e},\\ \underline{\mathbf{D}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}} &= \frac{\theta_1}{n_v^e}\mathbf{I} - \frac{\epsilon_1\Delta t}{dV_e}\vec{\mathcal{A}}_e^n\cdot\vec{S}_{j,e},\\ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_{j,e}^{\mathrm{TTG,2S}} &= \frac{\theta_2}{n_v^e}\mathbf{I} - \frac{\epsilon_2\Delta t}{dV_e}\vec{\tilde{\mathcal{A}}}_e^n\cdot\vec{S}_{j,e}.\end{aligned} \tag{2.72}$$

b) Dans le cas des éléments bilinéaires (éléments $\mathbb{Q}_1$, voir Fig. 2.8), étant donné que les gradients des fonctions de forme ne sont plus constants dans chaque cellule, les simplifications faites pour les éléments linéaires ne sont plus possibles. Pour calculer les intégrales précédentes de manière exacte, il est néanmoins possible d'utiliser des formules de quadrature. Cela entraine un coût assez important et pour cette raison, une alternative a été utilisée dans AVBP par Colin et Rudgyard [57]. La méthode consiste à ajouter à l'intégrale obtenue pour les éléments linéaires deux termes de correction, $\delta\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ et $\delta\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$, qui servent à prendre en compte le caractère bilinéaire de l'élément considéré. Le calcul des termes $\mathbf{L}$ et $\mathbf{LL}$ peut s'écrire alors simplement,

$$\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = \mathbf{L}_j^{\mathrm{linear}}\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \delta\mathbf{L}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right), \tag{2.73}$$

$$\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) = \mathbf{LL}_j^{\mathrm{linear}}\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \delta\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right), \tag{2.74}$$

avec $\mathbf{L}_j^{\mathrm{linear}}\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ et $\mathbf{LL}_j^{\mathrm{linear}}\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ les termes obtenus pour un élément linéaire, *i.e.* obtenus à partir des Eqs. (2.69) et (2.70). Le détail de la manipulation est décrit dans [57]. L'approximation permet d'obtenir une intégration exacte pour des éléments réguliers et l'erreur reste faible pour des éléments irréguliers, tout en permettant une réduction de coût importante par rapport à une intégration exacte.

2.4.4 Résolution des termes diffusifs

Cette section s'intéresse à la discrétisation des termes diffusifs dans AVBP, *i.e.* le terme $\vec{\mathcal{F}}^V$. Contrairement au flux convectif obtenu à partir d'un schéma *cell-vertex*, le flux diffusif est calculé avec un formalisme *vertex-centered*. Pour cet opérateur appelé 2Δ, le calcul de la divergence des flux est fait dans le volume de contrôle associé au nœud j avec une méthode proche de la méthode des éléments finis de Galerkin [55]. Pour éviter la formulation assez lourde lorsqu'elle est appliquée de manière exacte, une autre méthodologie permettant d'obtenir des résultats similaires est utilisée [55]. Elle s'exprime comme (par intégration par parties et pour un nœud au centre du domaine),

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}^V\Big|_j \approx \frac{1}{V_j}\int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h^V\phi_j dV = -\frac{1}{V_j}\int_\Omega \vec{\mathcal{F}}_h^V\cdot\vec{\nabla}\phi_j\, dV, \\ = \frac{1}{V_j}\int_{\partial\mathcal{C}_j}\vec{\mathcal{F}}_h^V\cdot\vec{n}\, dS, \tag{2.75}$$

ce qui revient à calculer une divergence des flux sur le volume de contrôle associé au nœud j. Comme pour le terme convectif, la discrétisation de l'équation précédente est réalisée grâce une sommation sur les éléments contenant le nœud j,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}^V\Big|_j = \frac{1}{dV_j}\sum_{e\in\mathcal{D}_j}\vec{\mathcal{F}}_{j,e}^V\cdot\vec{S}_{j,e}, \tag{2.76}$$

avec $\vec{S}_{j,e}$ la normale au nœud j dans l'élément K_e. La définition du terme $\vec{\mathcal{F}}^V$ varie en fonction du type d'éléments, linéaires ou non linéaires. Dans le cas d'éléments linéaires, les gradients sont constants dans chaque cellule, d'où,

$$\vec{\mathcal{F}}_{j,e}^V = \vec{\mathcal{F}}_e^V = \vec{\mathcal{F}}^V\left((\vec{\nabla}\mathbf{U})_e\right). \tag{2.77}$$

Pour les éléments non linéaires, une méthodologie identique à celle présentée pour les schémas Taylor-Galerkin est utilisée. C'est-à-dire en calculant l'intégrale comme dans le cas linéaire, puis en ajoutant un terme de correction pour tenir compte du caractère non linéaire des éléments [57],

$$\vec{\mathcal{F}}_{j,e}^V = \vec{\mathcal{F}}^V\left((\vec{\nabla}\mathbf{U})_{j,e}\right) + \vec{\mathcal{F}}^V\left((\delta\vec{\nabla}\mathbf{U})_{j,e}\right). \tag{2.78}$$

Étant donné la taille du stencil du schéma, qui est de 2Δ puisqu'il ne fait intervenir que les cellules adjacentes au nœud j, il est capable de dissiper les petites échelles de la turbulence, ce qui est un comportement physique attendu pour réaliser des simulations turbulentes [55]. C'est cet opérateur qui est utilisé dans les calculs LES présentés dans cette thèse.

2.4.5 Viscosité artificielle

Les opérateurs de convection disponibles dans AVBP sont centrés en espace et ont été développés pour être peu dissipatifs en accord avec les contraintes de la LES. Par ailleurs, lors du transport de grandeurs avec des forts gradients, ils sont sujets à l'apparition d'oscillations numériques ou *wiggles* (phénomène de Gibbs). Pour des nombres de Reynolds élevés (ce qui est souvent le cas pour des configurations académiques et toujours le cas pour des applications turbomachines), les opérateurs de diffusion ne sont pas suffisants pour atténuer ces oscillations. Or, ces oscillations peuvent nuire à la stabilité numérique des simulations, en particulier en générant des pressions ou des fractions massiques négatives qui entrainent inévitablement la divergence du calcul. Pour résoudre ce problème, plusieurs options sont possibles. L'une d'entre elles, adoptée dans AVBP, consiste à utiliser des opérateurs de diffusion artificielle pour lisser les forts gradients et donc empêcher l'apparition de *wiggles*.

Les travaux de Jameson, Schmidt et Turkel [142] ont permis de développer un modèle de viscosité artificielle, défini comme une combinaison linéaire d'opérateurs de viscosité (ordre 2) et d'hyperviscosité (ordre 4), pour agir fortement au niveau des zones de forts gradients tout en préservant la précision de la solution loin de ces derniers. Par la suite, ces opérateurs ont été adaptés au formalisme *cell-vertex* [187, 54] et sont disponibles dans AVBP. En pratique, les opérateurs de viscosité sont directement ajoutés à l'Eq. (2.79) lors de la mise à jour des valeurs aux nœuds,

$$\frac{d\mathbf{U}_j}{dt} = \mathbf{R}_j + \mathbf{D}_j^{(2*)} + \mathbf{D}_j^{(4*)}, \tag{2.79}$$

avec $\mathbf{D}_j^{(2*)}$ et $\mathbf{D}_j^{(4*)}$ la valeurs des opérateurs de viscosité d'ordre 2 et 4 respectivement et calculés à partir des opérateurs $\mathbf{D}_j^{(2)}$ et $\mathbf{D}_j^{(4)}$ dont les expressions sont détaillées juste après.

Viscosité artificielle de deuxième ordre

Pour ajouter de la dissipation supplémentaire aux équations simulées, l'opérateur de viscosité artificielle d'ordre 2 utilise un pseudo-Laplacien [65], avec l'expression suivante pour un nœud j,

$$\mathbf{D}_j^{(2)} = \frac{1}{V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} -\frac{\epsilon^{(2)} \zeta_e V_e}{n_v^e \Delta t} \left(\overline{\mathbf{U}}_e - \mathbf{U}_j \right), \tag{2.80}$$

avec $\overline{\mathbf{U}}_e$ le vecteur contenant la moyenne des grandeurs conservatives dans l'élément e, c'est-à-dire $\overline{\mathbf{U}}_e = \frac{1}{n_v^e} \sum_{k \in K_e} \mathbf{U}_k$.

Dans cette expression, deux termes sont à expliciter. La valeur du paramètre $\epsilon^{(2)}$ est fournit par l'utilisateur et est directement proportionnelle à la quantité de viscosité artificielle ajoutée au calcul. ζ_e est un senseur dont le but premier est de détecter les régions avec de forts gradients pour appliquer de la viscosité artificielle seulement où c'est nécessaire. Sa valeur est comprise entre 0 et 1 et il est évalué à l'aide des grandeurs locales de l'écoulement pour détecter des non linéarités dans la solution.

Pour obtenir ce senseur ζ_e, deux options sont disponibles dans AVBP :

- le senseur de Jameson [142] qui est peu adapté à la LES puisqu'il a tendance à dissiper les petites échelles de la turbulence mais peut par exemple être utilisé lors de l'initialisation d'un calcul,
- le senseur de Colin [54] qui résout les problèmes du senseur de Jameson et qui est plus approprié pour les écoulements turbulents, instationnaires et réactifs.

Viscosité artificielle de quatrième ordre

L'objectif de l'opérateur d'hyperdiffusion est de supprimer les oscillations à damiers (oscillations nœud à nœud). À l'inverse de l'opérateur d'ordre 2, l'opérateur d'ordre 4 est activé dans l'ensemble du domaine, à l'exception des régions où l'opérateur d'ordre 2 est déjà actif. Son expression est la suivante,

$$\mathbf{D}_j^{(4)} = \frac{1}{V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \frac{\epsilon_e^{(4*)} V_e}{n_v^e \Delta t} \left[\left(\frac{1}{n_v^e} \sum_{k \in K_e} \vec{\nabla} \mathbf{U}_k \right) \cdot (\vec{x}_e - \vec{x}_j) - (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_j) \right]. \tag{2.81}$$

Dans l'équation précédente (et plus généralement pour l'ensemble des gradients utilisés dans AVBP), le gradient nodal $\vec{\nabla}\mathbf{U}_k$ associé au nœud k est calculé de la manière suivante. Le calcul du gradient se fait dans un premier temps au centre de chaque cellule,

$$(\vec{\nabla}\mathbf{U})_e = -\frac{1}{dV_e} \sum_{k \in K_e} \mathbf{U}_k \vec{S}_k. \tag{2.82}$$

Puis, une fois le gradient à la cellule calculé, le gradient au nœud j est reconstruit via un opérateur de moyenne, aussi appelé opération de *scatter*, telle que,

$$(\vec{\nabla}\mathbf{U})_j = \frac{1}{V_j} \sum_{e \in \mathcal{D}_j} \frac{V_e}{n_v^e} (\vec{\nabla}\mathbf{U})_e. \tag{2.83}$$

Comme l'opérateur d'hyperdiffusion agit partout, il n'y a pas de terme similaire à ζ_e pour déclencher l'opérateur dans certaines régions. De la même manière que pour l'opérateur d'ordre 2, la paramètre $\epsilon_e^{(4*)}$ permet de contrôler la quantité de viscosité artificielle ajoutée à la simulation. Son calcul est un peu différent pour supprimer la viscosité d'ordre 4 dans les régions où celle d'ordre 2 est active,

$$\epsilon_e^{(4*)} = \max\left(0, \epsilon^{(4)} - \zeta_e \epsilon^{(2)}\right), \tag{2.84}$$

avec $\epsilon^{(4)}$ la valeur fixée par l'utilisateur.

Tenseurs de viscosité artificielle

Les deux sections précédentes avaient pour but de décrire le calcul de $\mathbf{D}_j^{(2)}$ et $\mathbf{D}_j^{(4)}$. Il faut maintenant expliquer comment calculer $\mathbf{D}_j^{(2*)}$ et $\mathbf{D}_j^{(4*)}$ qui seront ajoutés aux résidus nodaux. En 2D, le vecteur $\mathbf{U}$ qui apparaît dans les expressions précédentes contient les grandeurs conservatives et s'écrit $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$. Différents modèles sont possibles pour obtenir les valeurs finales de viscosité artificielle :

- Le modèle de Jameson utilise le senseur de Jameson sur le champ de pression pour déterminer ζ_e. Ensuite, les opérateurs de viscosité sont appliqués sur toutes les grandeurs conservatives, *i.e.* $\mathbf{D}_j^{(2*)} = \mathbf{D}_j^{(2)}$ et $\mathbf{D}_j^{(4*)} = \mathbf{D}_j^{(4)}$.
- Le modèle de Colin utilise le senseur de Colin sur le champ d'énergie totale pour déterminer ζ_e. L'opérateur d'ordre 2 est appliqué sur toutes les grandeurs conservatives, *i.e.* $\mathbf{D}_j^{(2*)} = \mathbf{D}_j^{(2)}$, mais l'opérateur d'ordre 4 n'est pas appliqué aux équations de quantité de mouvement pour ne pas dissiper les petites structures de la turbulence, d'où,

$$\mathbf{D}_j^{(4*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{D}_j^{(4)}. \tag{2.85}$$

- Une variante du modèle de Colin remplace la valeur nulle de l'opérateur d'ordre 4 sur la quantité de mouvement par $\epsilon_e^{(4*)}/10$. Cette modification est apportée pour empêcher l'apparition d'oscillations sur des simulations avec des maillages très irréguliers.

2.4.6 Discrétisation temporelle

Contrairement à d'autres méthodes, la méthode de Lax-Wendroff est une méthode à discrétisation totale, basée sur développement en série de Taylor en temps. Ainsi, elle ne nécessite pas de schéma temporel à proprement parler, comme un schéma Runge-Kutta par exemple [128]. Comme décrit précédemment, l'avancement en temps se fait simplement à partir du résidu obtenu. Pour le schéma LW, il correspond à,

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_j. \tag{2.86}$$

Pour les schémas TTG, l'avancement se fait en deux étapes après inversion de la matrice de masse,

$$\begin{cases} \sum_k \mathbf{M}_{jk} \left(\dfrac{\tilde{\mathbf{U}}_j^n - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} \right) = \tilde{\mathbf{R}}_j \text{ (prediction)}, \\ \sum_k \mathbf{M}_{jk} \left(\dfrac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} \right) = \mathbf{R}_j \text{ (correction)}. \end{cases} \tag{2.87}$$

La première conséquence d'une discrétisation en temps et qui est capitale dans une simulation instationnaire est le calcul du pas de temps Δt. Ce choix a un impact sur la précision du calcul et sa stabilité mais également sur son coût. Pour éviter à l'utilisateur de faire des erreurs, le pas de temps est en général déterminé à partir de deux nombres, le nombre CFL et le nombre de Fourier.

Nombre CFL

Le nombre CFL (pour Courant-Friedrichs-Lewy), noté ν, permet d'assurer la stabilité de la partie convective du schéma numérique [63]. Il s'écrit,

$$\nu = \frac{(a_0 + c)\Delta t}{\Delta x}, \tag{2.88}$$

et fait apparaître la vitesse du son a_0, la vitesse de convection c, le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx. À partir de ce nombre, la condition de stabilité se définit simplement par,

$$\nu \leq \nu_c, \tag{2.89}$$

avec ν_c le CFL critique du schéma numérique considéré.

Dans un calcul à plusieurs dimensions, la détermination du pas de temps est un peu plus complexe [161]. Dans AVBP, il est d'abord déterminé au sein de chaque cellule K_e par,

$$\Delta t_e^C = \nu \frac{V_e}{\sqrt{\sum_{k \in K_e} \left(\lambda_k^{(max)} \right)^2}}, \tag{2.90}$$

avec $\lambda_k^{(max)}$ le rayon spectral de la matrice, $\frac{1}{d}\vec{\mathcal{A}}_e \cdot \vec{S}_k$.

Puisque la mise à jour se fait aux nœuds, le pas de temps nodal est déterminé à partir des éléments voisins comme,

$$\Delta t^C = \min_{e \in \mathcal{T}_h} \left(\Delta t_e^C \right). \tag{2.91}$$

Nombre de Fourier

Le nombre de Fourier garantit la stabilité de la partie diffusive du schéma numérique [187]. En une dimension, il s'écrit,

$$F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}, \tag{2.92}$$

avec D le coefficient de diffusion. De la même manière que pour le CFL, la condition de stabilité se définit par,

$$F \leq F_c, \tag{2.93}$$

avec F_c le nombre de Fourier critique du schéma numérique.

Dans un cas à 2 ou 3 dimensions, dans AVBP, le pas de temps est encore une fois déterminé dans chaque cellule par,

$$\Delta t_e^V = \frac{F\Delta^2}{D}, \tag{2.94}$$

avec Δ^2 une longueur de référence qui s'exprime comme,

$$\Delta^2 = \frac{2V_e}{\frac{1}{d^2}\sum_{k\in K_e} S_k^2}. \tag{2.95}$$

Le pas de temps aux nœuds s'exprime alors grâce aux pas de temps des éléments voisins,

$$\Delta t^V = \min_{e\in\mathcal{T}_h}\left(\Delta t_e^V\right). \tag{2.96}$$

Au final, le pas de temps effectivement utilisé dans la simulation correspond au plus restrictif des deux pas de temps obtenus par les nombres CFL et de Fourier, comme le montre l'Eq. (2.97),

$$\Delta t = \min\left(\Delta t^C, \Delta t^V\right). \tag{2.97}$$

À noter qu'en général, la condition CFL est plus contraignante que celle de Fourier.

2.4.7 Conditions limites

D'un point de vue mathématique, avec les méthodes numériques précédemment décrites, les équations résolues ne sont pas fermées. L'imposition de conditions limites (CL) est nécessaire pour permettre cette fermeture. Le choix des CL n'est pas à négliger puisqu'il aura un impact direct sur l'écoulement mais aussi sur la stabilité numérique de la simulation. Les possibilités sont nombreuses pour imposer différentes grandeurs de l'écoulement au niveau des CL. Néanmoins, il est possible de distinguer deux types de conditions limites :

- **Conditions limites physiques.** Pour ce type de CL, les grandeurs de l'écoulement sont directement imposées par rapport à une valeur cible, soit sur la variable physique en elle-même pour les CL de type Dirichlet, soit sur ses dérivées spatiales pour les CL dites de Neumann. Cependant, dans le cas de la LES, le choix du type de CL est sujet à des difficultés supplémentaires. Dans le cas des conditions limites physiques qui sont une manière forte d'imposer des grandeurs aux bords, des ondes acoustiques générées physiquement par l'écoulement ou numériquement par le schéma numérique ou des irrégularités de maillage peuvent rester piégées dans le domaine [276]. Ainsi, dans une LES, les CL utilisées doivent être capables de relaxer les grandeurs imposées pour évacuer les ondes du domaine sans réflexion, au risque d'entrainer la divergence de la simulation.

- **Conditions limites caractéristiques.** Pour tenir compte de l'interaction entre les CL et les ondes du domaine, les conditions limites caractéristiques ont été développées. En premier pour les équations d'Euler par Thompson [265], puis étendues aux équations de Navier-Stokes par Poinsot et Lele [208]. Le principe de base repose sur un équilibre entre les ondes sortantes provenant du domaine et les ondes entrantes. Les ondes sortantes sont calculées à partir des grandeurs physiques à l'intérieur du domaine alors que les ondes entrantes sont déterminées à partir des grandeurs aux bords imposées par l'utilisateur. La transformation des ondes entrantes et sortantes en grandeurs physiques est ensuite assurée par un produit avec des matrices définies par la méthode. Les systèmes d'équations associés sont donnés dans [208, 294] ou dans [214], qui présente une meilleure estimation de l'amplitude des ondes dans le cas des équations de Navier-Stokes en trois dimensions.

À noter que certains schémas numériques comme ceux présentés dans la Section 2.4.3 nécessitent aussi de connaître les dérivées d'ordre plus élevées pour permettre la fermeture du système d'équations. Cette problématique est abordée plus en détails dans la Section A.3.

2.5 Couplage multi-composants : méthode MISCOG

Jusqu'à maintenant, les détails numériques présentés dans ce chapitre ont décrit les différents éléments qui permettent de réaliser une simulation LES en garantissant une stabilité et une précision suffisante. Pour le moment, il n'a été question que d'un domaine unique, statique et isolé, sans échange avec d'autres domaines. Néanmoins, une turbomachine comporte des composants fixes et mobiles. Ainsi, pour réaliser une simulation intégrée avec plusieurs composants, il est nécessaire d'être capable de coupler plusieurs domaines en mouvement l'un par rapport à l'autre. À cause de ce mouvement relatif, des nœuds non conformes vont apparaître à l'interface entre les domaines. C'est la situation qui est visible sur la Fig. 2.9. Le domaine bleu s'est déplacé par rapport au domaine rouge et il est donc indispensable d'utiliser une méthode capable d'échanger des grandeurs entre les domaines malgré la non-conformité des nœuds.

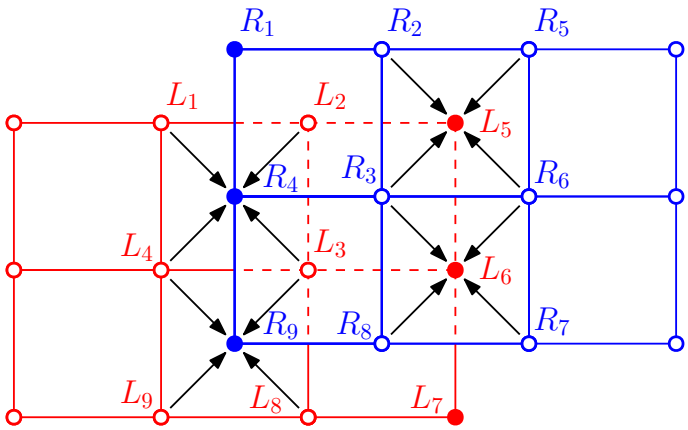


Figure 2.9: Illustration de l'interpolation des grandeurs conservatives sur un nœud récepteur à partir de nœuds émetteurs.

Plusieurs approches sont possibles pour permettre ce couplage :

- La première option consisterait à coupler les flux aux interfaces pour permettre le calcul du résidu de chaque élément et donc obtenir les résidus aux nœuds avec l'Eq. (2.29). Ce type d'approche est couramment appelé *sliding mesh* dans la littérature [220]. Dans le cas d'un couplage avec un sous-domaine tournant, cette option introduit des difficultés supplémentaires notamment pour retirer la composante liée à la rotation dans le calcul des flux. Ceci entraine un coût de calcul supplémentaire, en particulier si un schéma à 2 étapes est utilisé et l'option n'a donc pas été retenue.

- Une deuxième possibilité est de coupler directement les résidus aux nœuds en reconstruisant le résidu d'un nœud frontière grâce à la contribution des sous-domaines à l'interface par interpolation. Malheureusement, ce type de schéma s'est révélé instable pour coupler un domaine en rotation avec un domaine statique [202].

- La troisième option, celle retenue, consiste à échanger directement les grandeurs conservatives en les interpolant entre les sous-domaines au niveau d'une région de superposition. Cette méthode est détaillée par la suite.

La Figure 2.9 permet d'illustrer la méthode retenue. Dans la configuration présentée, les nœuds L_5, L_6 et L_7 du domaine rouge et les nœuds R_1, R_4 et R_9 du domaine bleu sont situés sur le bord de leur domaine respectif. Ainsi, lors du calcul du résidu de chacun des nœuds cités, la valeur obtenue pour le résidu est faussée à cause de l'absence de condition limite, ce qui génère une valeur erronée des grandeurs conservatives pour ces nœuds. La région de superposition entre les sous-domaines permet de corriger ce problème. Par exemple, les grandeurs conservatives du nœud R_4 sont obtenues en interpolant les grandeurs conservatives provenant des vertex de la cellule L_{1234}. Il en est de même pour les autres nœuds cités. L'interpolation est faite par une interpolation d'Hermite avec des éléments $\mathbb{P}_2$ (Fig. 2.8) pour obtenir une approximation d'ordre 3, compatible avec l'ordre des schémas numériques utilisés. La formulation utilisée pour les triangles en 2D est décrite dans [99] et dans [71] pour les tétraèdres en 3D. Plus généralement, l'approximation $\mathfrak{L}f$ de la fonction f à interpoler à un nœud donné s'exprime comme,

$$\mathfrak{L}f = \sum_{i=1}^{n_{sh}} f\left(q_i\right)\phi_i, \tag{2.98}$$

avec $f\left(q_i\right)$ la valeur de la fonction f au vertex q_i de l'élément $\mathbb{P}_2$, n_{sh} le nombre de degrés de liberté de l'élément $\mathbb{P}_2$ (6 pour un triangle et 10 pour un tétraèdre, voir Fig. 2.8) et ϕ_i les fonctions de forme associées à chaque vertex.

Les valeurs aux centres des arêtes sont calculées avec une formulation d'Hermite en 1D. Par exemple, en 3D, la valeur de f au point q_5 situé au centre de l'arête entre q_1 et q_2 est obtenue par,

$$f\left(q_5\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(q_1\right) + f\left(q_2\right)\right) + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{3}\left(x_{i,1} - x_{i,2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(q_1\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(q_2\right)\right), \tag{2.99}$$

avec $\partial f/\partial x_i$ correspondant aux gradients des grandeurs conservatives, calculés comme pour l'ensemble des routines d'AVBP, avec les Eqs. (2.82) et (2.83), et $x_{i,1}$ et $x_{i,1}$ les coordonnées des vertex q_1 et q_2 respectivement.

Cette approche, nommée MISCOG pour *Multi Instance Solver Coupled through Overlapping Grids*, peut être implémentée en couplant les deux domaines grâce à une librairie externe. Par ailleurs, elle permet d'obtenir un ordre de convergence élevée si l'interpolation utilisée est aussi d'ordre élevé [80, 273, 251, 167]. En pratique, plusieurs instances du même code AVBP avec leur domaine propre sont couplées grâce à la librairie CWIPI avec chacune un nombre de processeurs alloué [222, 87]. MISCOG a été validée sur plusieurs configurations par le passé [282, 71] et des analyses supplémentaires de cette méthode seront menées dans cette thèse, notamment dans le Chapitre 4 introduisant la notion de pas de temps local grâce à MISCOG.

D'un point de vue algorithmique, la méthode MISCOG se décompose en 5 étapes principales :

1) identifier les nœuds où il est nécessaire d'interpoler les grandeurs conservatives,

2) déterminer la cellule du sous-domaine opposé qui contient chaque nœud,

3) déterminer les coordonnés locales du noeud au sein de la cellule,

4) calculer les coefficients de l'interpolation,

5) calculer la valeur interpolée au noeud grâce à l'Eq. (2.98).

La Figure 2.10 donne un exemple de mise en place de la méthode MISCOG pour réaliser le couplage entre un stator et un rotor. Lors de la génération des maillages, une région de superposition est définie entre les deux sous-domaines pour permettre l'échange des grandeurs conservatives.

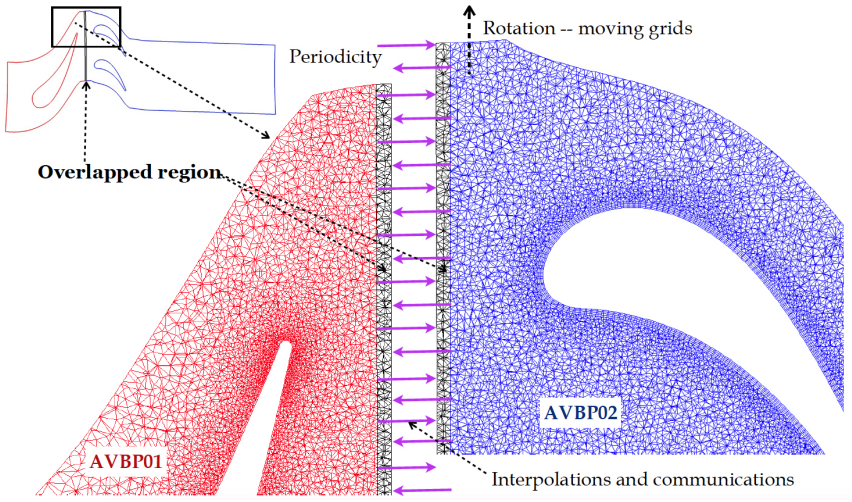


Figure 2.10: Exemple de couplage entre un stator et un rotor avec la méthode MISCOG [202].

Avec cette méthode, la région de superposition joue donc un rôle primordial, d'une part pour assurer l'échange des grandeurs entre les sous-domaines et d'autre part pour conserver les propriétés du schéma numérique. Le papier de Wang [282] avait déjà mis en en évidence l'importance de l'ordre d'interpolation à l'interface pour obtenir un ordre de convergence identique à un cas sans interface. Les travaux de Laborderie [71] ont étendu ces constations et ont commencé à étudier la problématique du nombre de nœuds dans la régions d'interface. Il avait en effet été constaté qu'un seul nœud dans la région d'interface était suffisant pour LW mais pas pour TTG4A. La problématique du nombre de nœuds dans l'interface sera abordée de manière analytique dans le Chapitre 4. L'idée sera de déterminer une valeur optimale pour chaque schéma pour conserver son ordre de convergence. Dans ce même chapitre, la méthode MISCOG sera aussi utilisée pour mettre en place une méthode de pas de temps local entre plusieurs sous-domaines.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les outils numériques nécessaires à la résolution des équations de Navier-Stokes dans le contexte de la simulations aux grandes échelles. En particulier, le formalisme *cell-vertex* utilisé dans AVBP y est décrit avec les différents schémas définis dans le cadre de ce formalisme. Enfin, la méthode MISCOG est introduite pour rendre possible le couplage entre plusieurs instances du même code de calcul. Cet aspect est notamment important pour mettre en place des simulations multi-composants en turbomachine. Toutefois, malgré les propriétés intéressantes des schémas utilisés dans AVBP, le chapitre suivant met en évidence certaines limites au niveau des propriétés de ces derniers. Dans cette optique, le chapitre suivant s'attache à comprendre précisément les caractéristiques des schémas existants pour les améliorer et en développer de nouveaux.

Chapitre 3

Analyse numérique et améliorations des schémas de convection d'AVBP

“ The science of today is the technology of tomorrow. ”

— Edward Teller

3.1 Introduction 67
3.2 Analyse des schémas existants 68
3.2.1 Rappel sur la construction des schémas 68
3.2.2 Analyse spectrale monodimensionnelle 72
3.2.3 Analyse spectrale bidimensionnelle 77
3.2.4 Sensibilité des schémas à la qualité du maillage 82
3.2.5 Conclusion intermédiaire 89
3.3 Développement de nouveaux schémas 90
3.3.1 Schémas *Three-Step Taylor-Galerkin* 90
3.3.2 Nouvelle famille de schémas utilisant le formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique 96
3.3.3 Schémas Petrov-Galerkin avec une reconstruction polynomiale d'ordre supérieur à 2 132
3.4 Bilan des schémas comparés 145
3.5 Conclusion 148

3.1 Introduction

La méthode qui semble la plus directe pour répondre aux problématiques décrites dans l'introduction, c'est-à-dire être capable de réaliser des simulations plus précises sur des domaines plus grands, est celle de l'amélioration du code de calcul en lui-même et des méthodes numériques qui en découlent. En effet, quelle que soit la simulation, le constat est simple : si le schéma numérique est plus précis, plus stable ou au sens plus général, simplement plus performant, les simulations qui en résulteront seront inévitablement plus précises à maillage équivalent ou moins coûteuses à niveau d'erreur équivalent. L'observation est en théorie assez incontestable et mène à se questionner longuement sur les propriétés des schémas utilisés. Malheureusement, en pratique, l'idée d'être capable de concevoir un schéma numérique qui possède des propriétés optimales pour l'ensemble des applications auxquelles il sera destiné est bien illusoire. Par exemple, la turbulence joue un rôle essentiel dans la plupart des simulations aux grandes échelles. Or, pour obtenir un comportement le plus physique possible, les structures turbulentes ne doivent pas être trop fortement dissipées par le schéma numérique. Cependant, un autre problème se pose : si le schéma est trop peu dissipatif, des instabilités peuvent apparaître dans le domaine de calcul, ce qui peut empêcher l'obtention de

résultats corrects.

Ce chapitre se décompose en deux parties principales. La première s'intéresse à l'analyse des schémas existants pour décrire leurs caractéristiques et leurs propriétés associées. Cette analyse a aussi pour but de mieux comprendre les limitations de ces derniers, en particulier leur sensibilité respective à la qualité du maillage. La deuxième partie présente le développement de nouveaux schémas issus des formalismes Taylor-Galerkin et Taylor-Petrov-Galerkin. À l'aide d'une reconstruction polynomiale de la solution au sein de chaque élément, les schémas obtenus à partir du formalisme Petrov-Galerkin sont significativement moins sensibles à la qualité du maillage tout en donnant des ordres de convergence plus élevés que les schémas Taylor-Galerkin classiques.

Note importante : les résultats présentés dans ce chapitre sont issus d'une collaboration étroite avec Michael Rudgyard. Il a largement participé aux différentes études décrites dans la suite, en particulier au développement du nouveau formalisme de Petrov-Galerkin de ce chapitre et aux travaux sur la fermeture des termes de bords en annexe. Je le remercie encore pour son investissement et sa passion pour le sujet, sans lesquels la qualité de ce chapitre aurait été largement réduite.

3.2 Analyse des schémas existants

Avant d'essayer de créer des schémas numériques plus performants ou plus précis, il est important de bien comprendre les propriétés mais aussi les qualités et les défauts des schémas existants. Comme décrit dans le chapitre précédent, trois schémas convectifs sont couramment utilisés dans AVBP : LW, TTGC et TTG4A et l'analyse sera faite sur ces trois schémas. La première partie de cette section consiste à rappeler la méthode de construction de ces derniers, en particulier des schémas TTG issus du formalisme éléments finis Taylor-Galerkin. À partir d'une analyse spectrale monodimensionnelle, il est possible de déterminer les propriétés de dissipation et de dispersion des schémas mais aussi leur ordre de précision (spatial et temporel) par le biais de leur équation modifiée. Toutefois, ces considérations (en particulier l'ordre de convergence) s'appliquent principalement sur des maillages réguliers, c'est pourquoi la seconde partie de cette section s'intéresse plus spécifiquement à la sensibilité des schémas sur maillages perturbés. Les observations qui vont suivre serviront à mettre en évidence certains défauts des schémas existants, pour ensuite tenter de pallier à ces défauts dans la suite du chapitre.

3.2.1 Rappel sur la construction des schémas

Dans le cas de l'équation de convection monodimensionnelle, linéaire et à vitesse constante en temps et en espace égale à c,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.1}$$

les différents schémas introduits précédemment peuvent s'exprimer pour une discrétisation uniforme avec les opérateurs suivants :

- E : l'opérateur de décalage spatial, pour lequel $U^n_{j+1} = EU^n_j$ et $U^n_{j-1} = E^{-1}U^n_j$. Pour rappel, l'exposant fait référence à l'itération et l'indice à la position du nœud.
- $\Delta_0 = \frac{1}{2}(E - E^{-1})$: l'opérateur de différences centrées usuel permettant de discrétiser les dérivées spatiales d'ordre 1.
- $\delta^2 = (E - 2 + E^{-1})$: l'opérateur de différences centrées permettant de discrétiser les dérivées spatiales d'ordre 2.
- $M = \frac{1}{6}(E + 4 + E^{-1})$: l'opérateur "matrice de masse", pour les méthodes éléments finis [57].
- $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$: le nombre CFL, avec Δt le pas de temps et Δx le pas d'espace.

Avec ces définitions, le schéma LW s'écrit alors,

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu\Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2}\nu^2\delta^2 U_j^n, \tag{3.2}$$

et les schémas de la famille TTG comme (pour rappel, pour les deux schémas, les dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées spatiales),

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j^n &= U_j^n - M^{-1}\left(\alpha\nu\Delta_0 U_j^n - \beta\nu^2\delta^2 U_j^n\right), \\ U_j^{n+1} &= U_j^n - M^{-1}\left(\nu\left(\theta_1\Delta_0 U_j^n + \theta_2\Delta_0\tilde{U}_j^n\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\delta^2 U_j^n + \epsilon_2\delta^2\tilde{U}_j^n\right)\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dans un domaine monodimensionnel périodique de longueur unité discrétisé par un maillage régulier composé de N nœuds, la solution U est décrite en chaque nœud j au temps $t = t^n$ par le scalaire U_j^n. U étant périodique, cela implique que,

$$U_0^n = U_N^n \quad \forall n \geq 0. \tag{3.4}$$

Grâce à la périodicité, les U peuvent aussi s'écrire sous la forme de séries de Fourier [14],

$$U_j^n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{U}^n(p) e^{2i\pi p x_j}, \tag{3.5}$$

avec $\hat{U}$ les coefficients de Fourier en espace (l'intégrale est faite entre 0 et 1 puisque le domaine est de longueur unité),

$$\hat{U}^n(p) = \int_0^1 U\left(x, t^n\right) e^{-2i\pi p x} dx, \tag{3.6}$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde et $\lambda = 1/p$ la longueur d'onde. À noter, d'après le critère de Nyquist, seules les longueurs d'onde appartenant à l'intervalle $\lambda \in [2\Delta x, N\Delta x]$ peuvent être discrétisées par le maillage.

Pour choisir les valeurs des coefficients α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1 et ϵ_2, Selmin et Quartapelle [246] pour TTG4A et Colin et Rudgyard [57] pour TTGC se sont basés sur l'ordre temporel du schéma et ont effectué une transformée de Fourier du système précédent (3.3). Ce qui donne,

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\xi) &= \frac{\hat{\tilde{U}}_j^n}{\hat{U}_j^n} = 1 + \frac{1}{\hat{M}(\xi)}\left(-\alpha\nu\hat{\Delta}_0(\xi) + \beta\nu^2\hat{\delta}^2(\xi)\right), \\ z(\xi) &= \frac{\hat{U}_j^{n+1}}{\hat{U}_j^n} = 1 + \frac{1}{\hat{M}(\xi)}\left(-\left(\theta_1 + \theta_2\tilde{z}(\xi)\right)\nu\hat{\Delta}_0(\xi) + \left(\epsilon_1 + \epsilon_2\tilde{z}(\xi)\right)\nu^2\hat{\delta}^2(\xi)\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec $\hat{\Delta}_0(\xi)$, $\hat{\delta}^2(\xi)$ et $\hat{M}(\xi)$ les transformées de Fourier des opérateurs Δ_0, δ^2 et M, égales à (obtenues à partir des formules d'Euler),

$$\hat{\Delta}_0(\xi) = i\sin(\xi), \tag{3.8}$$

$$\hat{\delta}^2(\xi) = -4\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2, \tag{3.9}$$

$$\hat{M}(\xi) = 1 - \frac{2}{3}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)^2, \tag{3.10}$$

avec $\xi = k\Delta x$ le nombre d'onde adimensionné (k étant le nombre d'onde et Δx le pas d'espace).

Un développement de Taylor à l'ordre 4 de l'Eq. (3.7) quand $\xi \to 0$ donne,

$$z(\xi) = 1 - a_1 i\nu\xi - a_2\nu^2\xi^2 + a_3 i\nu^3\xi^3 + a_4\nu^4\xi^4 + \mathcal{O}\left(\xi^5\right), \tag{3.11}$$

avec les coefficients apparaissant dans l'équation précédente qui s'expriment à partir des coefficients α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1 et ϵ_2 comme,

$$\begin{cases} a_1 = \theta_1 + \theta_2, \\ a_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2, \\ a_3 = \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2, \\ a_4 = \beta\epsilon_2 - \dfrac{1}{12\nu^2}(\epsilon_1 + \epsilon_2). \end{cases} \tag{3.12}$$

À partir de cette formulation, il est maintenant possible de dériver des contraintes sur les coefficients précédents pour assurer un ordre temporel voulu. Pour qu'un schéma soit précis à l'ordre n, les coefficients a_i doivent satisfaire $a_i = 1/i!$ pour $i = [\![1; n]\!]$ [128], c'est-à-dire le développement de Taylor d'une exponentielle qui correspond à la solution exacte de l'Eq. (3.1).

Pour un schéma d'ordre 3, cela se traduit par,

$$\begin{cases} a_1 = \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ a_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ a_3 = \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \tag{3.13}$$

qui correspond à un système avec une infinité de solutions (et donc à une infinité de schémas possibles). Pour un schéma d'ordre 4, les conditions sont les suivantes (en dehors du cas simple de la convection d'un scalaire en 1D, il n'est pas possible d'assurer la condition $\beta\epsilon_2 - \dfrac{1}{12\nu^2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ pour une valeur de ν quelconque, c'est pourquoi la condition $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ est imposée),

$$\begin{cases} a_1 = \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ a_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ a_3 = \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ a_4 = \beta\epsilon_2 = \dfrac{1}{24}, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

À noter que dans les analyses précédentes disponibles dans la littérature, la dernière condition du système pour obtenir un ordre 4 n'est pas mentionnée. Cette contrainte n'est pas présente si l'on considère uniquement l'ordre temporel du schéma. Dans ce cas, seule la condition $\beta\epsilon_2 = 1/24$ apparaît naturellement pour le terme d'ordre 4 (et non la condition $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$). Toutefois, dans le cas des schémas TTG, il n'est pas possible de considérer l'ordre temporel du schéma indépendamment de la discrétisation spatiale puisque les dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées en espace. Dans ce cas, comme le montre le développement de Taylor de l'Eq. (3.11) qui utilise la transformée de Fourier des opérateurs spatiaux, une contrainte additionnelle est ajoutée pour atteindre un ordre 4. Or, avec cette contrainte supplémentaire, le système ne donne pas de solution non complexe, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'obtenir un schéma d'ordre 4 avec le formalisme TTG standard (*i.e.* avec une reconstruction linéaire de la solution au sein de chaque élément). La troisième partie de ce chapitre montrera qu'en utilisant une reconstruction quadratique de la solution au sein de chaque élément, cette cinquième condition n'est plus présente et permet donc d'obtenir un schéma d'ordre 4 à deux étapes.

Le schéma TTG4A remplit les quatre premières conditions, mais pas la cinquième. Ainsi, il est seulement d'ordre 3 en temps, alors que la littérature le décrit souvent comme un schéma d'ordre 4 en temps. Il s'exprime avec les coefficients suivants (deux coefficients sont choisis égaux à 0 pour réduire le coût de calcul global du schéma),

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0, \quad \epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 = 1/2. \tag{3.15}$$

Le développement de Taylor de TTG4A tel que présenté par l'Eq. (3.11) donne,

$$z_{\mathrm{TTG4A}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^2\xi^4(\nu^2 - 1) + \mathcal{O}\left(\xi^5\right). \tag{3.16}$$

Le premier terme de l'expression de $z_{TTG4A}(\xi)$, qui diffère du développement de Taylor d'une l'exponentielle, définit l'ordre de la méthode [128], ce qui correspond bien à un ordre 3 en temps puisque le terme en ξ^4 est différent de $\nu^4/24$ (il vaut $\frac{1}{24}\nu^2(\nu^2 - 1)$).

Les schémas TTGC(γ) satisfont uniquement les trois premières conditions, ce qui implique qu'ils sont aussi d'ordre 3 en temps. Pour ces schémas, le paramètre γ peut être ajusté pour contrôler le niveau de dissipation aux hautes fréquences. L'influence de ce paramètre est détaillée dans l'Annexe B.1.4. Lors de son développement, la valeur de γ a été fixée à 0.01 [57]. Pour ne pas stocker le terme de premier ordre entre les deux sous itérations et pour ne calculer qu'une seule fois un terme de second ordre, θ_1 et ϵ_2 ont été fixés à 0. Avec les trois conditions sur l'ordre, un seul paramètre, appelé γ, reste à déterminer. Ce paramètre est par définition choisi comme égal à ϵ_1. Le reste des coefficients découle de la résolution du système (3.13). L'ensemble des coefficients des schémas TTGC(γ) s'exprime ainsi comme,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \gamma, \quad \beta = \frac{1}{6}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \epsilon_1 = \gamma, \quad \epsilon_2 = 0. \tag{3.17}$$

Le développement de Taylor associé à TTGC(γ) s'écrit,

$$z_{\mathrm{TTGC}(\gamma)}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 - \frac{\gamma}{12}\nu^2\xi^4 + \mathcal{O}\left(\xi^5\right), \tag{3.18}$$

dont le terme d'ordre 4 n'est pas égal à $\nu^4/24$, ce qui signifie bien que les schémas TTGC(γ) sont d'ordre 3 en temps.

3.2.2 Analyse spectrale monodimensionnelle

Analyse de Fourier et méthode de von Neumann

La solution théorique de l'Eq. (3.1) à un instant t est obtenue par translation de la solution initiale d'une distance $d = ct$. En faisant abstraction des sommes et en utilisant la décomposition en séries de Fourier de l'Eq. (3.5), l'Eq. (3.1) peut s'exprimer pour chaque k comme,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ikc\hat{u} = 0, \tag{3.19}$$

dont la solution générale s'écrit,

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-ikct}. \tag{3.20}$$

Il est ainsi possible de relier deux instants consécutifs par,

$$\frac{\hat{u}(k,t+\Delta t)}{\hat{u}(k,t)} = e^{-ikc\Delta t}, \tag{3.21}$$

avec Δt le pas de temps. Cette formulation correspond à la convection parfaite par la vitesse c de la solution initiale.

La solution précédente correspond à un cas idéal, mais dans le cas réel, la solution est détériorée par les opérateurs spatiaux et la discrétisation temporelle. Pour étudier les erreurs introduites par la discrétisation totale en espace et en temps, le coefficient d'amplification est défini comme le ratio entre les coefficients de Fourier à deux instants consécutifs [161],

$$G(k) = \frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}n} = |G(k)|e^{i\phi_G}, \tag{3.22}$$

où ϕ_G est la phase de G. Il en découle la condition de stabilité de von Neumann qui impose d'avoir un $|G|$ toujours inférieur ou égal à 1. Plus largement, le coefficient d'amplification G peut aussi s'exprimer en fonction de ω^* et c^* la pulsation temporelle et la vitesse de phase modifiées, relatives au schéma numérique, comme,

$$G(k) = e^{-ikc^*\Delta t} = e^{-i\omega^*\Delta t} = \underbrace{e^{\omega_I^*\Delta t}}_{\text{module}}\underbrace{e^{-i\omega_R^*\Delta t}}_{\text{phase}}, \tag{3.23}$$

avec $\omega^* = \omega_R^* + i\omega_I^*$ et $c^* = c_R^* + ic_I^*$. La pulsation temporelle modifiée du schéma numérique peut alors s'écrire en faisant intervenir le coefficient d'amplification [128, 248, 277] à l'aide de l'Eq. (3.23), en suivant l'expression,

$$\omega^* = \Omega^*(k) = -\frac{1}{i\Delta t}\ln G(k). \tag{3.24}$$

Enfin, la vitesse de phase adimensionnée du schéma numérique s'exprime par,

$$\frac{c_R^*}{c} = -\frac{\phi_G}{kc\Delta t} = -\frac{\phi_G}{\nu k\Delta x} = -\frac{\phi_G}{\nu\xi}, \tag{3.25}$$

avec $\xi = k\Delta x$ le nombre d'onde adimensionné.

Méthode de l'équation modifiée ou résolue

La méthode de l'équation modifiée ou résolue permet d'étudier les propriétés des schémas numériques et leurs conditions de stabilité. Historiquement, cette méthode a été développée par Warming et Hyett [285], puis améliorée par les travaux de Carpentier [44] et Chang [46]. Elle offre la possibilité de mener un ensemble d'analyses et en particulier d'identifier,

- l'ordre de précision spatial du schéma,
- les erreurs de diffusion et de dispersion,
- la limite de stabilité du schéma.

La suite de cette section s'intéresse au lien entre la méthode de l'équation modifiée et la méthode de von Neumann précédente. Pour ce faire, l'équation modifiée est exprimée sous la forme,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left[b_{2p} \Delta x^{2p-1} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} + b_{2p+1} \Delta x^{2p} \frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}} \right]. \tag{3.26}$$

À partir de cette formulation, le schéma est dit d'ordre s en espace quand le premier coefficient de l'équation modifiée est proportionnel à Δx^s [128]. D'autre part, les dérivées de l'erreur de troncature de l'équation sont séparées en termes paires et impaires. Cette séparation est motivée par la différence de propriétés des deux types d'erreurs. En effet, les dérivées d'ordre paires contribuent à l'erreur de diffusion, alors que les dérivées d'ordre impaires définissent l'erreur de dispersion [128].

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients b_i qui interviennent dans l'équation modifiée. Comme décrit par Hirsch [128], la pulsation temporelle modifiée ω^* peut s'exprimer en fonction des coefficients b_{2p} et b_{2p+1} apparaissant dans l'erreur de troncature de l'Eq. (3.26) comme,

$$\begin{aligned} \omega^* = \Omega^*(k) &= kc - \frac{1}{\Delta x} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[-ib_{2p}(-1)^p (k\Delta x)^{2p} + b_{2p+1}(-1)^p (k\Delta x)^{2p+1} \right], \\ &= kc - ib_2 \frac{\xi^2}{\Delta x} + b_3 \frac{\xi^3}{\Delta x} + ib_4 \frac{\xi^4}{\Delta x} - b_5 \frac{\xi^5}{\Delta x} - ib_6 \frac{\xi^6}{\Delta x} + \dots \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les premiers termes de l'équation modifiée peuvent alors être déterminés en utilisant un développement limité de ω^* autour de $\xi = 0$, ce qui permet de déterminer la précision d'un schéma numérique donné. Cette méthode sera largement utilisée dans la suite pour comparer les schémas existants avec les nouveaux schémas développés. Sur ce principe, les schémas existants sont dans un premier temps analysés.

Lax-Wendroff

Pour rappel, le schéma LW s'exprime comme,

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu \Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2} \nu^2 \delta^2 U_j^n, \tag{3.28}$$

et en utilisant la méthode de von Neumann, le coefficient d'amplification suivant est obtenu,

$$G_{\mathrm{LW}}(k) = 1 - i\nu \sin(k\Delta x) - \nu^2 (1 - \cos(k\Delta x)). \tag{3.29}$$

La pulsation temporelle modifiée de LW s'écrit à partir du coefficient d'amplification grâce à l'Eq. (3.24), lorsque $k \to 0$,

$$\Omega^*_{\mathrm{LW}}(k) = kc - \frac{c\Delta x^2}{6}\left(1-\nu^2\right)k^3 - i\frac{c\Delta x^3}{8}\nu\left(1-\nu^2\right)k^4 + \mathcal{O}\left(k^5\right). \tag{3.30}$$

Grâce à l'Eq. (3.27), l'équation modifiée du schéma LW (et donc son erreur de troncature) est égale à,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c\Delta x^2}{6}\left(1-\nu^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{c\Delta x^3}{8}\nu\left(1-\nu^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}\left(\Delta x^4\right). \tag{3.31}$$

L'erreur de troncature montre que le schéma LW est d'ordre 2 en espace. À noter que par construction, il est aussi d'ordre 2 en temps.

Schémas de la famille TTG

La même méthode est utilisée pour déterminer les propriétés des schémas de la famille TTG, et en particulier des schémas TTG4A et TTGC(γ). Cette famille de schémas s'exprime en deux étapes par,

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_j^n &= U_j^n - M^{-1}\left(\alpha\nu\Delta_0 U_j^n - \beta\nu^2\delta^2 U_j^n\right), \\
U_j^{n+1} &= U_j^n - M^{-1}\left(\nu\left(\theta_1\Delta_0 U_j^n + \theta_2\Delta_0\tilde{U}_j^n\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\delta^2 U_j^n + \epsilon_2\delta^2\tilde{U}_j^n\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Le coefficient d'amplification associé s'écrit lui aussi en deux étapes comme,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(k) =& 1 - \left(i\alpha\nu\sin(k\Delta x) + 4\beta\nu^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^{-1}, \\
G_{\mathrm{TTG}}(k) =& 1 - \Big[i\nu\left(\theta_1\sin(k\Delta x) + \theta_2\sin(k\Delta x)\tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(k)\right) \\
&+ 4\nu^2\left(\epsilon_1\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + \epsilon_2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(k)\right)\Big]\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ce qui donne grâce à l'Eq. (3.24), les deux pulsations temporelles modifiées des schémas TTG4A et TTGC(γ), lorsque $k \to 0$,

$$\Omega^*_{\mathrm{TTG4A}}(k) = kc - i\frac{c\Delta x^3}{24}\nu k^4 - \frac{c\Delta x^4}{360}\left(3\nu^4 - 10\nu^2 + 2\right)k^5 + \mathcal{O}\left(k^6\right), \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^*_{\mathrm{TTGC}(\gamma)}(k) =& kc - i\frac{c\Delta x^3}{24}\nu\left(\nu^2 + 2\gamma\right)k^4 \\
&+ \frac{c\Delta x^4}{360}\left(12\nu^4 + (30\gamma - 5)\nu^2 - 2\right)k^5 + \mathcal{O}\left(k^6\right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Finalement, les équations modifiées obtenues sont respectivement,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} =& -\frac{c\Delta x^3}{24}\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
&+ \frac{c\Delta x^4}{360}\left(3\nu^4 - 10\nu^2 + 2\right)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \mathcal{O}\left(\Delta x^5\right), \quad \text{(TTG4A)}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} =& -\frac{c\Delta x^3}{24}\nu\left(\nu^2 + 2\gamma\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
&- \frac{c\Delta x^4}{360}\left(12\nu^4 + (30\gamma - 5)\nu^2 - 2\right)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \mathcal{O}\left(\Delta x^5\right). \quad \text{(TTGC}(\gamma)\text{)}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Les schémas TTG4A et TTGC(γ) sont donc d'ordre 3 en espace et en temps. L'impact du paramètre γ sur les propriétés de dissipation et de dispersion du schéma TTGC(γ) est ici clairement mis en évidence. La suite de la section va utiliser ces équations pour déterminer précisément les propriétés de dissipation et de dispersion des schémas précédents à différents nombres CFL.

Propriétés de dissipation et de dispersion

La dissipation numérique introduite par les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A est obtenue en traçant le module du coefficient d'amplification en fonction du nombre d'onde adimensionné $k\Delta x$. La Figure 3.1 présente cette comparaison pour 4 valeurs de CFL différentes, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\nu = 0.5$ et $\nu = 0.7$. Il est clair que les schémas numériques comparés présentent des niveaux de dissipation très hétérogènes. Les schémas LW et TTG4A apparaissent très dissipatifs et s'avèrent même trop dissipatifs pour des simulations directes de turbulence homogène isotrope [57].

Au contraire, le schéma TTGC(0.01) est très peu dissipatif et présente un niveau proche de celui d'un schéma compact d'ordre 6 [161]. Toujours dans [57], il a été montré que le schéma TTGC(0.01) répond quant à lui aux exigences d'une simulation directe ou d'une simulation aux grandes échelles. Cependant, ce schéma ne présente pas que des avantages. Comme souligné dans [161], le schéma est très peu dissipatif au sens de Kreiss [128, 159] ($|G(\pi)| > 0.9$ pour tous les CFL). Cette propriété est importante puisque dès lors qu'une équation non linéaire est résolue, à cause de la multiplication des variables entre elles, un phénomène d'*aliasing* apparaît [128, 248]. Ce phénomène s'illustre en considérant le produit entre deux variables discrètes U_j et V_j,

$$\begin{aligned} U_j V_j &= \sum_{p_1} \hat{U}(p_1)\, e^{2i\pi p_1 x_j} \sum_{p_2} \hat{V}(p_2)\, e^{2i\pi p_2 x_j}, \\ &= \sum_{p_1} \hat{U}(p_1) \left(\sum_{p_2} \hat{V}(p_2)\, e^{2i\pi p_2 x_j} \right) e^{2i\pi p_1 x_j}, \\ &= \sum_{p_1} \sum_{p_2} \hat{U}(p_1)\, \hat{V}(p_2)\, e^{2i\pi (p_1+p_2) x_j}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

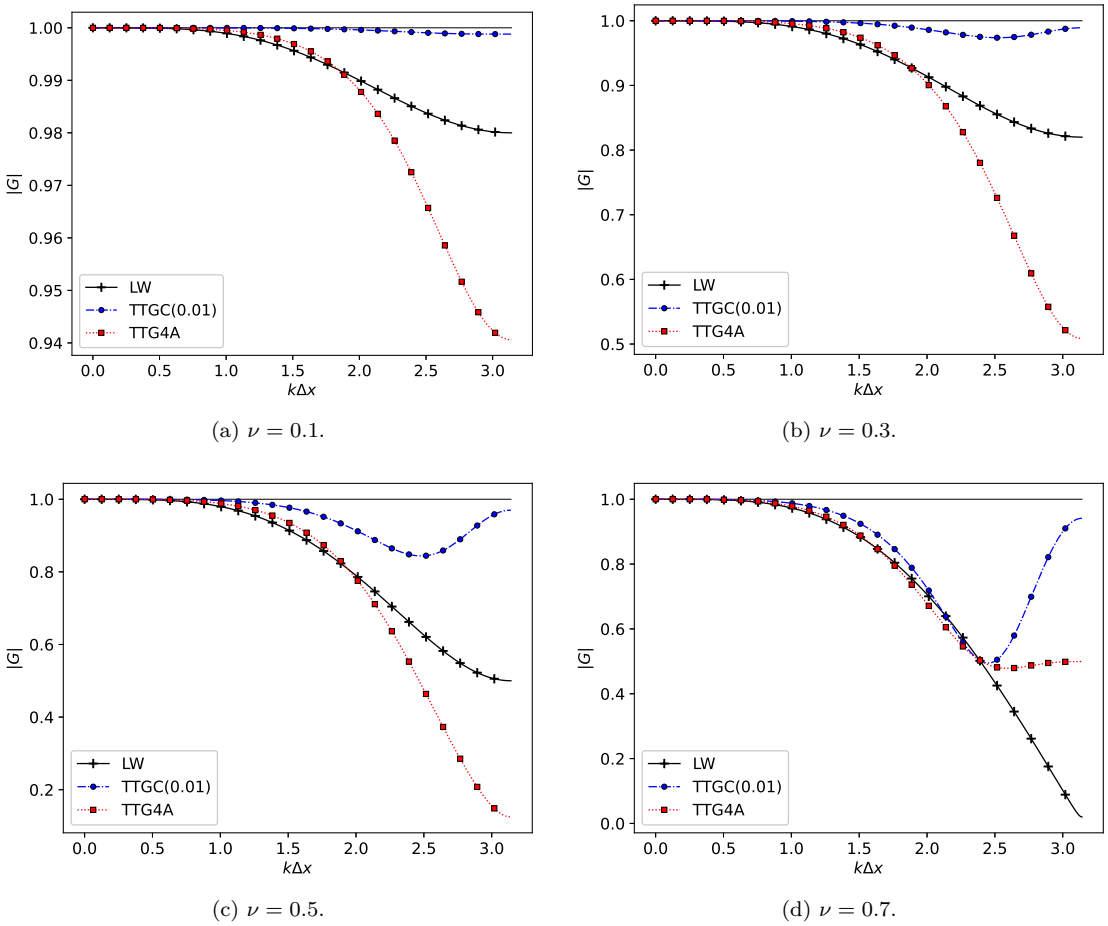
D'après le critère de Nyquist, $|2\pi p_1 x_j| \leq \pi$ et $|2\pi p_2 x_j| \leq \pi$. Or, le produit des deux variables fait apparaître des termes en $2\pi (p_1 + p_2) x_j$, ce qui implique qu'il est possible d'avoir $|2\pi (p_1 + p_2) x_j| > \pi$. Comme ces composantes ne peuvent pas être représentées par des harmoniques ayant des longueurs d'ondes inférieures à $2\Delta x$, ce phénomène entraine un transfert d'énergie entre ces harmoniques, qui ne peuvent être représentées, à d'autres longueurs d'onde de plus basses fréquences. Ce transfert d'énergie a pour conséquence de générer des harmoniques généralement d'origine non physique, appelées *wiggles*. Dans le pire des cas, le schéma numérique peut diverger à cause de ce phénomène alors qu'il semblait stable d'après l'étude linéaire.

Pour s'affranchir de ce phénomène, une solution consiste à s'assurer que le schéma est suffisamment dissipatif au sens de Kreiss, *i.e.* que le schéma applique une quantité suffisante de dissipation jusqu'aux petites longueurs d'onde. La définition de cette propriété est donnée dans Hirsch [128] ou Lamarque [161] :

Définition. Un schéma est dissipatif (au sens de Kreiss) d'ordre $2s$, où $s \in \mathbb{N}^*$, s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout vecteur d'onde $\vec{k}$ avec $(k_x\Delta x, k_y\Delta y, k_z\Delta z \leq \pi)$, les valeurs propres λ de la matrice d'amplification du schéma satisfassent la condition :

$$|\lambda(\vec{x}, \Delta t, \vec{k})| \leq 1 - \delta |\vec{k} \cdot \vec{\Delta x}|^{2s}. \tag{3.39}$$

À cause de son faible niveau de dissipation au sens de Kreiss, le schéma TTGC peut manquer de robustesse lorsqu'il est utilisé sur des problèmes non linéaires ou sur des maillages non réguliers. Cette problématique sera largement étudiée dans la suite de ce chapitre.



(a) $\nu = 0.1$.

(b) $\nu = 0.3$.

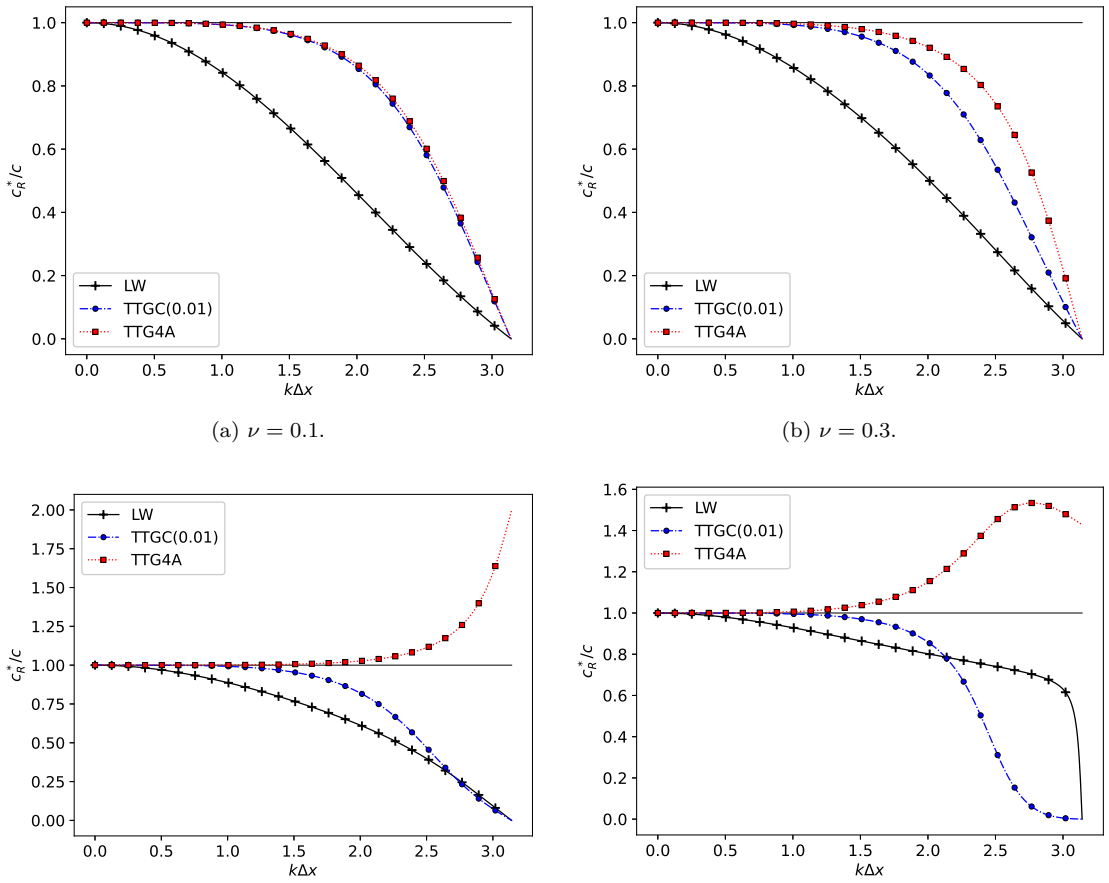
(c) $\nu = 0.5$.

(d) $\nu = 0.7$.

Figure 3.1: Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

Les propriétés de dissipation sont essentielles pour obtenir un schéma performant, notamment pour réaliser des simulations aux grandes échelles, mais la dispersion d'un schéma a aussi son importance. La dispersion permet de quantifier la vitesse de propagation des ondes et leur énergie associée en fonction du nombre d'onde. Dans le cas général, l'erreur de phase d'un schéma numérique n'est pas constante sur toute la plage de longueurs d'onde. Ainsi, les différentes harmoniques d'une perturbation sont transportées à des vitesses différentes en fonction du nombre d'onde, entrainant la dispersion d'un paquet d'ondes.

Dans la suite, la dispersion numérique est étudiée à l'aide de la vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c. Lorsque que c_R^*/c est inférieure à 1, la vitesse de phase des ondes est inférieure à c et il y a donc un retard de phase. Des oscillations numériques apparaissent alors dans le sillage des ondes physiques. À l'inverse, quand c_R^*/c est supérieure à 1, les oscillations numériques sont plus rapides que les ondes physiques. La Figure 3.2 permet de comparer la dispersion numérique des trois schémas précédents à 4 valeurs de CFL en traçant la vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c en fonction du nombre d'onde adimensionné $k\Delta x$. La gain d'un ordre des schémas TTG4A et TTGC(0.01) par rapport à LW est clairement visible puisque que le terme de la dérivée d'ordre 3 est nulle pour les deux schémas TTG (Eqs. (3.36) et (3.37)). Les schémas TTG présentent des propriétés de dispersion très intéressantes et proches d'un schéma compact d'ordre 6 [161]. Dans la suite du chapitre, pour chercher à améliorer ces différentes schémas, l'analyse des propriétés de dissipation et de dispersion sera particulièrement importante.



(a) $\nu = 0.1$.

(b) $\nu = 0.3$.

(c) $\nu = 0.5$.

(d) $\nu = 0.7$.

Figure 3.2: Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

L'analyse spectrale des différents schémas menée jusqu'à présent a été faite uniquement dans un cas monodimensionnel, ce qui ne correspond pas en pratique aux géométries utilisées pour des simulations concrètes en deux ou trois dimensions. L'objectif de la section qui suit est d'étendre l'analyse spectrale au cas bidimensionnel pour vérifier que les résultats et les conclusions obtenus en 1D s'appliquent aussi en 2D. La Section 3.2.4 montrera que les propriétés de dissipation et de dispersion des schémas jouent un rôle déterminant dans l'ordre de convergence de ces derniers sur maillages réguliers et irréguliers.

3.2.3 Analyse spectrale bidimensionnelle

L'analyse spectrale présentée dans la section précédente peut également être généralisée aux cas multidimensionnels. De la même manière que pour le cas monodimensionnel, la méthode repose sur la construction du coefficient d'amplification. Elle permet de mettre en évidence le comportement anisotrope des schémas numériques et donne la possibilité d'étudier leurs limites de stabilité dans un cas multidimensionnel. Ce dernier point est important puisque pour certains schémas, le passage d'une à deux ou trois dimensions a un impact important sur les limites du domaine de stabilité. Dans la suite, l'analyse se concentre sur des maillages composés de triangles isocèles réguliers de côté Δx (Fig. 3.3). Quant à l'analyse présentée ici, elle est similaire à celle réalisée dans [161] pour un maillage composé de carrés.

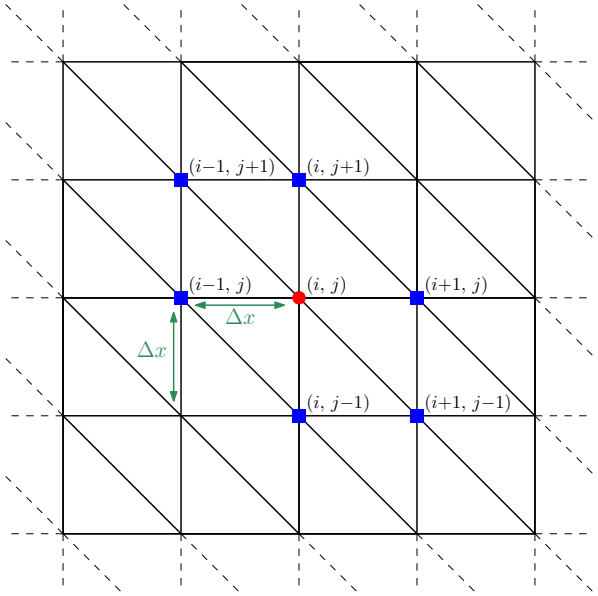


Figure 3.3: Représentation d'un maillage composé de triangles isocèles réguliers de côté Δx.

Par rapport au cas monodimensionnel, deux nouvelles notations sont introduites,

- k_x et k_y les nombres d'onde dans les directions x et y,
- α_c l'angle entre l'axe x et le vecteur vitesse $\vec{c} = (c\cos\alpha_c, c\sin\alpha_c)$. k_x et k_y pouvant s'exprimer à partir de α_c comme, $k_x = k\cos\alpha_c$ et $k_y = k\sin\alpha_c$.

Ainsi, le coefficient d'amplification $G(k, \alpha_c)$ sera à la fois fonction du nombre d'onde, mais aussi de l'angle du vecteur vitesse α_c. Dans le cas bidimensionnel, les schémas de la famille TTG s'expriment comme,

$$\begin{aligned}
M\left(\tilde{U}^n - U^n\right) &= -\alpha\left(\nu_x\hat{\delta}_x U + \nu_y\hat{\delta}_y\right)U^n + \beta\Delta t\left(\nu_x^2\hat{\delta}_x^2 + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy} + \nu_y^2\hat{\delta}_y^2\right)U^n,\\
M\left(U^{n+1} - U^n\right) &= -\theta_1\left(\nu_x\hat{\delta}_x U + \nu_y\hat{\delta}_y\right)U^n - \theta_2\left(\nu_x\hat{\delta}_x U + \nu_y\hat{\delta}_y\right)\tilde{U}^n\\
&\quad + \epsilon_1\Delta t\left(\nu_x^2\hat{\delta}_x^2 + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy} + \nu_y^2\hat{\delta}_y^2\right)U^n\\
&\quad + \epsilon_2\Delta t\left(\nu_x^2\hat{\delta}_x^2 + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy} + \nu_y^2\hat{\delta}_y^2\right)\tilde{U}^n,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

avec les opérateurs suivants (pour un maillage triangulaire régulier),

$$\hat{\delta}_x U_{i,j} = \frac{1}{6}\left(U_{i+1,j-1} + 2U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j+1} - 2U_{i-1,j}\right), \tag{3.41}$$

$$\hat{\delta}_y U_{i,j} = \frac{1}{6}\left(-U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j} + 2U_{i,j+1} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j}\right), \tag{3.42}$$

$$\hat{\delta}_x^2 U_{i,j} = (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}), \tag{3.43}$$

$$\hat{\delta}_y^2 U_{i,j} = (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}), \tag{3.44}$$

$$\hat{\delta}_{xy} U_{i,j} = (-U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j}), \tag{3.45}$$

$$MU_{i,j} = \frac{1}{12}(U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} + 6U_{i,j} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j}). \tag{3.46}$$

À noter que dans le cas d'un maillage composé de carrés, ces opérateurs s'écrivent différemment. Cette analyse menée dans le cas d'un maillage composé de triangles permet de prendre en compte la direction privilégiée apportée par l'orientation de la diagonale.

Dans la suite, pour étudier la dissipation et la dispersion des schémas numériques dans le cas bidimensionnel, le module du coefficient d'amplification $|G(k,\alpha_c)|$ et la vitesse de phase adimensionnée $c_R^*(k,\alpha_c)/c = -\frac{\phi_G(k,\alpha_c)}{\nu k \Delta x}$ sont tracées en coordonnées polaires (Fig. 3.4). Comme pour l'analyse 1D, le coefficient d'amplification est obtenu par transformée de Fourier des opérateurs nodaux précédents. Chaque courbe est alors tracée pour un nombre d'onde k donné (qui correspond à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$). Comme dans [161], $|G(k,\alpha_c)|$ et $c_R^*(k,\alpha_c)/c$ sont représentés pour 5 longueurs d'onde : $2\Delta x$, $3\Delta x$, $4\Delta x$, $8\Delta x$ et pour une grande longueur d'onde tendant vers l'infini, *i.e.* pour $k \to 0$.

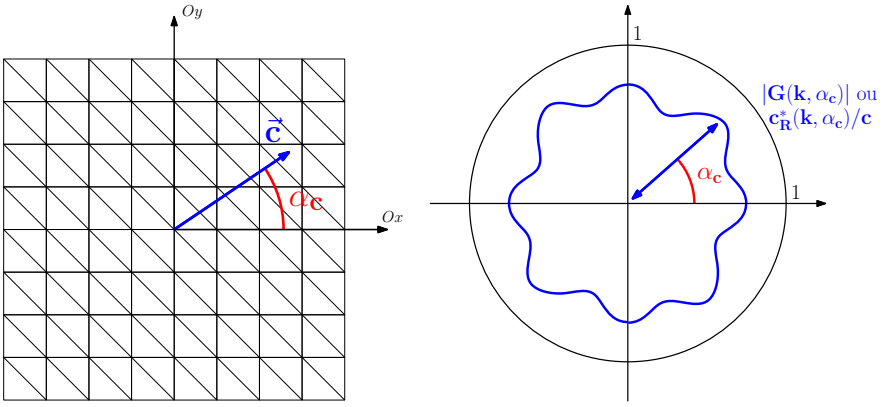


Figure 3.4: Définition de l'angle α_c et construction des courbes représentant $|G(k,\alpha_c)|$ et $c_R^*(k,\alpha_c)/c$ à un nombre d'onde fixé en fonction d'α_c.

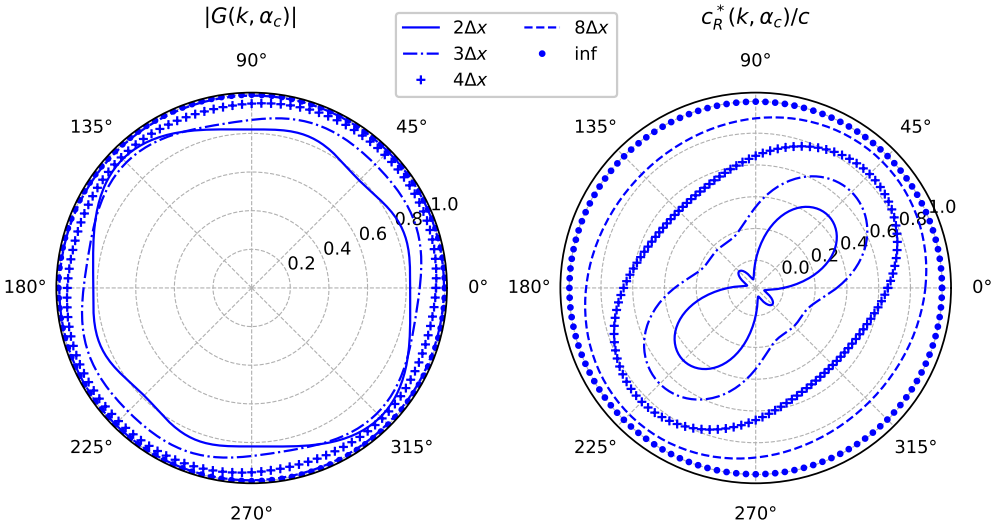
En analysant les polaires de dissipation des trois schémas (LW, TTGC(0.01) et TTG4A), un point commun se dégage : pour les grandes longueurs d'onde, les schémas sont quasiment isotropes, avec des propriétés de dissipation et de dispersion très proches de celles déjà obtenues précédemment par l'étude spectrale monodimensionnelle. Pour des longueurs d'onde plus petites ($2\Delta x$, $3\Delta x$ et $4\Delta x$), des anisotropies sont clairement visibles sur l'ensemble des schémas.

- À $\nu = 0.7$, comme dans le cas d'un maillage carré [161], sur maillage triangulaire, le schéma LW ne dissipe quasiment pas les *wiggles* de longueur d'onde $2\Delta x$ dans les directions diagonales (Fig. 3.5). Cela a pour conséquence de favoriser l'apparition d'oscillations en damiers sur certains calculs. D'autre part, contrairement au cas sur maillage carré, le niveau de dissipation n'est pas identique sur chaque diagonale puisque l'orientation des triangles est différente selon la direction de la diagonale. Par ailleurs, selon les directions principales, les propriétés de LW sont plus intéressantes puisque les *wiggles* sont fortement dissipés, avec cependant l'inconvénient d'avoir une dispersion plus importante dans ces directions.

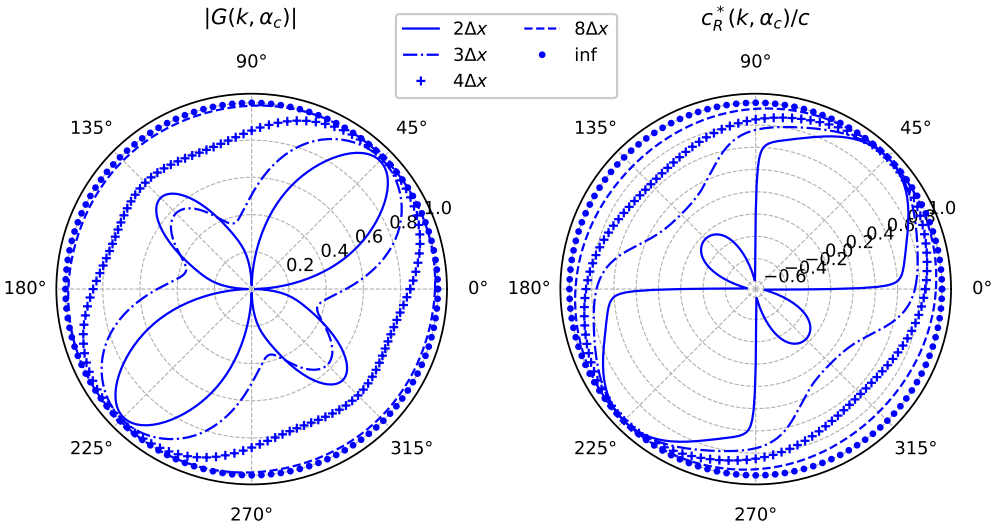
- Cette anisotropie est aussi visible sur les polaires du schéma TTGC(0.01) (Fig. 3.6). Néanmoins, à l'inverse de LW, la dissipation à la longueur d'onde $2\Delta x$ reste assez faible dans les directions principales et les valeurs de dissipation maximales sont visibles pour les angles à 17° et 73° (qui sont des directions hors diagonales et hors directions principales). Une anisotropie importante est aussi observée dans le cas de la dispersion pour les petites longueurs d'onde ($2\Delta x$ et $3\Delta x$). Pour les longueurs d'onde plus grandes, la dispersion reste plus isotrope.

- Pour TTG4A (Fig. 3.7), l'anisotropie est moins présente que TTGC(0.01). En particulier pour la longueur d'onde $2\Delta x$ pour laquelle la dissipation est relativement uniforme (et importante), mise à part selon les diagonales $-\pi/4$ et $3\pi/4$. Pour la dispersion, comme pour TTGC(0.01), l'anisotropie est surtout visible pour les petites longueurs d'onde ($2\Delta x$ et $3\Delta x$) aux deux CFL étudiés.

À noter que de la même manière que dans les cas monodimensionnels, le calcul de $|G(k, \alpha_c)|$ permet de déterminer analytiquement les limites de stabilité des différents schémas numériques dans le cas bidimensionnel. La comparaison de ces limites sera faite dans la Section 3.4.

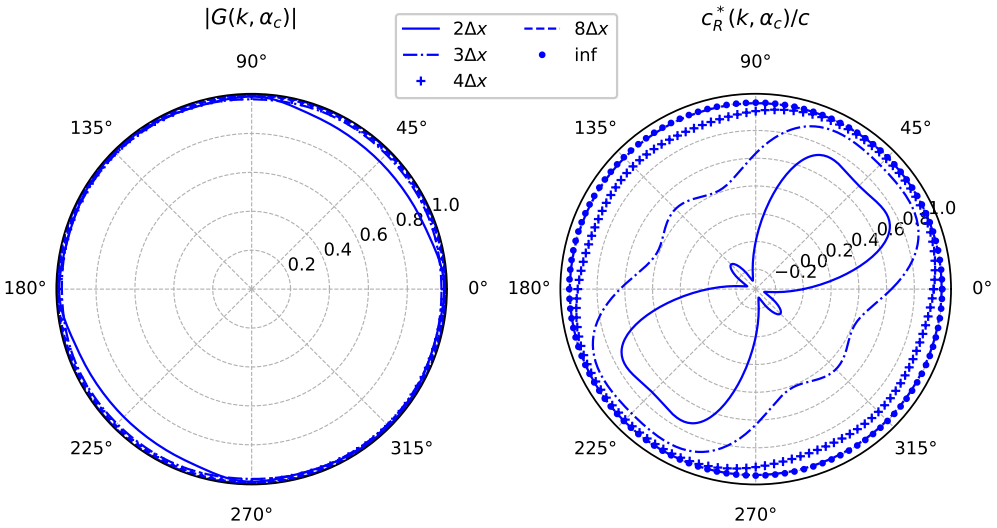


(a) $\nu = 0.3$.

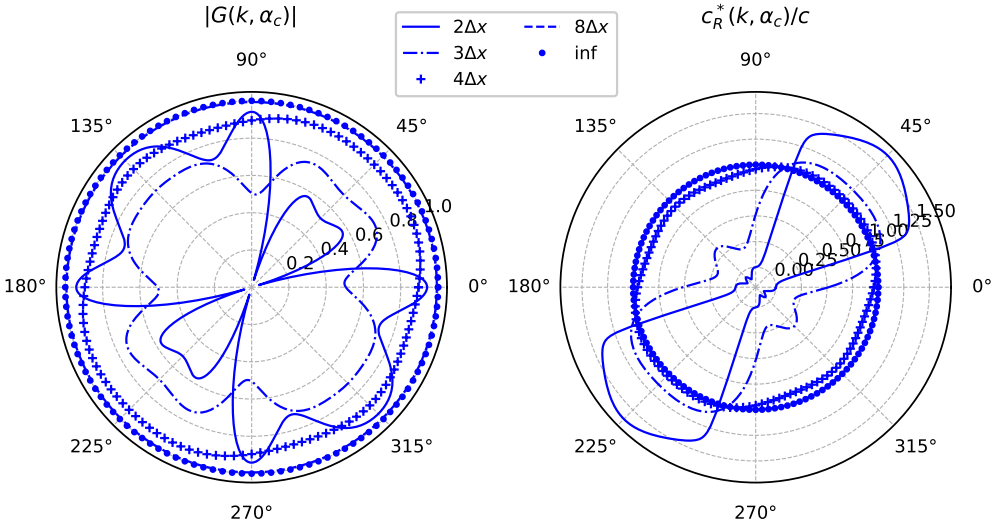


(b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.5: Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma LW pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire.

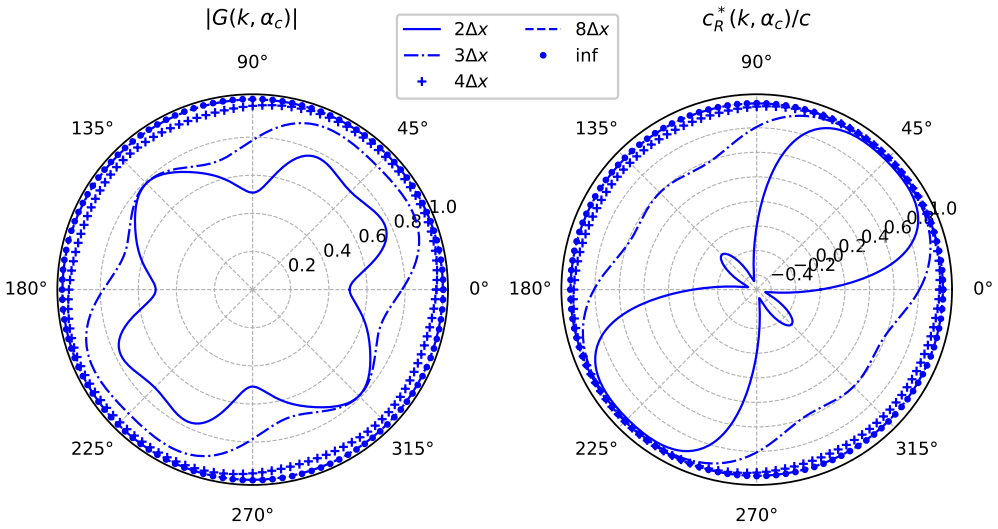


(a) $\nu = 0.3$.

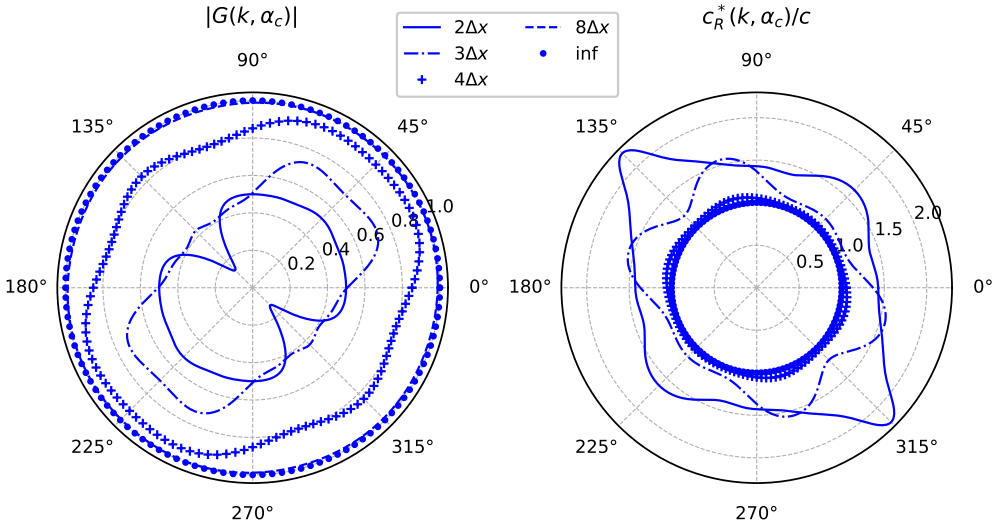


(b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.6: Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma TTGC(0.01) pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire.



(a) $\nu = 0.3$.



(b) $\nu = 0.7$.

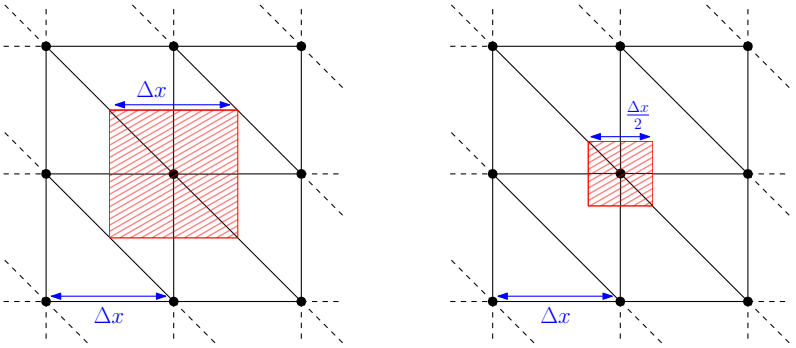
Figure 3.7: Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma TTG4A pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire.

Les analyses spectrales précédentes ont montré de grandes différences entre les schémas numériques considérés. L'objectif de la section qui suit est de comprendre comment ces différences se traduisent en termes de sensibilité des schémas à la qualité des maillages, en analysant en particulier l'ordre de convergence des schémas.

3.2.4 Sensibilité des schémas à la qualité du maillage

Pour étudier la sensibilité des schémas à la qualité du maillage, l'ordre de convergence des schémas numériques décrits est étudié en utilisant des maillages de différentes régularités. Dans tous les cas, les maillages sont composés de triangles. Ces triangles sont isocèles dans le cas régulier ou quelconques pour les cas perturbés. Le paramètre b_Δ est introduit pour définir la perturbation générée autour de la position initiale des nœuds du maillage. À partir d'un maillage régulier, le

paramètre b_Δ définit une surface centrée sur chaque nœud qui s'étend selon x et dans y dans l'intervalle $[-b_\Delta \Delta x/2, b_\Delta \Delta x/2]$, avec Δx le pas d'espace du maillage. La position de chaque nœud du maillage perturbé est déterminée aléatoirement (distribution uniforme) dans la surface définie par le paramètre b_Δ. Le cas régulier correspond simplement à $b_\Delta = 0$. La Figure 3.8 présente deux configurations avec deux valeurs de b_Δ différentes, 1 (la valeur maximale pour éviter les modifications de connectivités ou les volumes négatifs) et 0.5 respectivement.



(a) $b_\Delta = 1.$ (b) $b_\Delta = 0.5.$

Figure 3.8: Illustration du choix du paramètre b_Δ pour définir la perturbation du maillage.

Convection d'une onde entropique monodimensionnelle

Le premier cas académique pour étudier les schémas numériques correspond à la convection d'une onde entropique monodimensionnelle. Le domaine de calcul est carré de dimensions $L_x = 1$ m et $L_y = 1$ m. L'onde entropique correspond à une Gaussienne selon la direction x sur la masse volumique initialisée au centre du domaine, dont l'expression est la suivante,

$$\rho_0(x, y) = 1 + \exp\left(-\frac{(x - x_c)^2}{\sigma}\right), \tag{3.47}$$

avec $\sigma = 0.005$ et $x_c = L_x/2$. La pression dans le domaine est constante et la vitesse de convection est choisie comme uniforme selon l'axe x, $\vec{u} = (u_x, u_y) = (10 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$. Les quatre conditions limites sont définies comme étant périodiques. La configuration simulée est illustrée sur la Fig. 3.9.

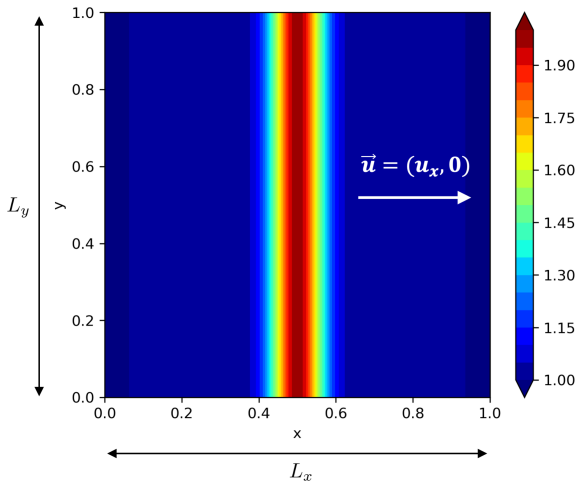
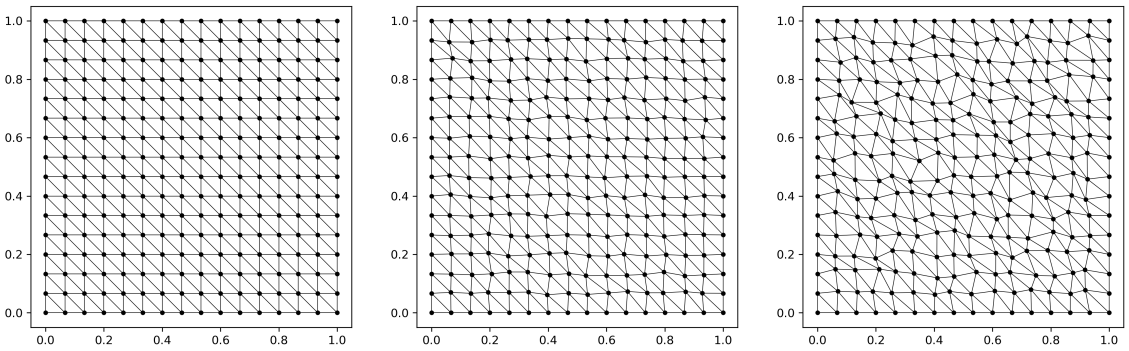


Figure 3.9: Représentation de la configuration de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle.

Pour déterminer la sensibilité à la qualité du maillage par le biais de l'ordre de convergence de chaque schéma, le domaine de calcul est discrétisé avec 5 niveaux de raffinement, $L_x/16$, $L_x/32$, $L_x/64$, $L_x/128$ et $L_x/256$. Pour chaque niveau de raffinement, trois valeurs de perturbations sont choisies, $b_\Delta = 0$ qui correspond à un maillage régulier, $b_\Delta = 0.2$ qui correspond à un maillage faiblement perturbé et $b_\Delta = 0.5$ qui correspond à un maillage fortement perturbé. Un aperçu des maillages pour les trois niveaux de perturbations est donné en Fig. 3.10 pour le raffinement le plus grossier, *i.e.* $\Delta x = L_x/16$.

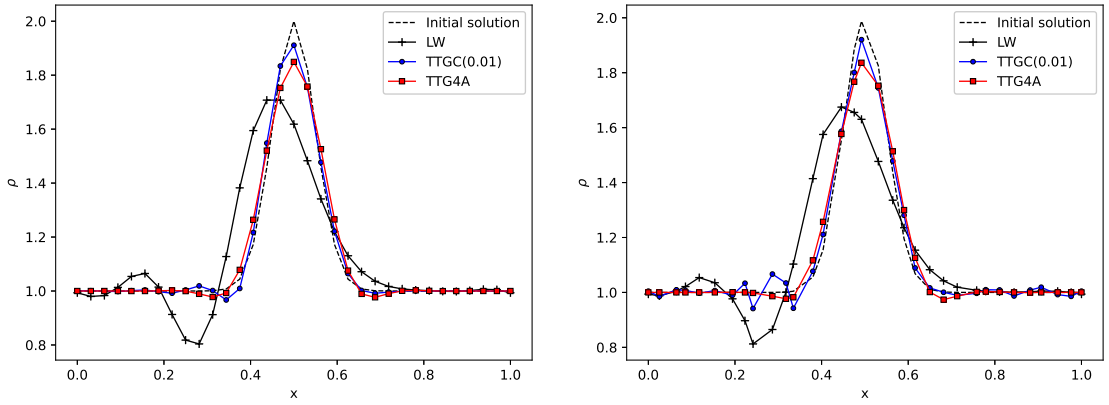


(a) $b_\Delta = 0.$ (b) $b_\Delta = 0.2.$ (c) $b_\Delta = 0.5.$

Figure 3.10: Visualisation des maillages pour différents b_Δ pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = L_x/16$).

Note : les résultats présentés dans la suite ne sont pas toujours obtenus à partir de la version Fortran du code AVBP. Certaines simulations sont réalisées grâce à un démonstrateur en Python du code AVBP. Il permet d'avoir accès à une version simplifiée du code, tout en conservant les caractéristiques principales qui font la singularité du code AVBP, avec par exemple le formalisme cell-vertex et des schémas convectifs identiques. Dans le cas de la convection d'un scalaire comme celui présenté ici, les résultats du démonstrateur Python sont parfaitement identiques à ceux qui pourraient être obtenus avec AVBP en simulant la convection d'un pulse de masse volumique dans un champ de vitesse uniforme. Ce démonstrateur Python sera en particulier très utile dans la suite du chapitre pour implémenter rapidement de nouveaux schémas TTG ou de nouveaux types de reconstruction de la solution au sein de chaque élément. Dans le chapitre, si un cas test concerne la convection d'une onde entropique, c'est ce démonstrateur qui sera systématiquement utilisé. Au contraire, si le cas test nécessite la résolution des équations d'Euler (pour la convection d'un tourbillon isentropique par exemple), AVBP sera utilisé à la place du démonstrateur.

Avant d'analyser leur ordre de convergence respectif, pour fournir une première comparaison entre les schémas, la Fig. 3.11 présente les solutions des trois schémas après un tour de domaine pour deux niveaux de perturbations à $\Delta x = L_x/32$ et à $\nu = 0.7$. La courbe pointillée correspond à la solution initiale. Pour les deux niveaux de perturbations, le schéma LW présente une erreur sur la phase du signal convecté aux basses fréquences. Cette erreur est mise en évidence par le creux situé en amont du maximum de densité. L'origine de ce défaut important de LW sera analysée par la suite. Le niveau de dissipation du signal initial est aussi relativement élevé. Le schéma TTGC(0.01) présente quant à lui un niveau de dissipation bien plus faible. Malgré la discrétisation grossière, le maximum du signal est quasiment conservé. À noter que la solution de TTGC(0.01) est fortement dégradée dans le cas du maillage perturbé, avec notamment l'apparition d'ondes parasites en amont du signal. Cette dégradation des propriétés du schéma sur maillages perturbés fera l'objet d'une étude approfondie dans la suite du chapitre. Enfin, le schéma TTG4A apparaît comme plus dissipatif avec un maximum de la solution inférieur à TTGC(0.01). Il est cependant largement moins sensible à la qualité du maillage puisque la solution finale est quasiment inchangée entre les deux niveaux de perturbations.



(a) $b_\Delta = 0$. (b) $b_\Delta = 0.5$.

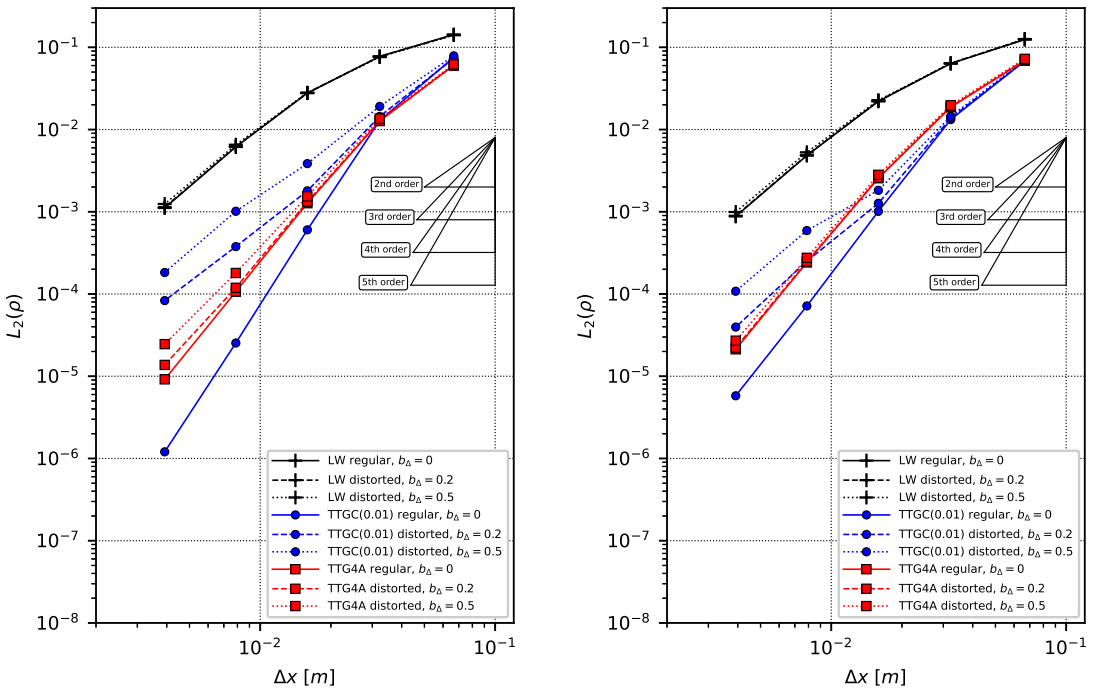
Figure 3.11: Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation $\Delta x = L_x/32$ après 1 tour à $\nu = 0.7$.

Pour déterminer l'ordre de convergence des différents schémas, la norme L_2 est calculée en comparant le signal de masse volumique après un tour de domaine à la solution initiale. La norme L_2 pondérée par le volume est définie par,

$$L_2(\rho) = \left[\frac{\sum_{j=0}^{N} V_j \left(\rho_{0,j} - \rho_j\right)^2}{\sum_{j=0}^{N} V_j} \right]^{1/2}, \tag{3.48}$$

où V_j est le volume de la cellule duale (voir Section 2.4.1 pour la définition du volume dual) associée au nœud j et $\rho_{0,j}$ correspond à la solution analytique associée au nœud j, *i.e.* résultant de la convection de la perturbation initiale après un tour de domaine, donc à l'expression de l'Eq. (3.47). L'ordre de convergence des schémas est déterminé pour deux valeurs de CFL, $\nu = 0.3$ et $\nu = 0.7$, qui correspondent à des valeurs typiquement rencontrées dans des applications concrètes.

La convergence en maillage de ce cas test est donnée en Fig. 3.12. Elle met en évidence des comportements largement différents en termes d'ordre de convergence des schémas et de précision sur maillages perturbés. En accord avec les résultats théoriques, le schéma LW a un ordre de convergence légèrement supérieur à 2. Par ailleurs, étant donné son niveau important de dissipation, LW apparaît comme très peu sensible à la qualité du maillage : les courbes de convergence sont quasiment superposées pour les trois niveaux de perturbations. Pour le schéma TTGC(0.01), l'ordre de convergence sur maillages réguliers ($b_\Delta = 0$) est supérieur à 4. Cet ordre de convergence supérieur à la valeur théorique s'explique par le faible niveau de dissipation et de dispersion du schéma avec le paramètre $\gamma = 0.01$ (en particulier lorsque le CFL est faible). Cependant, l'ordre de convergence est largement dégradé sur les maillages perturbés, avec un ordre inférieur à 3. Cette dégradation s'explique encore une fois par la faible dissipation du schéma en particulier aux hautes fréquences. Comme mis en évidence par la Fig. 3.11, des perturbations en amont de l'onde entropique apparaissent et ces perturbations ne sont pas dissipées par le schéma, entrainant la dégradation de l'ordre. Pour le schéma TTG4A, le comportement est largement différent. L'ordre de convergence sur maillages réguliers est plus faible, mais il est aussi largement moins sensible à la qualité du maillage grâce à son niveau de dissipation plus élevé aux hautes fréquences.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.12: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

Convection d'un vortex isentropique

Le cas test précédemment de l'onde entropique correspond à un cas linéaire dans un champ de vitesse uniforme (la matrice Jacobienne des flux est dans ce cas constante). Dans un calcul réel avec un nombre important de structures turbulentes, l'évolution de chaque tourbillon joue un rôle très important pour fournir une simulation précise. Dans ce cadre, il est nécessaire de s'assurer que dans une simulation, les modifications subies par le tourbillon (dissipation, dispersion, changement de direction, etc.) sont liées à la physique de l'écoulement et non pas d'origine numérique (à cause des propriétés du schéma numérique). La convection d'un vortex isentropique est dans ce cas un très bon candidat de nature non linéaire qui permet d'étudier le comportement des schémas numériques (pour un tourbillon isolé). Ce cas test nécessite aussi la résolution des équations d'Euler dans leur ensemble, contrairement à la convection de l'onde entropique pour laquelle seule la masse volumique était variable. Dans ce cas, la matrice Jacobienne des flux n'est plus constante.

Dans le cas test étudié, un vortex isentropique est superposé à un écoulement uniforme avec une vitesse axiale selon l'axe x. Le domaine est carré de dimensions $L_x = 0.3$ m et $L_y = 0.3$ m. Les quatre bords sont définis comme étant périodiques (Fig. 3.13). Le vortex est défini en utilisant la formulation potentielle suivante [293],

$$\Psi(x, y) = \Gamma e^{-r^2/2}, \tag{3.49}$$

avec Γ l'intensité du vortex et $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}/R_c$ la distance adimensionnée entre (x, y) et le centre du vortex (x_c, y_c). La position initiale du vortex est $x_c = 5R_c$ et $y_c = 5R_c$, avec R_c correspondant au rayon du vortex. Les champs de vitesses et de température initiaux qui en résultent sont les suivants,

$$u_0(x,y) = U_\infty + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty - \Gamma \frac{y - y_c}{R_c} e^{-r^2/2}, \tag{3.50}$$

$$v_0(x,y) = V_\infty - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = V_\infty + \Gamma \frac{x - x_c}{R_c} e^{-r^2/2}, \tag{3.51}$$

$$T_0(x,y) = T_\infty - \frac{1}{2C_p} \Gamma^2 e^{-r^2}, \tag{3.52}$$

avec $C_p = \gamma/(\gamma - 1)R$ la capacité thermique massique à pression constante, γ l'indice adiabatique et R la constante des gaz parfaits.

Le champ de pression initial est déterminé à partir de la relation isentropique suivante,

$$P_0(x,y) = P_\infty \left(\frac{T_0(x,y)}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \tag{3.53}$$

avec U_∞, V_∞, T_∞ et P_∞ la vitesse selon x et y, la température et la pression de l'écoulement uniforme respectivement.

Le champ de masse volumique initial est ensuite déterminé à partir des champs de pression et de température avec la loi des gaz parfaits,

$$\rho_0(x,y) = \frac{P_0(x,y)}{R T_0(x,y)}. \tag{3.54}$$

Pour les simulations présentées par la suite, les différents paramètres sont fixés à $R_c = 0.015$ m, $P_\infty = 101\,325$ Pa, $T_\infty = 300$ K et une vitesse uniforme constante selon la direction x, *i.e.* $U_\infty = 100$ m/s et $V_\infty = 0$ m/s. À noter l'absence de viscosité artificielle pour ces simulations.

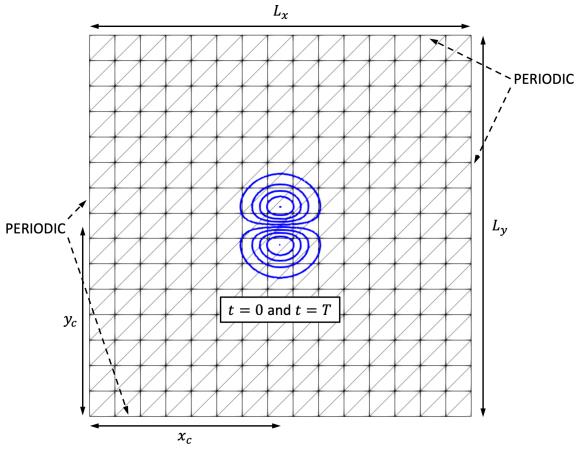
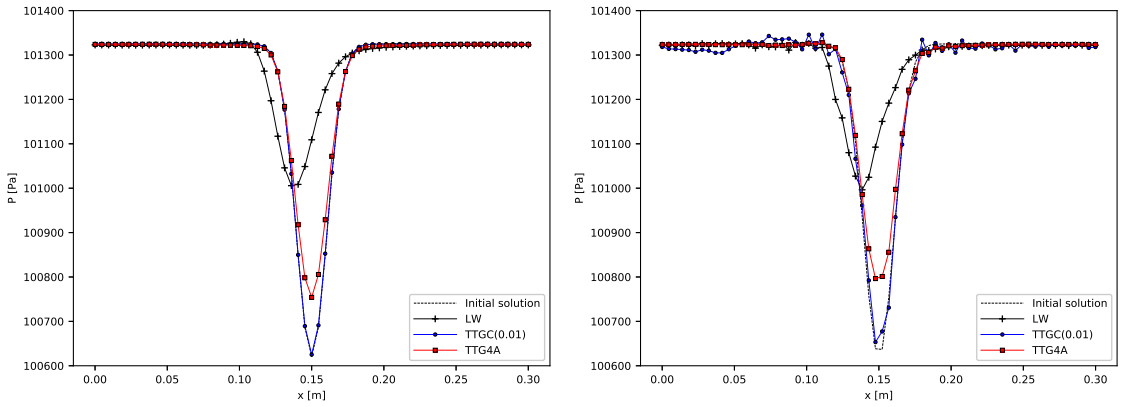


Figure 3.13: Représentation de la configuration de la convection d'un vortex isentropique.

Comme pour le cas test de l'onde entropique, la première étape consiste à comparer les profils d'une grandeur donnée (ici la pression) le long de l'axe $y = 0.15$, parallèle à la direction de convection du vortex, après un tour. Cette comparaison est donnée en Fig. 3.14 pour le raffinement $\Delta x = L_x/64$ et pour deux niveaux de perturbations du maillage, $b_\Delta = 0$ et $b_\Delta = 0.5$. Dans le cas régulier ($b_\Delta = 0$), la différence d'ordre de précision entre LW (ordre 2) et TTGC/TTG4A (ordre 3) est clairement

visible. Comme expliquée en début de chapitre, notamment avec l'Eq. (3.31), l'erreur de troncature de LW est dominée par une dérivée de degré impair qui est donc associée à un phénomène de dispersion. C'est pourquoi la solution obtenue pour LW est très dispersée par rapport aux schémas TTGC(0.01) et TTG4A. Par ailleurs, le faible niveau de dissipation de TTGC(0.01) est clairement mis en évidence par rapport à TTG4A. Après un tour de domaine, l'amplitude de la solution pour TTGC(0.01) est quasiment identique à la solution initiale alors que pour TTG4A, elle est réduite à 80 % de l'amplitude initiale.

Dans le cas du maillage perturbé, les observations sont assez similaires à celles faites pour le maillage régulier. Une différence majeure concernant TTGC(0.01) est toutefois visible. La dégradation de la qualité du maillage entraine l'apparition de *wiggles* à cause du faible niveau de dissipation du schéma pour les petites longueurs d'onde.



(a) $b_\Delta = 0$. (b) $b_\Delta = 0.5$.

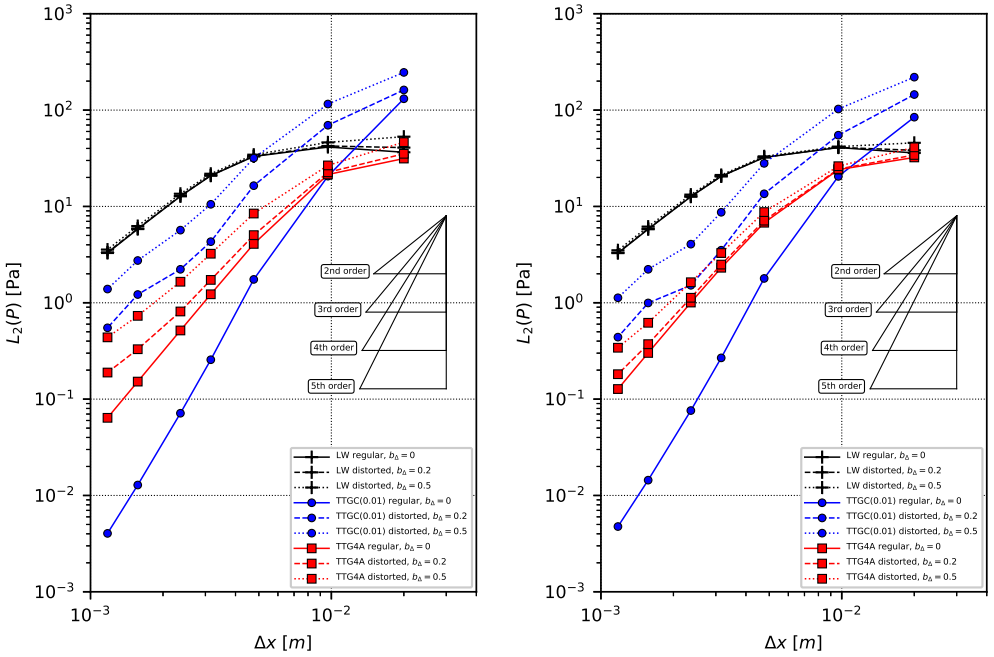
Figure 3.14: Profils de pression en $y = 0.15$ après un tour pour $\Delta x = L_x/64$ pour deux niveaux de perturbations du maillage pour le cas du vortex isentropique.

Comme pour l'onde entropique, pour étudier la sensibilité au maillage des schémas sur le cas de la convection d'un vortex isentropique par le biais de l'ordre de convergence, la norme L_2 de l'erreur sur la pression est calculée en comparant la valeur P obtenue par la simulation à la valeur théorique initiale P_0. Le temps de simulation est choisi pour que le vortex revienne à sa position initiale après un tour de domaine. La norme L_2 sur la pression pondérée par le volume se définit de manière similaire à l'Eq. (3.48) par,

$$L_2(P) = \left[\frac{\sum_{j=0}^{N} V_j \left(P_{0,j} - P_j\right)^2}{\sum_{j=0}^{N} V_j} \right]^{1/2}, \tag{3.55}$$

où V_j est le volume de la cellule duale associée au nœud j et $P_{0,j}$ correspond à la solution analytique associée au nœud j, *i.e.* à l'expression de l'Eq. (3.53).

Les courbes de la convergence en maillage pour les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A à $\nu = 0.3$ et $\nu = 0.7$ pour trois niveaux de perturbations du maillage sont données en Fig. 3.15. Encore une fois, les ordres de convergence obtenus sont en accord avec la théorie, voir meilleurs. Le schéma LW présente un ordre 2 et est quasiment insensible à la qualité du maillage, grâce à son niveau de dissipation important. Comme pour l'onde entropique, l'ordre de convergence de TTGC(0.01) sur maillages réguliers ($b_\Delta = 0$) est supérieur à 4, mais ce dernier est largement dégradé sur les maillages perturbés. TTG4A est moins sensible à la qualité du maillage puisque son ordre de convergence est quasiment inchangé sur maillages irréguliers.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.15: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

3.2.5 Conclusion intermédiaire

À la fin de cette section, différentes observations peuvent être faites concernant les propriétés de chaque schéma :

- Le schéma LW d'ordre 2 en espace et en temps a des niveaux de dissipation et de dispersion largement supérieurs aux schémas TTG. Il faut cependant noter que grâce à sa dissipation élevée, il est très peu sensible à la qualité du maillage et donc très robuste.

- Le schéma TTGC avec sa valeur standard $\gamma = 0.01$ a des propriétés de dissipation et de dispersion très intéressantes. Il présente aussi un ordre de convergence proche de 4 sur maillages réguliers. Néanmoins, son ordre de convergence est fortement dégradé lorsque la qualité du maillage se détériore. Les différents cas précédents ont mis en évidence l'apparition de *wiggles* sur maillages perturbés, liée notamment à son faible niveau de dissipation pour les petites longueurs d'onde.

- Le schéma TTG4A est quant à lui plus dissipatif que TTGC(0.01). Il atteint un ordre de convergence autour de 3. En contrepartie, il est largement moins sensible à la qualité du maillage que TTGC(0.01).

Au final, les trois schémas actuellement présents dans AVBP présentent chacun des limitations propres. En particulier, TTG4A est meilleur que TTGC(0.01) sur des maillages de mauvaise qualité. L'idée des études qui vont suivre et de fournir des pistes d'amélioration aux schémas existants en développant de nouveaux schémas qui seront capables de résoudre les problèmes détaillés précédemment.

Au vu des limitations mises en évidence dans la section précédente, plusieurs pistes peuvent être étudiées pour réduire la sensibilité au maillage des schémas existants sans modifier leur formulation d'un point de vue numérique. Dans les comparaisons précédentes, le schéma TTGC(0.01) s'est révélé être très performant sur maillages réguliers, avec un ordre de convergence au delà de l'ordre

théorique, principalement grâce à un faible niveau de dissipation. Comme montré précédemment, TTGC(0.01) est toutefois très sensible à la qualité du maillage et son ordre de convergence est fortement dégradé quand le maillage devient irrégulier. Dans le cas de TTGC(0.01), la dégradation de l'ordre de convergence est liée à l'apparition de *wiggles* qui ne sont pas détruits à cause du faible niveau de dissipation aux hautes fréquences. Certaines options peuvent donc être investiguées pour atténuer ce phénomène.

Dans un premier temps, l'utilisation de la viscosité artificielle et de l'impact du nombre d'itérations utilisé pour inverser la matrice de masse par la méthode de Jacobi peuvent être considérés. Ces deux leviers sont examinés puisqu'ils ont l'avantage d'être déjà présents dans AVBP. Mais il est important de bien faire la distinction entre ces leviers qui ne sont pas associés aux schémas numériques en eux-mêmes et la formulation numérique des schémas (avec par exemple le choix des coefficients des schémas TTG, la reconstruction de la solution, etc.).

Dans un second temps, il est possible de s'intéresser à la formulation des schémas numériques en elle-même. En comparant les schémas TTGC(0.01) et TTG4A, il est clair que des schémas issus d'une même famille peuvent présenter des propriétés (dissipation, dispersion, sensibilité au maillage, etc.) très différentes. L'idée est donc de comprendre l'impact des coefficients qui définissent un schéma TTG sur ses propriétés associées. En particulier, à l'aide d'un code d'optimisation sous contraintes, il est possible de choisir des fonctions objectifs pour obtenir de nouveaux schémas TTG qui remplissent un certain nombre de conditions vis-à-vis de leurs propriétés.

Enfin, l'impact du paramètre γ qui apparaît dans les coefficients du schéma TTGC peut être spécifiquement considéré. L'ajustement global ou local de ce paramètre permet de modifier significativement les propriétés de dissipation du schéma et donc de contrôler sa sensibilité à la qualité du maillage.

Pour ne pas alourdir ce chapitre, ces différentes tentatives d'améliorations sont présentées en Annexe B.1. En résumé, les différentes options considérées mettent en évidence la difficulté de modifier de manière significative le comportement des schémas existants et aucune option ne permet de résoudre complètement les problèmes rencontrés par les schémas existants. L'objectif de la section qui suit est de développer de nouveaux schémas avec des modifications plus profondes par rapport aux schémas existants.

3.3 Développement de nouveaux schémas

Cette section qui présente le développement de nouveaux schémas se décompose en trois parties. La première s'intéresse à des schémas à trois étapes de la famille Taylor-Galerkin. La finalité des deux dernières parties est de développer de nouvelles familles de schémas à partir du formalisme Petrov-Galerkin. Pour ces schémas, la reconstruction linéaire de la solution au sein de chaque élément des schémas TTG actuels est remplacée par une reconstruction d'ordre plus élevé, ici quadratique, cubique ou quintique. Les résultats présentés dans ces deux parties montreront que l'utilisation d'une reconstruction d'ordre plus élevé permet de réduire significativement la sensibilité au maillage des schémas obtenus, tout en rendant possible une montée en ordre de ces derniers.

3.3.1 Schémas *Three-Step Taylor-Galerkin*

Depuis le début du chapitre, les schémas de la famille TTG sont définis en deux étapes, dites prédicteur/correcteur. Il est néanmoins possible d'aller au-delà, en envisageant des schémas avec trois étapes ou plus. Les travaux de Safjan et Oden [235, 234] présentent par exemple une généralisation des schémas Taylor-Galerkin à plusieurs étapes dans un contexte éléments finis. L'objectif de cette section n'est pas de poursuivre ces travaux pour obtenir des schémas à n étapes avec un domaine de stabilité intéressant, mais plutôt de considérer l'option d'un schéma Taylor-Galerkin à trois étapes pour en étudier les bénéfices potentiels par rapport à leur équivalent à deux étapes. L'intérêt principal de dériver des schémas à trois étapes est d'ajouter de la flexibilité lors de la construction du schéma avec l'addition de 6 coefficients supplémentaires à définir par rapport aux schémas TTG à deux étapes. Ces coefficients permettent en particulier de mieux contrôler les propriétés de dissipation et de dispersion du schéma construit.

Pour un schéma à trois étapes, le système d'équations s'écrit,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n\right) &= -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right), \\
\mathbf{M}\left(\tilde{\tilde{\mathbf{U}}}^n - \mathbf{U}^n\right) &= -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\
&\quad + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \epsilon_2\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right), \\
\mathbf{M}\left(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\right) &= -\Delta t\left(\mu_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \mu_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right) + \mu_3\mathbf{L}\left(\tilde{\tilde{\mathbf{U}}}^n\right)\right) \\
&\quad + \Delta t^2\left(\delta_1\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \delta_2\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right) + \delta_3\mathbf{L}\mathbf{L}\left(\tilde{\tilde{\mathbf{U}}}^n\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

avec les coefficients (α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2, μ_1, μ_2, μ_3, δ_1, δ_2, δ_3) qui définissent le schéma.

Pour déterminer les contraintes à imposer sur les coefficients, la méthodologie est la même que pour les schémas à deux étapes. Elle consiste à réaliser dans un premier temps une transformée de Fourier du système précédent pour obtenir le coefficient d'amplification de cette nouvelle famille de schémas, appelée TTG-3S,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\mathrm{TTG-3S}}(k) &= 1 - \left(i\alpha\nu\sin(k\Delta x) - 4\beta\nu^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^{-1}, \\
\tilde{\tilde{G}}_{\mathrm{TTG-3S}}(k) &= 1 - \Bigg[i\nu\left(\theta_1\sin(k\Delta x) + \theta_2\sin(kh)\tilde{G}_{\mathrm{TTG-3S}}(k)\right) \\
&\quad + 4\nu^2\left(\epsilon_1\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + \epsilon_2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\tilde{G}_{\mathrm{TTG-3S}}(k)\right)\Bigg]\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^{-1}, \\
G_{\mathrm{TTG-3S}}(k) &= 1 - \Bigg[i\nu\left(\mu_1\sin(k\Delta x) + \mu_2\sin(kh)\tilde{G}_{\mathrm{TTG-3S}}(k) + \mu_3\sin(k\Delta x)\tilde{\tilde{G}}_{\mathrm{TTG-3S}}(k)\right) \\
&\quad + 4\nu^2\left(\delta_1\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + \delta_2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\tilde{G}_{\mathrm{TTG-3S}}(k) + \delta_3\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\tilde{\tilde{G}}_{\mathrm{TTG-3S}}(k)\right)\Bigg] \\
&\quad \times\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Dans un second temps, un développement de Taylor à l'ordre 5, donné par l'Eq. (3.58), permet de déterminer les contraintes à imposer sur les coefficients pour garantir un ordre 5 en temps ($a_i = \frac{1}{i!}$). Les contraintes obtenues sont données par le système (3.59). Malheureusement, ces contraintes conduisent à un système indéterminé et il n'est pas donc pas possible de définir un schéma à trois étapes sous la forme précédente avec un ordre 5 en temps. Le développement de Taylor est donc fait uniquement jusqu'à l'ordre 4, et les contraintes obtenues sont listées par le système (3.60). Étant donné que le système ne contient que 5 équations, 7 paramètres restent à déterminer sur l'ensemble des coefficients de la famille de schéma. Cela présente l'avantage de donner une grande flexibilité au niveau des propriétés des schémas lors de leur construction, ce qui était le but recherché, justifiant l'exploration présente.

$$z(\xi) = 1 - a_1 i\nu\xi - a_2\nu^2\xi^2 + a_3 i\nu^3\xi^3 + a_4\nu^4\xi^4 + a_5\nu^5\xi^5 + O\left(\xi^6\right). \tag{3.58}$$

Système de contraintes sur les coefficients pour garantir un ordre 5 en temps :

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2+\mu_3=1, \\ \alpha\mu_2+\mu_3(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{1}{2}, \\ \alpha\mu_3\theta_2=\dfrac{1}{6}, \\ \alpha\delta_3\theta_2+\alpha\epsilon_2\mu_3+\beta\delta_2+\beta\mu_3\theta_2+\delta_3(\epsilon_1+\epsilon_2)=\dfrac{1}{24}, \\ \delta_1+\delta_2+\delta_3=0, \\ \alpha\delta_3\epsilon_2+\beta\delta_3\theta_2+\beta\epsilon_2\mu_3=\dfrac{1}{120}, \\ \alpha\delta_2+\beta\mu_2+\delta_3(\theta_1+\theta_2)+\mu_3(\epsilon_1+\epsilon_2)=0, \\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=0. \end{cases} \implies \text{indéterminé.} \tag{3.59}$$

Système de contraintes sur les coefficients pour garantir un ordre 4 en temps :

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2+\mu_3=1, \\ \alpha\mu_2+\mu_3(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{1}{2}, \\ \alpha\mu_3\theta_2+\alpha\delta_2+\beta\mu_2+\delta_3(\theta_1+\theta_2)+\mu_3(\epsilon_1+\epsilon_2)=\dfrac{1}{6}, \\ \alpha\delta_3\theta_2+\alpha\epsilon_2\mu_3+\beta\delta_2+\beta\mu_3\theta_2+\delta_3(\epsilon_1+\epsilon_2)=\dfrac{1}{24}, \\ \delta_1+\delta_2+\delta_3=0. \end{cases} \tag{3.60}$$

La grande liberté pour le choix des coefficients implique qu'il ne peut pas se faire manuellement. Ainsi, en utilisant le même code d'optimisation que celui décrit dans l'Annexe B.1.3, un front de Pareto est construit pour l'ensemble des paramètres (α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2, μ_1, μ_2, μ_3, δ_1, δ_2, δ_3) tout en garantissant la contrainte d'ordre 4 en temps, *i.e* le système (3.60) et la stabilité du schéma sur toute la place de fréquences, soit $|G(\xi)|<1,\ \forall\xi\in[0,\pi]$. Les fonctions objectifs sont les mêmes que pour l'optimisation faite sur les schémas à deux étapes en Annexe B.1.3, *i.e.*,

$$\min \begin{cases} \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{\nu}(\pi-\xi_m^{\nu})_{\text{dissip}}\,, \\ \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{\nu}(\pi-\xi_m^{\nu})_{\text{dispers}}\,, \\ \xi\in[0;\pi], \\ \nu\in[0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9]. \end{cases} \tag{3.61}$$

À partir du front de Pareto obtenu, deux schémas sont sélectionnés. Le premier, nommé TTG1-3S, est choisi avec un niveau de dissipation aux hautes fréquences compris entre ceux de TTGC(0.01)

et TTG4A. Le deuxième, appelé TTG2-3S, a quant à lui un niveau de dissipation plus faible comparable à celui de TTGC(0.01). Les paramètres associés à ces deux schémas sont donnés par le système (3.62),

$$\begin{cases} \alpha = 3837/4834, \\ \beta = 34/157, \\ \theta_1 = 700/1087, \\ \theta_2 = -3569/4729, \\ \epsilon_1 = 630/9841, \\ \epsilon_2 = -7589/8588, \\ \mu_1 = 249989/442136, \\ \mu_2 = 175226/289149, \\ \mu_3 = -1377/8033, \\ \delta_1 = 114875/520283, \\ \delta_2 = -46693/181874, \\ \delta_3 = 8137/226409, \end{cases} \quad \text{(TTG1-3S)} \qquad \begin{cases} \alpha = 3245/5388, \\ \beta = 75/2174, \\ \theta_1 = 4865/6641, \\ \theta_2 = -10482/8743, \\ \epsilon_1 = -995/9758, \\ \epsilon_2 = -2902/7437, \\ \mu_1 = 446203/918599, \\ \mu_2 = 464687/671199, \\ \mu_3 = -315/1769, \\ \delta_1 = 79937/683587, \\ \delta_2 = -79925/667434, \\ \delta_3 = 1464/520607. \end{cases} \quad \text{(TTG2-3S)} \tag{3.62}$$

Une fois les coefficients des deux schémas choisis, la pulsation temporelle modifiée associée à TTG1-3S et TTG2-3S peut être déterminée, lorsque $k \to 0$,

$$\begin{aligned} \Omega^*_{TTG1-3S}(k) = kc - c\Delta x^4 \left(\frac{610}{92261}\nu^4 + \frac{130}{24383}\nu^2 + \frac{1}{180}\right) k^5 \\ - ic\Delta x^5 \nu^3 \left(\frac{888}{99247} - \frac{140}{84599}\nu^2\right) k^6 + \mathcal{O}\left(k^7\right), \end{aligned} \tag{3.63}$$

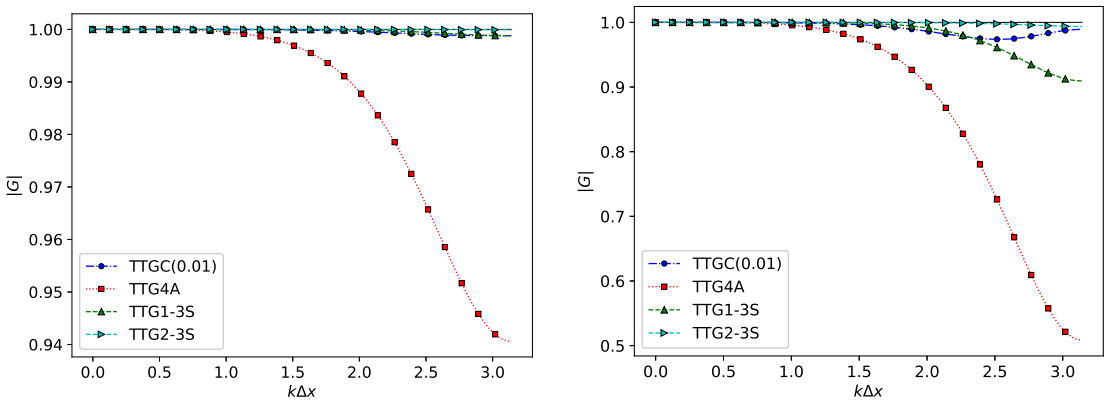
$$\begin{aligned} \Omega^*_{TTG2-3S}(k) = kc - c\Delta x^4 \left(\frac{644}{95927}\nu^4 + \frac{179}{56389}\nu^2 + \frac{1}{180}\right) k^5 \\ - ic\Delta x^5 \nu^3 \left(\frac{1}{6182} + \frac{421}{79634}\nu^2\right) k^6 + \mathcal{O}\left(k^7\right). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Ce qui donne accès à l'équation modifiée des deux schémas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = c\Delta x^4 \left(\frac{610}{92261}\nu^4 + \frac{130}{24383}\nu^2 + \frac{1}{180}\right) \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \\ + c\Delta x^5 \nu^3 \left(\frac{888}{99247} - \frac{140}{84599}\nu^2\right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}\left(\Delta x^6\right), \quad \text{(TTG1 - 3S)} \end{aligned} \tag{3.65}$$

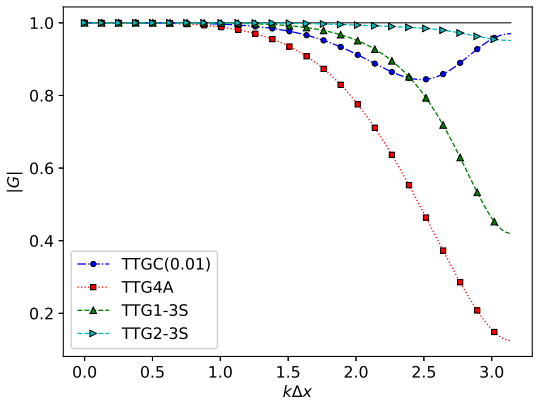
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = c\Delta x^4 \left(\frac{644}{95927}\nu^4 + \frac{179}{56389}\nu^2 + \frac{1}{180}\right) \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \\ + c\Delta x^5 \nu^3 \left(\frac{1}{6182} + \frac{421}{79634}\nu^2\right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}\left(\Delta x^6\right). \quad \text{(TTG2 - 3S)} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Le gain en termes d'ordre est alors clairement visible puisque le terme en $\partial^4 u/\partial x^4$ est absent des Eqs. (3.65) et (3.66), alors que ce n'était pas le cas pour les schémas à deux étapes présentés en début de chapitre. La différence au niveau des propriétés de dissipation est aussi directement présente en comparant le terme en $\partial^6 u/\partial x^6$ des deux équations précédentes (pour rappel les dérivées d'ordre pair sont liées à la dissipation et les dérivées d'ordre impair à la dispersion d'un schéma). À une valeur de ν donnée, ce terme est plus faible pour TTG2-3S que pour TTG1-3S. Cette observation se confirme en analysant la dissipation numérique des deux schémas pour différentes valeurs de CFL (Fig. 3.16). De même, la dispersion des nouveaux schémas est aussi comparée aux schémas classiques TTGC(0.01) et TTG4A en Fig. 3.17. Le comportement de TTG1-3S et TTG2-3S est assez proche des schémas de référence.

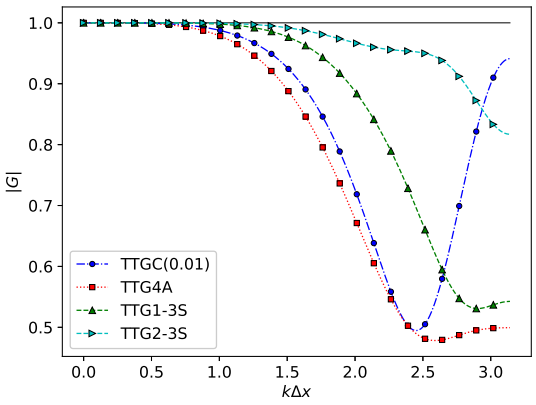


(a) $\nu = 0.1$.

(b) $\nu = 0.3$.

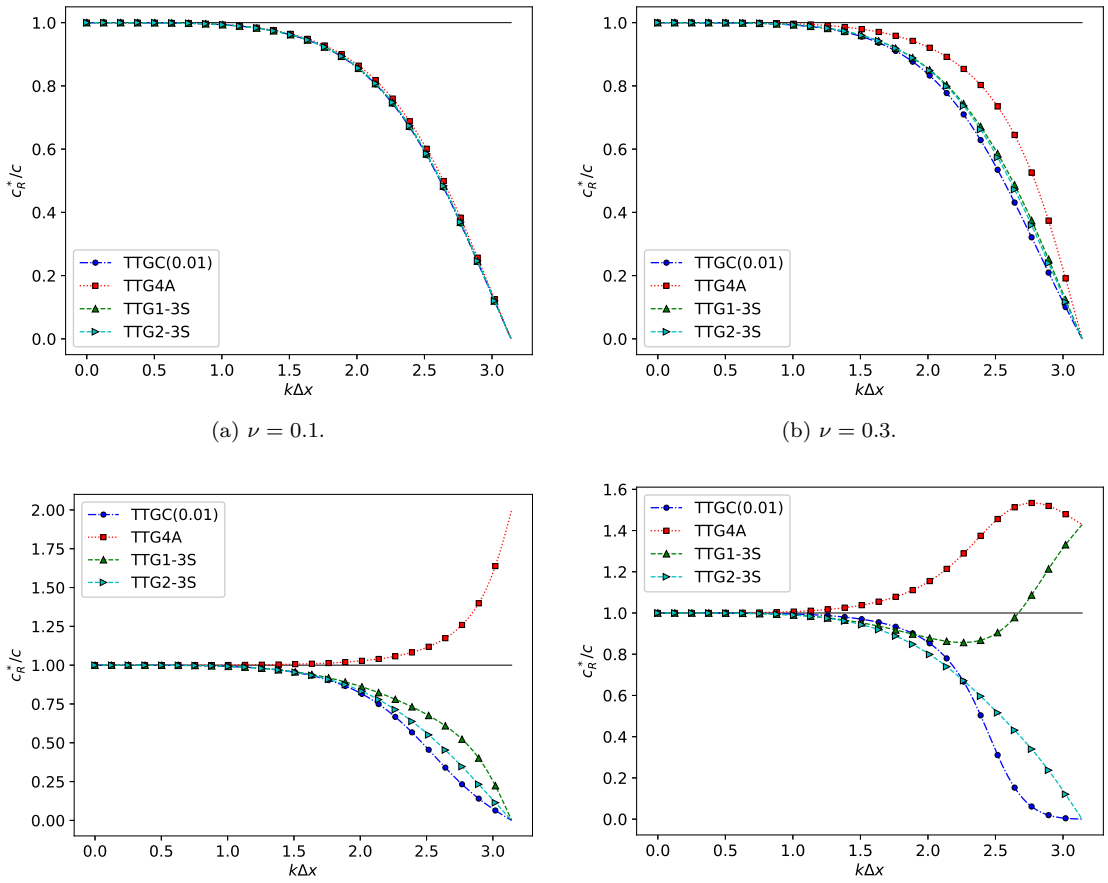


(c) $\nu = 0.5$.



(d) $\nu = 0.7$.

Figure 3.16: Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.



(a) $\nu = 0.1$.

(b) $\nu = 0.3$.

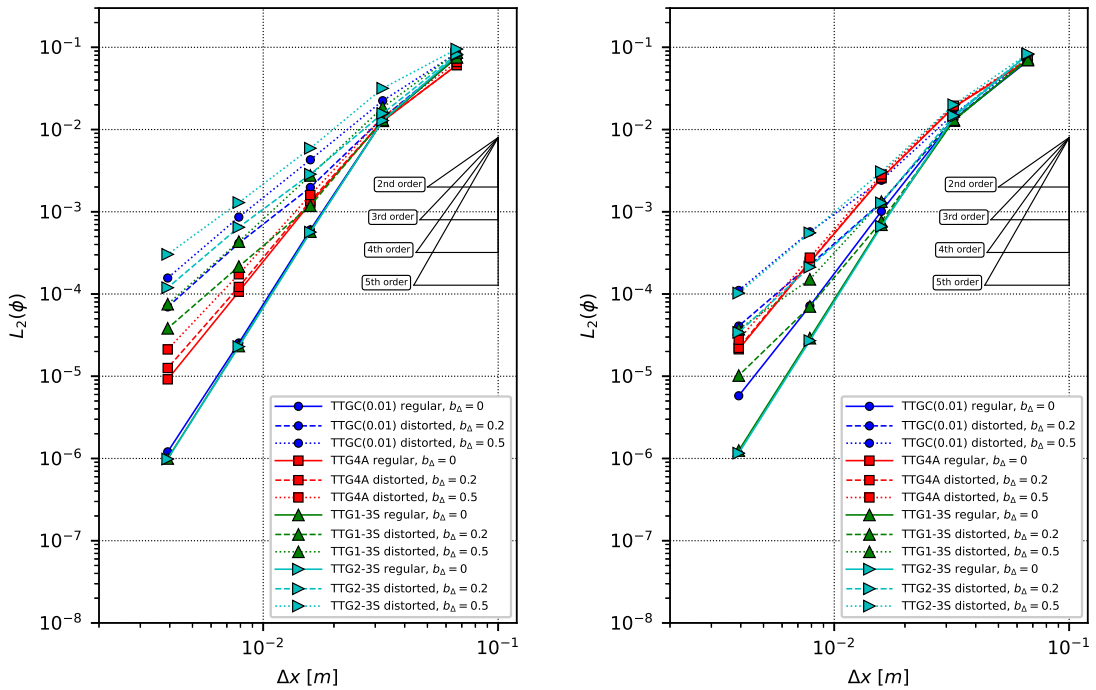
(c) $\nu = 0.5$.

(d) $\nu = 0.7$.

Figure 3.17: Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

La sensibilité au maillage des deux nouveaux schémas est aussi comparée à TTGC(0.01) et TTG4A sur le cas de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle en étudiant leur ordre de convergence sur des maillages avec différents niveaux de perturbations (Fig. 3.18). À $\nu = 0.7$ sur maillages réguliers, le gain en ordre de convergence de TTG1-3S et TTG2-3S est clairement visible par rapport à TTGC(0.01) et TTG4A. À $\nu = 0.3$, toujours sur maillages réguliers, la différence avec TTGC(0.01) est moins marquée. Cela s'explique par le faible niveau de dissipation de TTGC(0.01), alors que la dispersion de TTG1-3S et TTG2-3S est très comparable à TTGC(0.01) à cette valeur de CFL.

Sur maillages perturbés, le comportement est moins satisfaisant. L'erreur des deux schémas est supérieure à celle de TTG4A, et TTG2-3S est même plus sensible à la qualité du maillage que TTGC(0.01) à $\nu = 0.3$. En conclusion, l'utilisation d'un schéma à trois étapes ne permet pas de solutionner les problèmes des schémas standards déjà énoncés. À noter qu'il pourrait sembler intéressant de définir les coefficients d'un schéma à trois étapes de telle sorte à ce qu'il présente des propriétés de dissipation proche de TTG4A. De cette manière, ce schéma pourrait à la fois combiner l'ordre 4 en espace d'un schéma à trois étapes et la faible sensibilité au maillage d'un schéma avec une dissipation comparable à TTG4A. Malheureusement, il n'est pas faisable de construire un tel schéma. L'absence du terme en $\partial^4 u/\partial x^4$ de l'équation modifiée d'un schéma à trois étapes implique qu'il n'est pas possible d'atteindre des valeurs de dissipation aussi élevées que TTG4A.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.18: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

Les différents schémas présentés jusqu'à maintenant sont tous issus du formalisme de Galerkin, c'est-à-dire que lors de la discrétisation, les fonctions de forme et les fonctions tests sont identiques et linéaires. Même si certains possédaient des propriétés intéressantes, ils n'ont pas été en mesure d'apporter une solution idéale au problème initial qui était de construire un schéma qui satisfait à la fois les contraintes de dissipation d'une simulation aux grandes échelles ainsi qu'une faible sensibilité à la qualité du maillage. Une nouvelle piste est donc considérée dans la suite du chapitre pour répondre à ce problème et consiste à introduire une nouvelle classe de schémas issue du formalisme Petrov-Galerkin.

3.3.2 Nouvelle famille de schémas utilisant le formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique

L'idée d'utiliser une reconstruction polynomiale au sein de chaque élément du maillage n'est pas nouvelle. La méthode ENO (*essentially non-oscillatory*) introduite par Harten [124] et la méthode WENO (*weighted essentially non-oscillatory*) développée en premier par Liu [172] à partir des schémas ENO sont des bons exemples, et sont particulièrement utilisées en parallèle d'un formalisme volumes finis ou différences finies. Les travaux de Luo [175] ont aussi eu pour but d'utiliser la méthode WENO avec un formalisme Galerkin discontinu [18], qui réunit les propriétés de la méthode des éléments finis (approximation polynomiale de la solution par cellule) à celles de la méthode des volumes finis (calcul des flux aux interfaces des cellules du maillage).

Des exemples récents dans la littérature font également état du développement de méthodes *fluctuation splitting* plus précises pour des problèmes en régime permanent et instationnaires. Ceci a conduit à la création de plusieurs schémas d'ordre 3 et supérieur. Le premier schéma *fluctuation splitting* d'ordre 3 a été présenté par Caraeni *et al.* [39, 40, 41] et utilise une représentation quadratique de la solution dans chaque cellule du maillage par la reconstruction des gradients nodaux. Les gradients nodaux sont calculés à l'aide d'une méthode des moindres carrés, garantissant

une précision d'ordre 2 pour les gradients *cell-vertex*. Les valeurs de la solution sont ensuite extrapolées aux centres des arrêtes de chaque cellule, désignés comme des nœuds virtuels, en utilisant ces gradients.

Abgrall, en collaboration avec Roe [10] ainsi que Mezine et Andrianov [5, 7], ont proposé une idée similaire, mais en construisant la fluctuation d'ordre supérieur en utilisant l'information supplémentaire de la solution stockée au niveau de nœuds additionnels générés par une sous-division du maillage initial. La solution est stockée et mise à jour à tous les nœuds du sous-maillage et la distribution des fluctuations est effectuée sur chaque sous-triangle.

Les travaux présentés par Hubbard [130, 132] ont pour objectif d'utiliser les deux méthodes précédentes pour construire un interpolant quadratique et continu par morceaux et conduit à des méthodes d'ordre 3. La distribution de la fluctuation d'ordre élevé est faite de manière à préserver la positivité, en introduisant un limiteur pour l'interpolant, ce qui a pour effet de supprimer toute oscillation non physique dans la solution.

Dumbser *et al.* [91, 93, 92] ont par ailleurs proposé une méthode pour constuire des schémas Galerkin discontinus à une étape, sans quadrature et d'ordre élevé sur des maillages triangulaires et tétraédriques. Ces schémas sont issus d'une classe plus générale de schémas appelée $P_N P_M$, pour lesquels la solution au sein de chaque élément est décrite par des polynômes continus par morceaux de degré N et les flux sont calculés par des polynômes eux aussi continus par morceaux de degré $M \geq N$. Cette nouvelle classe de schémas produit des algorithmes plus efficaces en termes de calcul que les schémas Galerkin discontinus classiques, principalement dû au fait que le pas de temps est seulement limité par les polynômes de degré N représentant la solution et non par les polynômes de degré M utilisés pour le calcul du flux.

D'autres articles sur des sujets similaires sont aussi disponibles dans la littérature, en particulier les travaux d'Abgrall et Ricchiuto [8, 9] et Wang *et al.* [284] qui présentent l'avantage de passer en revue un ensemble de méthodes ordre élevé, ainsi que différentes perspectives pour leur utilisation en CFD.

L'objectif de cette section est sur cette base d'introduire l'utilisation d'une reconstruction polynomiale au sein de chaque élément, dans un formalisme purement éléments finis grâce à la méthode de Petrov-Galerkin [138]. Cette section se décompose en trois parties principales. La première décrit les étapes de construction d'un schéma de la famille Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique de la solution dans un cas monodimensionnel, en particulier l'obtention des différents termes propres aux schémas issus d'un développement de Taylor en temps. La deuxième partie fournit une analyse du nouveau schéma obtenu similaire à celle présentée pour les schémas existants, avec notamment les propriétés de dissipation et de dispersion, ainsi que l'ordre de convergence. La dernière partie étend la méthode de reconstruction quadratique aux configurations multidimensionnelles, tout en validant la méthodologie sur les cas tests académiques utilisés précédemment.

Cas monodimensionnel

Pour étudier le formalisme Petrov-Galerkin, un domaine monodimensionnel est dans la suite considéré et discrétisé par un maillage irrégulier. Sur un tel maillage, le pas d'espace entre deux nœuds i et j s'écrit $\Delta x_{(i+j)/2}$ (Fig. 3.19).

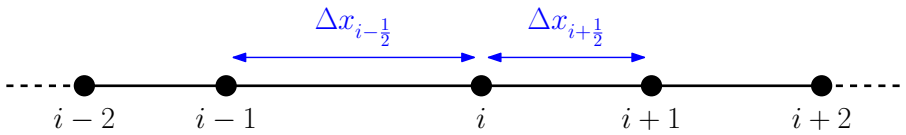


Figure 3.19: Discrétisation d'un domaine monodimensionnel par un maillage irrégulier.

Dans le cas de l'équation de convection en 1D, grâce à la compacité du support des fonctions tests, pour le nœud i, l'Eq. (3.1) se discrétise par le formalisme Taylor-Petrov-Galerkin comme,

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(U^{n+1}(x) - U^n(x)\right)\psi_i dx = c\Delta t \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial U^n(x)}{\partial x}\psi_i\right) dx \\ - c^2\Delta t^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial U^n(x)}{\partial x}\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) dx.\end{aligned} \tag{3.67}$$

La fonction d'interpolation $U^n(x)$ peut ensuite et dans le cas général s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions de forme ϕ_i,

$$U^n(x) = \sum U_i^n \phi_i(x). \tag{3.68}$$

En considérant les deux nœuds $i-1$ et $i+1$ du voisinage direct du nœud i, un développement de Taylor autour de la position i donne le système linéaire suivant,

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}(\Delta x_{i+\frac{1}{2}})^2 \\ -\Delta x_{i-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}(\Delta x_{i-\frac{1}{2}})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_0 U_i \\ \delta^2 U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i+1} - U_i \\ U_{i-1} - U_i \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

avec $\Delta_0 U_i$ et $\delta^2 U_i$ les opérateurs nodaux du gradient et de la Hessienne respectivement. L'inversion du système linéaire précédent permet d'obtenir les opérateurs nodaux en fonction des valeurs nodales et des propriétés géométriques du maillage. L'expression du gradient $\Delta_0 U_i$ est alors donnée par,

$$\begin{aligned}\Delta_0 U_i &= \frac{\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}(U_{i+1} - U_i) + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}(U_i - U_{i-1})}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}(x_i) + \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x)^3,\end{aligned} \tag{3.70}$$

avec une précision d'ordre 2 quelle que soit la régularité du maillage. De la même façon, la Hessienne $\delta^2 U_i$ s'écrit,

$$\begin{aligned}\delta^2 U_i &= \frac{2\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) - \Delta x_{i+\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1})\right)}{\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i) + \frac{1}{3}\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x)^2,\end{aligned} \tag{3.71}$$

qui est d'ordre 2 sur maillages réguliers et d'ordre 1 sur maillages quelconques. À noter que ces deux opérateurs sont aussi exacts pour une solution initiale quadratique quelle que soit la qualité du maillage. Sur maillage régulier, les opérateurs précédents correspondent clairement à la discrétisation centrée classique d'ordre 2 des dérivées première et seconde,

$$\Delta_0 U_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x_i) + \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x)^3, \tag{3.72}$$

$$\delta^2 U_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \tag{3.73}$$

Dans le cas d'un domaine monodimensionnel, la reconstruction quadratique de la solution au sein de chaque élément s'exprime comme un polynôme d'ordre 2. L'idée est de s'affranchir des fonctions de forme de l'Eq. (3.68) et de définir directement la fonction d'interpolation de la solution sous forme quadratique dans chaque élément. Cette reconstruction quadratique peut ensuite être utilisée pour remplacer les $U^n(x)$ dans l'Eq. (3.67) et ainsi assurer l'avancement en temps de la solution. Par exemple, pour l'élément $[x_i, x_{i+1}]$, cette reconstruction quadratique s'écrit,

$$U_e(x) = a + b(x - x_i) + c(x - x_i)^2, x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{3.74}$$

Pour déterminer les coefficients du polynôme précédent, trois conditions sont nécessaires. Les deux premières sont choisies comme les valeurs nodales des nœuds i et $i+1$. La dernière condition correspond à la valeur $U^*_{i+\frac{1}{2}}$ au centre de l'élément $[x_i, x_{i+1}]$, à la position $x_{i+\frac{1}{2}}$ (cette valeur est déterminée par la suite). Ce qui donne les contraintes suivantes,

$$U_e(x_i) = U_i, \quad U_e(x_{i+1}) = U_{i+1}, \quad U_e\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = U^*_{i+\frac{1}{2}}. \tag{3.75}$$

Différentes possibilités sont envisageables pour obtenir la valeur au centre de l'élément $[x_i, x_{i+1}]$. La méthode la plus courante consiste à calculer cette valeur à partir d'une extrapolation des nœuds i et $i+1$. Dans les travaux présentés ici, $U^L_{i+\frac{1}{2}}$ (valeur provenant du nœud i) et $U^R_{i+\frac{1}{2}}$ (valeur provenant du nœud $i+1$) sont obtenus grâce aux opérateurs nodaux de dérivées premières et secondes calculés précédemment ($\Delta_0 U_i$, $\Delta_0 U_{i+1}$, $\delta^2 U_i$ et $\delta^2 U_{i+1}$). Étant donné que $U^*_{i+\frac{1}{2}}$ est localisé au centre de l'élément $[x_i, x_{i+1}]$, une extrapolation des valeurs nodales à cette position permet de déterminer facilement et avec précision $U^L_{i+\frac{1}{2}}$ et $U^R_{i+\frac{1}{2}}$. En pratique, les deux termes sont calculés à partir des relations suivantes,

$$\begin{aligned} U^L_{i+\frac{1}{2}} &= U_i + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2}\Delta_0 U_i + \frac{\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)^2}{8}\delta^2 U_i, \\ U^R_{i+\frac{1}{2}} &= U_{i+1} - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2}\Delta_0 U_{i+1} + \frac{\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)^2}{8}\delta^2 U_{i+1}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

La valeur au centre de l'élément $U^*_{i+\frac{1}{2}}$ est obtenue par l'Eq. (3.77) en moyennant les deux extrapolations précédentes (qui correspond à une extrapolation centrée, mais d'autres possibilités existent comme par exemple une extrapolation *upwind* pour laquelle la valeur nodale en amont de la direction de l'écoulement serait utilisée),

$$U^*_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U^L_{i+\frac{1}{2}} + U^R_{i+\frac{1}{2}}). \tag{3.77}$$

Avec les Eqs. (3.76) et (3.77), il est maintenant possible de déterminer la troisième contrainte du système (3.75) pour définir complètement le polynôme $U_e(x)$ au sein de chaque élément. Au

final, le formalisme Taylor-Petrov-Galerkin fait apparaître trois termes présents dans l'Eq. (3.67) devant être calculés, qui font intervenir l'expression de $U_e(x)$ trouvée ci-avant, *i.e.*,

$$\begin{aligned} L_i &= c \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\psi_i(x)dx, \\ LL_i &= c^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x)dx, \\ MU_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_e(x)\psi_i(x)dx. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Ces termes s'apparentent aux Eqs. (2.62), (2.63) et (2.64) obtenus pour le formalisme Taylor-Galerkin classique (pour lequel $\psi_i = \phi_i$ alors que $\psi_i \neq \phi_i$ pour le formalisme Taylor-Petrov-Galerkin).

Avec le nouveau formalisme Taylor-Petrov-Galerkin, comme pour les schémas TTG classiques, les fonctions ψ correspondent à des fonctions tests linéaires et pour le nœud i, ψ_i s'exprime par exemple comme,

$$\psi_i = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{(x - x_i)}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\right) & x \in [x_i, x_{i+1}]\,, \\ \left(1 + \dfrac{(x - x_i)}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\right) & x \in [x_{i-1}, x_i]\,. \end{cases} \tag{3.79}$$

Une illustration des fonctions ψ, dites fonctions "chapeaux" sur un maillage monodimensionnel irrégulier est donnée en Fig. 3.20.

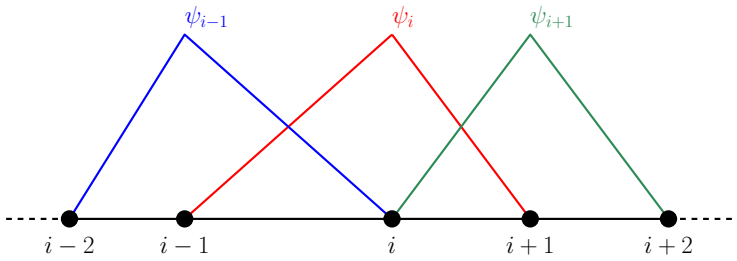


Figure 3.20: Illustration de la configuration monodimensionnelle avec les fonctions de forme associées aux nœuds $i-1$, i et $i+1$.

La suite de l'étude du formalisme pourrait se poursuivre sur maillage irrégulier. Néanmoins, pour simplifier les expressions, le pas d'espace Δx est considéré comme constant dans un premier temps dans la suite de la section, *i.e.*,

$$\Delta x = \Delta x_{i+\frac{1}{2}} = \Delta x_{i-\frac{1}{2}}. \tag{3.80}$$

Pour déterminer l'équivalence du schéma sur maillage régulier, les opérateurs L_i, LL_i et l'opérateur de matrice de masse MU_i de l'Eq. (3.78) sont calculés pour les deux éléments en contact avec le nœud d'indice i (donc les éléments $[x_i, x_{i+1}]$ et $[x_{i-1}, x_i]$).

- Élément $[x_i, x_{i+1}]$

  Les gradients et Hessiennes nodaux des nœuds i et $i+1$ se définissent par,

$$\begin{aligned}\Delta_0 U_i =& \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2\Delta x}, \qquad \Delta_0 U_{i+1} = \frac{U_{i+2}-U_i}{2\Delta x},\\ \delta^2 U_i =& \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{\Delta x^2}, \qquad \delta^2 U_{i+1} = \frac{U_{i+2}-2U_{i+1}+U_i}{\Delta x^2}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

L'extrapolation au centre de la cellule $[x_i, x_{i+1}]$ à partir des opérateurs nodaux introduite par l'Eq. (3.76) donne respectivement pour le nœud à gauche $U^L_{i+\frac{1}{2}}$, *i.e.* le nœud i, et pour le nœud à droite $U^R_{i+\frac{1}{2}}$, *i.e.* le nœud $i+1$,

$$\begin{aligned}U^L_{i+\frac{1}{2}} &= U_i + \frac{\Delta x}{2}\Delta_0 U_i + \frac{(\Delta x)^2}{8}\delta^2 U_i,\\ U^R_{i+\frac{1}{2}} &= U_{i+1} - \frac{\Delta x}{2}\Delta_0 U_{i+1} + \frac{(\Delta x)^2}{8}\delta^2 U_{i+1}.\end{aligned} \tag{3.82}$$

La valeur extrapolée au centre de la cellule $U^*_{i+\frac{1}{2}}$ peut alors s'exprimer par l'Eq. (3.77) à partir des valeurs extrapolées à gauche et à droite. À partir de cette valeur au centre de la cellule, il est maintenant possible de définir le polynôme quadratique qui décrit l'évolution de la solution U au sein de la cellule $[x_i, x_{i+1}]$ à l'aide des Eqs. (3.74) et (3.75). Cela donne après calcul,

$$\begin{aligned}U_e(x) = U_i &+ \left(\frac{-U_{i+1}+4U^*_{i+\frac{1}{2}}-3U_i}{\Delta x}\right)(x-x_i)\\ &+ 2\left(\frac{U_{i+1}-2U^*_{i+\frac{1}{2}}+U_i}{\Delta x^2}\right)(x-x_i)^2 \quad \text{pour} \quad x\in[x_i,x_{i+1}]\,.\end{aligned} \tag{3.83}$$

- Élément $[x_{i-1}, x_i]$

  La méthode est la même pour déterminer le polynôme quadratique au sein de l'élément $[x_{i-1}, x_i]$. L'expression obtenue est la suivante,

$$\begin{aligned}U_e(x) = U_{i-1} &+ \left(\frac{-U_i+4U^*_{i-\frac{1}{2}}-3U_{i-1}}{\Delta x}\right)(x-x_{i-1})\\ &+ 2\left(\frac{U_i-2U^*_{i-\frac{1}{2}}+U_{i-1}}{\Delta x^2}\right)(x-x_{i-1})^2 \quad \text{pour} \quad x\in[x_{i-1},x_i]\,.\end{aligned} \tag{3.84}$$

Grâce aux polynômes quadratiques de la solution définis dans chaque cellule par les Eqs. (3.83)-(3.84) et en utilisant la fonction test ψ_i du nœud i, les opérateurs L_i, LL_i et MU_i de l'Eq. (3.78) peuvent être calculés explicitement en fonction des valeurs nodales. À noter que de façon concrète, les intégrales sont calculées séparément sur les segments $[x_{i-1}, x_i]$ et $[x_i, x_{i+1}]$. Après quelques lignes de calcul, les expressions suivantes sont obtenues,

$$L_i = c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\psi_i(x)dx = -\frac{c}{24}\left(-U_{i-2} + 14U_{i-1} - 14U_{i+1} + U_{i+2}\right), \tag{3.85}$$

$$LL_i = c^2\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x)dx = \frac{c^2}{\Delta x}\left(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}\right), \tag{3.86}$$

$$MU_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_e(x)\psi_i(x)dx = \frac{\Delta x}{48}\left(-U_{i-2} + 8U_{i-1} + 34U_i + 8U_{i+1} - U_{i+2}\right). \tag{3.87}$$

Par rapport aux opérateurs introduits au début de la Section 3.2.1 pour discrétiser les dérivées d'ordre 1 et 2 ainsi que le terme associé à la matrice de masse dans le cas du formalisme Taylor-Galerkin classique, ces opérateurs sont modifiés pour le formalisme Petrov-Taylor-Galerkin avec reconstruction quadratique au sein de chaque cellule du domaine. Les nouveaux opérateurs en équivalence différences finies s'expriment alors comme (l'opérateur de dérivée d'ordre 2 reste identique au formalisme Taylor-Galerkin),

$$\Delta_{0,R2} = \frac{1}{24}(-E^2 + 14E - 14E^{-1} + E^{-2}), \tag{3.88}$$

$$\delta^2_{R2} = \delta^2 = (E - 2 + E^{-1}), \tag{3.89}$$

$$M_{R2} = \frac{1}{48}(-E^2 + 8E + 34 + 8E^{-1} - E^{-2}). \tag{3.90}$$

L'utilisation de la reconstruction quadratique entraine clairement un élargissement du stencil du schéma. Contrairement aux fonctions de forme linéaires des schémas Taylor-Galerkin classiques, dont le stencil se limite aux plus proches voisins, le nouveau formalisme implique aussi le deuxième niveau de voisinage de chaque nœud.

De la même manière que pour la famille de schémas TTG, la nouvelle famille de schémas introduite dans cette section peut aussi s'exprimer en deux étapes. Dans la suite du chapitre, ils seront appelés TTG-R2 pour *Two-step Taylor-Galerkin* avec reconstruction quadratique (R2 pour reconstruction d'ordre 2). Selon cette règle, la même famille de schémas avec une reconstruction cubique s'écrirait TTG-R3.

Avec ce formalisme, les schémas de la famille TTG-R2 s'expriment comme,

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_j^n &= U_j^n - M_{R2}^{-1}\left(\alpha\nu\Delta_{0,R2}U_j^n - \beta\nu^2\delta^2_{R2}U_j^n\right), \\
U_j^{n+1} &= U_j^n - M_{R2}^{-1}\left(\nu\left(\theta_1\Delta_{0,R2}U_j^n + \theta_2\Delta_{0,R2}\tilde{U}_j^n\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\delta^2_{R2}U_j^n + \epsilon_2\delta^2_{R2}\tilde{U}_j^n\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.91}$$

la transformée de Fourier du système précédent (3.91) donnant,

$$\begin{aligned}
\tilde{z}(\xi) &= 1 + \frac{1}{\hat{M}_{R2}}\left(-\alpha\nu\hat{\Delta}_{0,R2} + \beta\nu^2\hat{\delta}^2_{R2}\right), \\
z(\xi) &= 1 + \frac{1}{\hat{M}_{R2}}\left(-\left(\theta_1 + \theta_2\tilde{z}\right)\nu\hat{\Delta}_{0,R2} + \left(\epsilon_1 + \epsilon_2\tilde{z}\right)\nu^2\hat{\delta}^2_{R2}\right),
\end{aligned} \tag{3.92}$$

avec $\hat{\Delta}_{0,R2}$, $\hat{\delta}^2_{R2}$ et $\hat{M}_{R2}$ les transformées de Fourier des opérateurs $\Delta_{0,R2}$, δ^2_{R2} et M_{R2} égales à,

$$\hat{\Delta}_{0,R2}(\xi) = i\left(\frac{7}{6}\sin(\xi) - \frac{1}{12}\sin(2\xi)\right), \tag{3.93}$$

$$\hat{\delta}^2_{R2}(\xi) = -4\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2, \tag{3.94}$$

$$\hat{M}_{R2}(\xi) = \frac{17}{24} + \frac{1}{3}\cos(\xi) - \frac{1}{24}\cos(2\xi), \tag{3.95}$$

où $\xi = k\Delta x$ correspond au nombre d'onde adimensionné (k étant le nombre d'onde et Δx le pas d'espace). Comme pour les schémas TTG classiques, un développement de Taylor à l'ordre 5 de l'Eq. (3.92) donné par,

$$\begin{aligned} z_{\text{TTG-R2}}(\xi) =& 1 - i\xi\nu(\theta_1+\theta_2) - \xi^2\nu^2(\alpha\theta_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2) + i\xi^3\nu^3(\alpha\epsilon_2 + \beta\theta_2) \\ &+ \nu^4\xi^4\beta\epsilon_2 - i\nu\xi^5\frac{1}{720}(\theta_1+\theta_2) + \mathcal{O}(\xi^6), \end{aligned} \tag{3.96}$$

permet de déterminer un ensemble de contraintes sur les coefficients du schéma pour assurer un ordre temporel choisi (ici un ordre 4). Elle s'écrivent,

$$\begin{cases} a_1 = \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ a_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ a_3 = \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ a_4 = \beta\epsilon_2 = \dfrac{1}{24}. \end{cases} \tag{3.97}$$

À noter qu'avec l'utilisation des opérateurs exprimés avec la reconstruction quadratique, le système (3.97) exprimant les contraintes sur les coefficients α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1 et ϵ_2 pour obtenir un ordre 4 n'est plus le même que pour les schémas TTG classiques (*i.e.* avec reconstruction linéaire) donné par le système (3.14) : la cinquième contrainte a disparu. Cela permet de trouver des solutions non complexes à ce système, ce qui n'était pas le cas avec le formalisme TTG standard. En particulier, les coefficients du schéma TTG4A, donnés par l'Eq. (3.15), satisfont les contraintes pour obtenir un ordre 4 en temps (ce qui était son objectif initial si la cinquième contrainte n'avait pas été omise). Avec la reconstruction quadratique, ce schéma sera noté TTG4A-R2 dans la suite du chapitre. Les coefficients du schéma TTGC ne sont ici pas considérés puisqu'ils satisfont uniquement les contraintes pour atteindre un ordre 3.

Il aurait été envisageable de tenter d'obtenir un schéma d'ordre 5. Pour se faire, les contraintes précédentes doivent être respectées, avec en plus la contrainte sur le coefficient a_5,

$$a_5 = \frac{1}{720}(\theta_1+\theta_2) = \frac{\nu^4}{120}. \tag{3.98}$$

Or, ce système n'a pas de solution et il n'est donc pas possible d'obtenir un schéma d'ordre 5 avec le formalisme TTG-R2 à deux étapes.

Pour revenir au schéma TTG4A-R2, le développement de Taylor de son coefficient d'amplification s'exprime,

$$z_{\mathrm{TTG4A-R2}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^4\xi^4 - \frac{1}{720}i\nu\xi^5 + \mathcal{O}\left(\xi^6\right), \tag{3.99}$$

ce qui correspond au développement de Taylor d'une exponentielle jusqu'au terme d'ordre 4. Le schéma est donc bien d'ordre 4.

En particulier, la pulsation temporelle modifiée de TTG4A-R2 est obtenue à partir de l'Eq. (3.24) pour $k \to 0$ et devient,

$$\Omega^*_{\mathrm{TTG4A-R2}}(k) = kc - \frac{c\Delta x^4}{720}\left(6\nu^4 - 1\right)k^5 - i\frac{c\Delta x^5}{144}\nu\left(\nu^4 + 1\right)k^6 + \mathcal{O}\left(k^7\right). \tag{3.100}$$

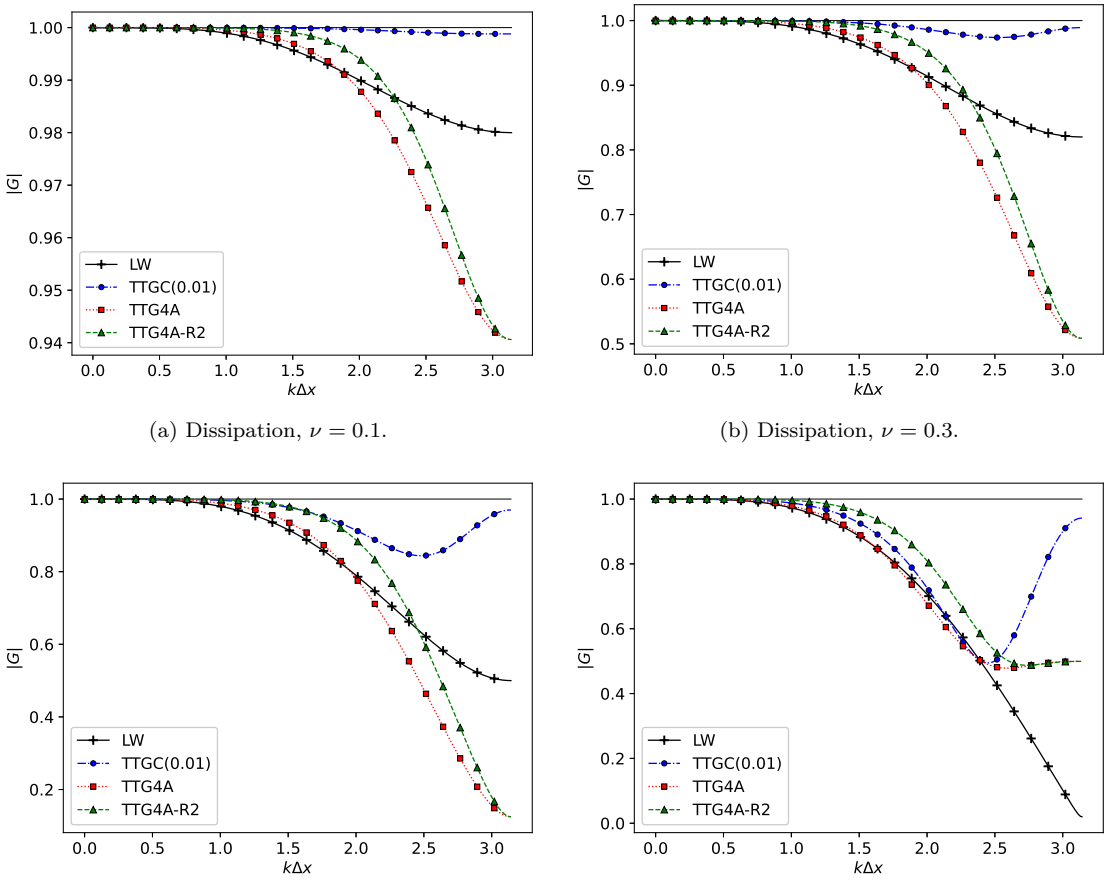
Ce qui donne l'équation modifiée,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x^4}{720}\left(6\nu^4 - 1\right)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{c\Delta x^5}{144}\nu\left(\nu^4 + 1\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}\left(\Delta x^6\right). \tag{3.101}$$

Par rapport aux schémas TTG, le premier terme non nul du schéma TTG4A-R2 est proportionnel à $\partial^5 u/\partial x^5$, ce qui correspond à un schéma d'ordre 4 en espace et en temps au lieu de 3 pour les schémas TTG classiques. L'apport de la reconstruction quadratique est ici clairement visible sur les propriétés du schéma.

Comme pour les schémas précédents, l'analyse de la dissipation et de la dispersion du schéma obtenu permet d'en apprendre davantage sur les propriétés spectrales de ce dernier. Dans ce but, la Fig. 3.21 compare la dissipation des schémas standards avec TTG4A-R2. Le schéma TTG4A-R2 présente clairement un comportement assez proche de TTG4A classique, avec une amélioration du niveau de dissipation pour les fréquences intermédiaires. Ce constat est aussi valide pour la dispersion (Fig. 3.22). L'élargissement du stencil du schéma TTG4A-R2 entraine aussi une amélioration des propriétés de dispersion, notamment aux fréquences intermédiaires.

Au final, l'analyse monodimensionnelle précédente a montré d'une part que l'utilisation de la reconstruction quadratique permettait de construire un schéma à deux étapes, appelé TTG4A-R2, avec un ordre de convergence supérieur aux schémas existants (d'ordre 4 au lieu d'ordre 3 pour TTG4A et TTGC). D'autre part, ses propriétés de dissipation et de dispersion assez similaires à TTG4A, avec en particulier un niveau de dissipation aux hautes fréquences élevé, peuvent présager d'une sensibilité assez faible à la qualité du maillage. Ces différentes caractéristiques motivent l'extension de ce schéma aux cas multidimensionnels pour le comparer aux schémas existants sur les cas tests introduits dans la première section. La première étape décrite par la suite consiste donc à obtenir une reconstruction quadratique de la solution au sein de chaque élément dans un cas multidimensionnel.



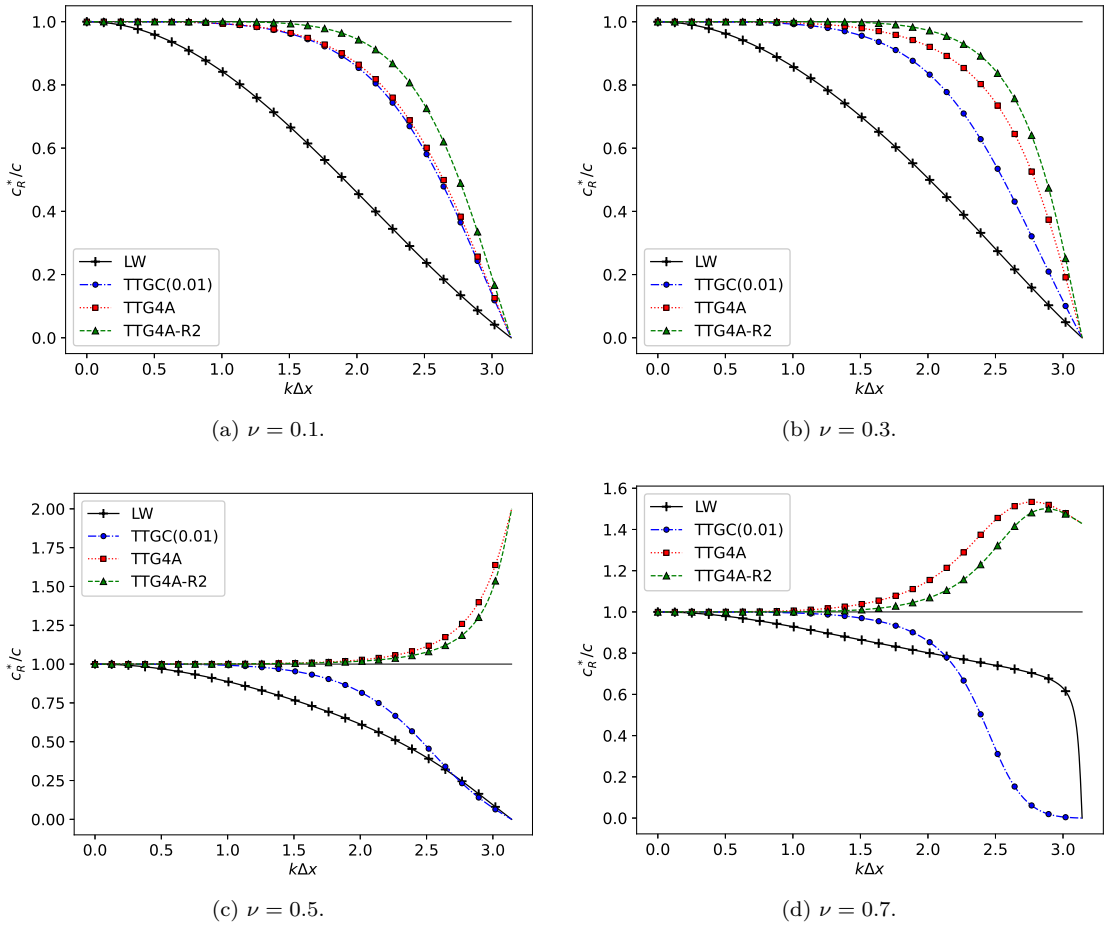
(a) Dissipation, $\nu = 0.1$.

(b) Dissipation, $\nu = 0.3$.

(c) Dissipation, $\nu = 0.5$.

(d) Dissipation, $\nu = 0.7$.

Figure 3.21: Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.



(a) $\nu = 0.1$.

(b) $\nu = 0.3$.

(c) $\nu = 0.5$.

(d) $\nu = 0.7$.

Figure 3.22: Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

Extension aux cas multidimensionnels

L'analyse monodimensionnelle précédente a montré qu'il était possible d'accroître l'ordre de précision des schémas TTG en utilisant une reconstruction quadratique au sein de chaque élément du maillage. Cette reconstruction quadratique nécessite le calcul d'opérateurs nodaux (dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2) pour extrapoler les valeurs nodales au centre de chaque élément. La section qui suit a pour but d'étendre le formalisme introduit en 1D aux cas multidimensionnels et d'en étudier les bénéfices. Le cas 2D sera particulièrement détaillé.

Construction du polynôme au sein de chaque élément

Comme pour le cas monodimensionnel, l'objectif est de construire un polynôme de degré 2 au sein de chaque élément du domaine pour décrire la solution globale. En deux dimensions, la forme générale d'un polynôme de degré 2 dont l'origine est un point quelconque (x_1,y_1) s'écrit,

$$U_e(x,y) = a + b(x-x_1) + c(y-y_1) + d(x-x_1)^2 + e(x-x_1)(y-y_1) + f(y-y_1)^2. \qquad (3.102)$$

Il y a donc 6 coefficients à déterminer en deux dimensions. Pour un triangle, par analogie au cas 1D, les trois vertex du triangle ainsi que les trois demi-arrêtes sont utilisés pour déterminer ces coefficients. Les coordonnées des trois vertex sont respectivement notées dans la suite par (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) et le polynôme est construit relativement aux coordonnées du premier vertex. La détermination des coefficients du polynôme peut donc s'écrire sous forme matricielle comme,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta x_{1,2} & \Delta y_{1,2} & \frac{1}{2}(\Delta x_{1,2})^2 & \Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2} & \frac{1}{2}(\Delta y_{1,2})^2 \\ 1 & \Delta x_{1,3} & \Delta y_{1,3} & \frac{1}{2}(\Delta x_{1,3})^2 & \Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3} & \frac{1}{2}(\Delta y_{1,3})^2 \\ 1 & \frac{1}{2}\Delta x_{1,2} & \frac{1}{2}\Delta y_{1,2} & \frac{1}{8}(\Delta x_{1,2})^2 & \frac{1}{4}\Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2} & \frac{1}{8}(\Delta y_{1,2})^2 \\ 1 & \frac{1}{2}\Delta x_{1,3} & \frac{1}{2}\Delta y_{1,3} & \frac{1}{8}(\Delta x_{1,3})^2 & \frac{1}{4}\Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3} & \frac{1}{8}(\Delta y_{1,3})^2 \\ 1 & \frac{1}{2}(\Delta x_{1,2}+\Delta x_{1,3}) & \frac{1}{2}(\Delta y_{1,2}+\Delta y_{1,3}) & \frac{1}{8}((\Delta x_{1,2})^2+(\Delta x_{1,3})^2) & \frac{1}{4}(\Delta x_{1,2}+\Delta x_{1,3})(\Delta y_{1,2}+\Delta y_{1,3}) & \frac{1}{8}((\Delta y_{1,2})^2+(\Delta y_{1,3})^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_{12}^* \\ U_{13}^* \\ U_{23}^* \end{pmatrix}, \qquad (3.103)$$

avec $\Delta x_{i,j} = x_j - x_i$, $\Delta y_{i,j} = y_j - y_i$, U_1, U_2 et U_3 les valeurs respectives des trois vertex et U_{12}^*, U_{13}^* et U_{23}^* les valeurs des demi-arrêtes qui restent à déterminer.

L'illustration des paramètres décrits est donnée pour un triangle quelconque par la Fig. 3.23. À noter que la matrice qui apparaît dans le système précédent n'est construite qu'à partir des coordonnées géométriques du triangle. L'inversion peut donc être faite en pré-traitement et le calcul des coefficients du polynôme nécessite simplement de réaliser un produit matrice-vecteur entre l'inverse de la matrice précédente et les valeurs nodales décrites au-dessus. La Figure 3.24 donne un exemple d'une reconstruction quadratique au sein d'un triangle quelconque (représentée par la nappe colorée). La nappe en niveaux de gris correspond à une reconstruction linéaire de la solution et est ajoutée à titre de comparaison.

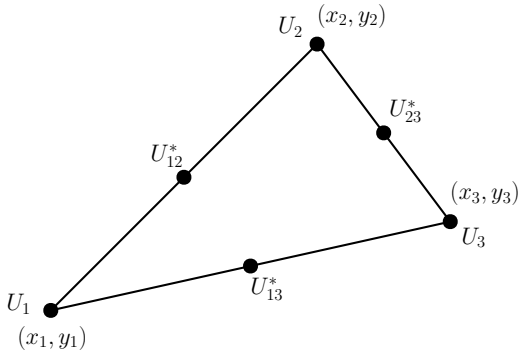


Figure 3.23: Illustration d'un triangle quelconque avec ses trois vertex et les trois points aux demi-arrêtes.

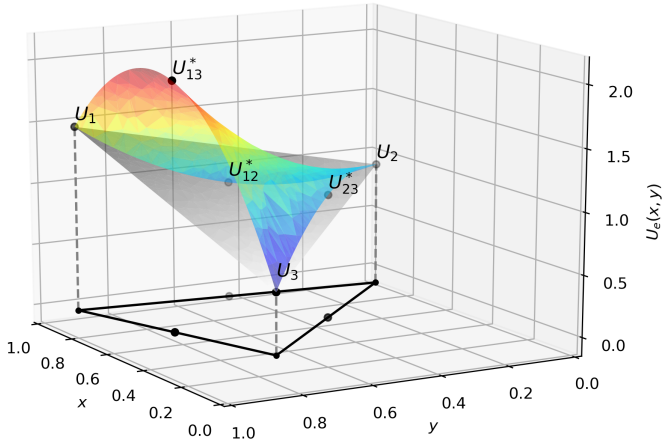


Figure 3.24: Reconstruction quadratique de la solution au sein d'un triangle quelconque.

Calcul des opérateurs nodaux

Encore une fois, comme pour le cas 1D, la détermination des valeurs aux centres des arrêtes du triangle est faite par extrapolation des valeurs nodales. Cette extrapolation utilise des opérateurs nodaux définis à chaque vertex. La méthode pour déterminer ces opérateurs nodaux consiste à écrire un développement de Taylor des valeurs nodales de chaque voisin d'un nœud i du domaine. Le développement de Taylor de chaque voisin permet de définir un système linéaire pour les opérateurs nodaux du nœud i. Ce système linéaire est donné par l'Eq. (3.104) pour la configuration présentée en Fig. 3.25. Un nœud est considéré voisin d'un nœud i s'il partage avec lui une arrête d'un élément du maillage. Pour un maillage triangulaire régulier, la Fig. 3.25 met en évidence la position des 6 voisins du nœud i.

Si le nombre de voisins est strictement supérieur à 5, la matrice de l'Eq. (3.104) est rectangulaire. Le calcul de sa pseudo-inverse revient à une méthode des moindres carrés, ce qui ne pose aucun problème particulier. À noter que dans le cas général, le nombre de voisins peut être inférieur à 5. Dans ce cas, la matrice n'est pas inversible. Pour palier à ce problème, il est possible de limiter le calcul des opérateurs nodaux aux gradients $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ qui nécessite seulement 2 voisins (ce qui est toujours le cas pour un maillage triangulaire). Dans ce cas, la qualité de l'extrapolation aux demi-arrêtes sera localement réduite. Ce point particulier sera abordé à la fin de la section. Par ailleurs, pour limiter le coût de calcul, la pseudo-inverse de la matrice peut être calculée en pré-traitement et stockée pour être utilisée au cours du calcul.

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{j,1} & \Delta y_{j,1} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,1})^2 & \Delta x_{j,1}\Delta y_{j,1} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,1})^2 \\ \Delta x_{j,2} & \Delta y_{j,2} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,2})^2 & \Delta x_{j,2}\Delta y_{j,2} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,2})^2 \\ \Delta x_{j,3} & \Delta y_{j,3} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,3})^2 & \Delta x_{j,3}\Delta y_{j,3} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,3})^2 \\ \Delta x_{j,4} & \Delta y_{j,4} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,4})^2 & \Delta x_{j,4}\Delta y_{j,4} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,4})^2 \\ \Delta x_{j,5} & \Delta y_{j,5} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,5})^2 & \Delta x_{j,5}\Delta y_{j,5} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,5})^2 \\ \Delta x_{j,6} & \Delta y_{j,6} & \frac{1}{2}(\Delta x_{j,6})^2 & \Delta x_{j,6}\Delta y_{j,6} & \frac{1}{2}(\Delta y_{j,6})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_j}{\partial x} \\ \frac{\partial U_j}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U_j}{\partial x \partial x} \\ \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 - U_j \\ U_2 - U_j \\ U_3 - U_j \\ U_4 - U_j \\ U_5 - U_j \\ U_6 - U_j \end{pmatrix}. \tag{3.104}$$

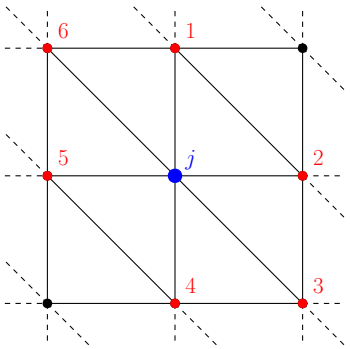


Figure 3.25: Mise en évidence des plus proches voisins dans le cas d'un maillage triangulaire.

Extrapolation des valeurs aux demi-arrêtes

À partir des opérateurs nodaux calculés à l'étape précédente, il est possible d'obtenir les valeurs à chaque demi-arrête par extrapolation. Comme pour le cas 1D, différentes formulations sont possibles. Dans un souci de simplicité, c'est la demi-somme entre les extrapolations des nœuds i et j qui est choisie. L'expression de U^*_{ij} est donnée par,

$$\begin{aligned} U^*_{ij} = &\frac{1}{2}\left[U_i + \frac{1}{2}\Delta x_{i,j}\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta y_{i,j}\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{1}{8}(\Delta x_{i,j})^2\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{4}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x \partial y} + \frac{1}{8}(\Delta y_{i,ij})^2\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[U_j - \frac{1}{2}\Delta x_{i,j}\frac{\partial U_j}{\partial x} - \frac{1}{2}\Delta y_{i,j}\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{1}{8}(\Delta x_{i,j})^2\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{4}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}\frac{\partial^2 U_j}{\partial x \partial y} + \frac{1}{8}(\Delta y_{i,j})^2\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Calcul des fonctions tests

Pour finir, comme pour la méthode de Galerkin, la méthode de Petrov-Galerkin nécessite la définition de fonctions tests ψ pour chaque nœud du maillage. L'expression des fonctions tests est donnée directement pour un triangle quelconque sans utiliser de triangle de référence comme il est aussi

possible de le faire. L'expression des fonctions tests de chaque vertex du triangle est alors donnée en fonction des coordonnées des trois vertex comme [193],

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{J} + \frac{y_2 - y_3}{J}x + \frac{x_3 - x_2}{J}y, \\
\psi_2(x,y) &= \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{J} + \frac{y_3 - y_1}{J}x + \frac{x_1 - x_3}{J}y, \\
\psi_3(x,y) &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{J} + \frac{y_1 - y_2}{J}x + \frac{x_2 - x_1}{J}y,
\end{aligned} \tag{3.106}$$

avec,

$$J = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 2A_e. \tag{3.107}$$

Expressions des termes L_j, LL_j et MU_j

Les étapes précédentes ont permis de :

- définir un polynôme quadratique dans chaque élément du domaine pour décrire la solution,
- et d'écrire les fonctions tests de chaque nœud.

À partir des polynômes de chaque élément dont l'expression générale est donnée par l'Eq. (3.102) et des fonctions tests décrites par l'Eq. (3.106), le calcul des termes L_j, LL_j et MU_j nécessaires aux deux étapes des schémas TTG est maintenant possible. Ils s'expriment comme des intégrales des polynômes de la solution et des fonctions tests ainsi que leurs dérivées respectives.

Dans le cas de la convection d'un scalaire en deux dimensions dans un champ de vitesse uniforme (c_x, c_y) avec le formalisme Taylor-Petrov-Galerkin, les Eqs. (2.62), (2.63) et (2.64) introduites au chapitre précédent s'écrivent,

$$L_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\left[c_x\int_{K_e}\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial x}\psi_j dV + c_y\int_{K_e}\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial y}\psi_j dV\right], \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
LL_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\Bigg[&c_x\int_{K_e}\left(c_x\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial x} + c_y\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x}dV \\
&+c_y\int_{K_e}\left(c_x\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial x} + c_y\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial y}dV\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$MU_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\int_{K_e} U_e(x,y)\psi_j dV. \tag{3.110}$$

Intégration des polynômes

Le calcul des différents termes des équations précédentes nécessitent l'intégration de polynômes sur chaque volume de contrôle du domaine. Le degré du polynôme à intégrer est différent pour chaque terme. Avec une reconstruction quadratique au sein de chaque élément et des fonctions tests linéaires, les ordres des termes sont les suivants :

- Terme L_j : polynôme d'ordre 2,
- Terme LL_j : polynôme d'ordre 1,
- Terme MU_j : polynôme d'ordre 3.

Sur cette base, pour chaque polynôme, il est possible de définir des formules de quadrature pour les intégrer de manière exacte. Les points de quadrature choisis pour des polynômes linéaire, quadratique et cubique sont donnés pour un élément de référence $\tilde{K}_e$ sur la Fig. 3.26 [64], N_g faisant référence au nombre de points de quadrature utilisés dans chaque cas.

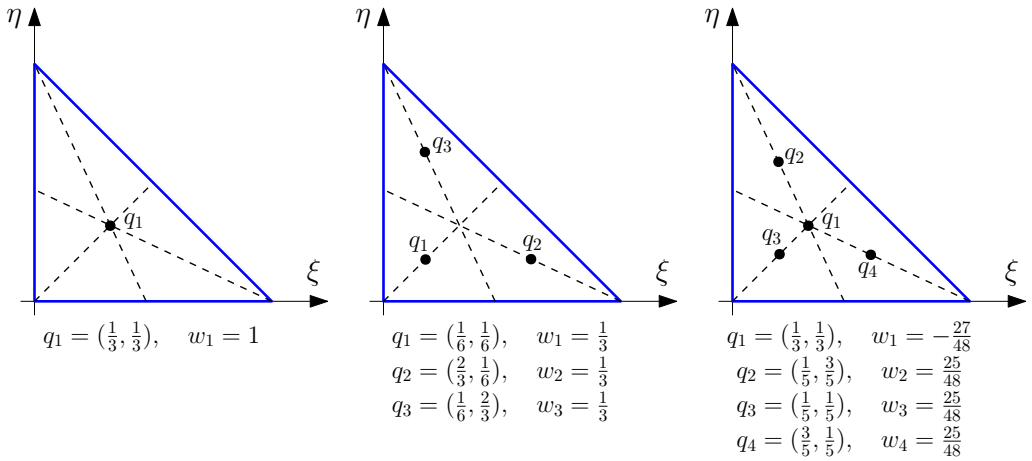


Figure 3.26: Points de quadrature linéaire ($N_g = 1$), quadratique ($N_g = 3$) et cubique ($N_g = 4$).

L'intégrale d'une fonction $g(x, y)$ sur l'élément de référence $\tilde{K}_e$ s'exprime simplement comme une somme sur les points de quadrature q_i de coordonnées (ξ_i, η_i) et de poids w_i, telle que,

$$\iint_{\tilde{K}_e} g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_g} w_i g\left(\xi_i,\eta_i\right). \tag{3.111}$$

Le passage de l'élément de référence $\tilde{K}_e$ à un élément quelconque K_e se fait par transformation à l'aide de fonctions de forme. Les fonctions de forme pour l'élément triangulaire de référence $\tilde{K}_e$ s'écrivent,

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= 1-\xi-\eta, \\ N_2(\xi,\eta) &= \xi, \\ N_3(\xi,\eta) &= \eta. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Le changement de variable entre les coordonnées de l'élément K_e et l'élément de référence $\tilde{K}_e$ est obtenu par les relations (schématisé en Fig. 3.27),

$$x = P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} x_i N_i(\xi,\eta) = x_1 N_1(\xi,\eta) + x_2 N_2(\xi,\eta) + x_3 N_3(\xi,\eta), \tag{3.113}$$

$$y = Q(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} y_i N_i(\xi,\eta) = y_1 N_1(\xi,\eta) + y_2 N_2(\xi,\eta) + y_3 N_3(\xi,\eta). \tag{3.114}$$

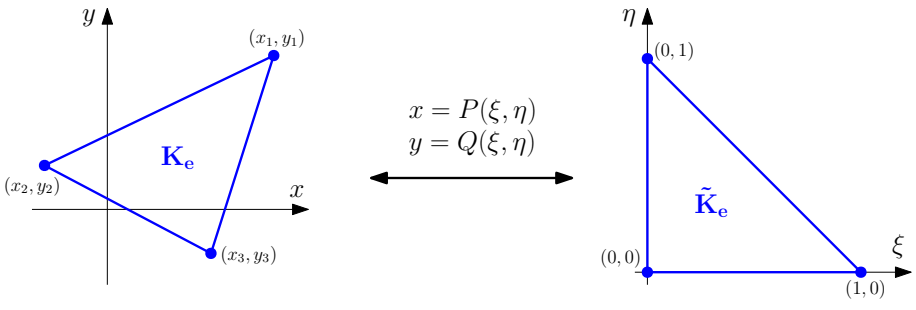


Figure 3.27: Transformation linéaire entre K_e et $\tilde{K}_e$.

Au final, l'intégrale d'une fonction $g(x, y)$ sur l'élément K_e peut s'écrire comme une intégrale sur l'élément de référence $\tilde{K}_e$ en faisant intervenir la Jacobienne de la transformation $J(\xi, \eta)$,

$$\iint_{K_e} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{K}_e} g(P(\xi,\eta),Q(\xi,\eta))|J(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{3.115}$$

avec $|J(\xi, \eta)|$ qui s'exprime comme,

$$|J(\xi,\eta)| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2A_e. \tag{3.116}$$

L'aire du triangle A_e s'exprime grâce aux coordonnées des trois vertex,

$$A_e = \frac{|x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)|}{2}. \tag{3.117}$$

Pour conclure, l'intégrale initiale peut se formuler simplement à l'aide d'une somme sur les points de la quadrature choisie,

$$\begin{aligned} \iint_{K_e} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2A_e \iint_{\tilde{K}_e} g(P(\xi,\eta),Q(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \\ &= A_e \sum_{i=1}^{N_g} w_i g\left(P\left(\xi_i,\eta_i\right),Q\left(\xi_i,\eta_i\right)\right). \end{aligned} \tag{3.118}$$

Problématique de l'inversion de la matrice de masse

Avec le formalisme de Petrov-Galerkin décrit jusqu'à présent, le calcul des différents termes utilise les valeurs nodales au-delà des plus proches voisins de chaque nœud. Cela ne pose pas de difficultés particulières pour les termes L et LL puisqu'ils sont calculés de manière explicite. Pour le terme MU qui est par définition un terme implicite, l'algorithme de Jacobi utilisé pour approximer l'inverse de la matrice de masse doit par contre être légèrement modifié par rapport au formalisme TTG standard pour tenir compte de cette différence. Avec la reconstruction quadratique, à chaque itération de la méthode de Jacobi, il est nécessaire de calculer les opérateurs nodaux pour construire le polynôme quadratique décrivant le résidu au sein de chaque cellule.

Comme pour le formalisme TTG standard, ce formalisme fait l'hypothèse dite du produit des variables. C'est-à-dire que les fonctions de forme des flux sont considérées comme identiques à celles

de la solution en elle-même. Dans l'algorithme de Jacobi modifié, la reconstruction quadratique est faite directement sur le résidu de la première étape des schémas TTG, $\left(\tilde{R}^n\right)$. Le gradient et la Hessienne sont calculés pour ce terme de manière à obtenir le terme $M\left(\tilde{R}^n\right)$ par la méthode décrite jusqu'à présent. La même méthodologie est répétée pour le résidu de la deuxième étape des schémas TTG, $\left(R^{n+1}\right)$. Les étapes de la méthode de Jacobi sont rappelées comme étant (pour p étapes de Jacobi),

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{R}^n\right)^{(0)} &= D^{-1}\tilde{H}\left(U^n\right), \\
\left(\tilde{R}^n\right)^{(k)} &= \left(\tilde{R}^n\right)^{(0)} + \left(\tilde{R}^n\right)^{(k-1)} - D^{-1}M\left(\tilde{R}^n\right)^{(k-1)}, \quad k = 1, p, \\
\left(R^{n+1}\right)^{(0)} &= D^{-1}H\left(U^n, \left(\tilde{U}^n\right)^{(p)}\right), \\
\left(R^{n+1}\right)^{(k)} &= \left(R^{n+1}\right)^{(0)} + \left(R^{n+1}\right)^{(k-1)} - D^{-1}M\left(R^{n+1}\right)^{(k-1)}, \quad k = 1, p,
\end{aligned} \tag{3.119}$$

avec,

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\left(U^n\right) &= -\alpha L\left(U^n\right) - \beta\Delta t LL\left(U^n\right), \\
H\left(U^n, \tilde{U}^n\right) &= -\left[\theta_1 L\left(U^n\right) + \theta_2 L\left(\tilde{U}^n\right)\right] - \Delta t\left[\epsilon_1 LL\left(U^n\right) + \epsilon_2\Delta t LL\left(\tilde{U}^n\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Extension aux équations d'Euler

Jusqu'à présent, la description du formalisme Petrov-Galerkin s'intéressait à la convection d'un scalaire dans un champ de vitesse uniforme. Le passage aux équations d'Euler nécessite quelques ajustements. En particulier, le calcul du terme de second ordre $\mathbf{LL}_j$ fait apparaître pour Euler la Jacobienne des flux. Dans la suite, cette matrice est considérée comme constante au sein de chaque élément, ce qui permet la sortir des intégrales sur les éléments. Les trois termes $\mathbf{L}_j$, $\mathbf{LL}_j$ et $\mathbf{MU}_j$ introduits dans le cas général par les Eqs. (2.62), (2.63) et (2.64) s'expriment alors comme,

$$\mathbf{L}_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\left[\int_{K_e}\frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,x}(x,y)}{\partial x}\psi_j dV + \int_{K_e}\frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,y}(x,y)}{\partial y}\psi_j dV\right], \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{LL}_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\Bigg[&\overline{\underline{\mathbf{A}}}_e\int_{K_e}\left(\frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,x}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,y}(x,y)}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dV \\
&+\overline{\underline{\mathbf{B}}}_e\int_{K_e}\left(\frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,x}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\mathcal{F}}_{e,y}(x,y)}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dV\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\mathbf{MU}_j = \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{k\in K_e}\int_{K_e}U_e(x,y)\psi_j dV, \tag{3.123}$$

avec $\overline{\underline{\mathbf{A}}}_e$ et $\overline{\underline{\mathbf{B}}}_e$ les matrices Jacobiennes des flux convectifs moyennées au sein de la cellule K_e décrites dans la Section 2.4.3.

D'autre part, comme pour les schémas de Taylor-Galerkin classiques, l'hypothèse du produit des variables est faite, c'est-à-dire que les fonctions de forme des flux convectifs et celles des variables conservatives sont considérées comme identiques.

Analyse spectrale bidimensionnelle

Comme pour les schémas de la famille TTG, l'analyse spectrale bidimensionnelle des schémas de la famille TTG-R2 nécessite d'exprimer les opérateurs qui apparaissent dans les deux étapes des

schémas en fonction des valeurs nodales. Le système d'équations des deux étapes des schémas TTG-R2 s'exprime de manière similaire aux schémas TTG classiques,

$$\begin{aligned}
M_{R2}\left(\tilde{U}^n - U^n\right) &= -\alpha\left(\nu_x\hat{\delta}_{x,R2}U + \nu_y\hat{\delta}_{y,R2}\right)U^n \\
&\quad + \beta\left(\nu_x^2\hat{\delta}^2_{x,R2} + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy,R2} + \nu_y^2\hat{\delta}^2_{y,R2}\right)U^n, \\
M_{R2}\left(U^{n+1} - U^n\right) &= -\theta_1\left(\nu_x\hat{\delta}_{x,R2}U + \nu_y\hat{\delta}_{y,R2}\right)U^n - \theta_2\left(\nu_x\hat{\delta}_{x,R2}U + \nu_y\hat{\delta}_{y,R2}\right)\tilde{U}^n \\
&\quad + \epsilon_1\left(\nu_x^2\hat{\delta}^2_{x,R2} + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy,R2} + \nu_y^2\hat{\delta}^2_{y,R2}\right)U^n \\
&\quad + \epsilon_2\left(\nu_x^2\hat{\delta}^2_{x,R2} + 2\nu_x\nu_y\hat{\delta}_{xy,R2} + \nu_y^2\hat{\delta}^2_{y,R2}\right)\tilde{U}^n,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

avec les opérateurs suivants (pour un maillage triangulaire régulier) qui eux sont différents pour les schémas TTG-R2 (ces relations sont obtenues par intégration explicite des Eqs. (3.108), (3.109) et (3.110)),

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{x,R2}U_{i,j} = \frac{1}{96}\,(&U_{i+1,j+1} - 19U_{i+1,j-1} - 38U_{i+1,j} + U_{i+2,j-1} + U_{i+2,j-2} + 2U_{i+2,j} \\
&- 19U_{i,j+1} + U_{i,j+2} + 19U_{i,j-1} - U_{i,j-2} + 19U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1} \\
&+38U_{i-1,j} - U_{i-2,j+1} - U_{i-2,j+2} - 2U_{i-2,j})\,,
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{y,R2}U_{i,j} = \frac{1}{96}\,(&U_{i+1,j+1} + 19U_{i+1,j-1} - U_{i+1,j-2} - 19U_{i+1,j} - U_{i+2,j-2} + U_{i+2,j} \\
&- 38U_{i,j+1} + 2U_{i,j+2} + 38U_{i,j-1} - 2U_{i,j-2} - 19U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j+2} \\
&-U_{i-1,j-1} + 19U_{i-1,j} + U_{i-2,j+2} - U_{i-2,j})\,,
\end{aligned} \tag{3.126}$$

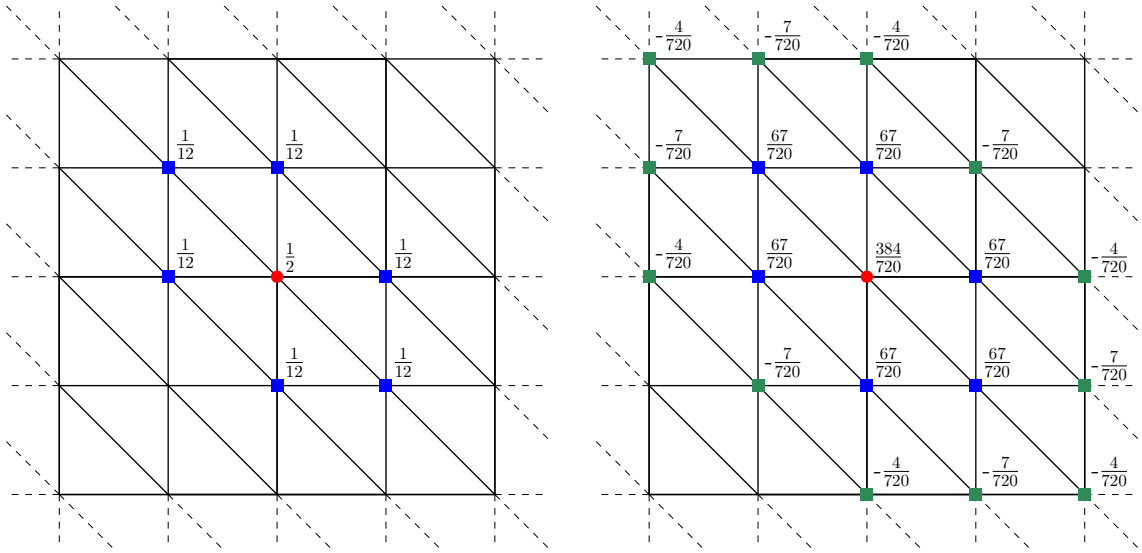
$$\begin{aligned}
\hat{\delta}^2_{x,R2}U_{i,j} = \frac{1}{72}(&-5U_{i+1,j+1} - 5U_{i+1,j-1} + 2U_{i+1,j-2} + 70U_{i+1,j} + 5U_{i+2,j-1} - U_{i+2,j-2} \\
&- 4U_{i+2,j} - 5U_{i,j+1} - 5U_{i,j-1} - U_{i,j-2} - 132U_{i,j} - 5U_{i-1,j+1} + 2U_{i-1,j+2} \\
&+ 5U_{i-1,j-1} + 70U_{i-1,j} + 5U_{i-2,j+1} - U_{i-2,j+2} - 4U_{i-2,j} - U_{i,j+2}),
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}^2_{y,R2}U_{i,j} = \frac{1}{72}(&5U_{i+1,j+1} - 5U_{i+1,j-1} + 5U_{i+1,j-2} - 5U_{i+1,j} + 2U_{i+2,j-1} - U_{i+2,j-2} \\
&- U_{i+2,j} + 70U_{i,j+1} - 4U_{i,j+2} + 70U_{i,j-1} - 4U_{i,j-2} - 132U_{i,j} - 5U_{i-1,j+1} \\
&+ 5U_{i-1,j+2} + 5U_{i-1,j-1} - 5U_{i-1,j} + 2U_{i-2,j+1} - U_{i-2,j+2} - U_{i-2,j}),
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{xy,R2}U_{i,j} = \frac{1}{72}(&8U_{i+1,j+1} - 80U_{i+1,j-1} + 2U_{i+1,j-2} + 70U_{i+1,j} + 2U_{i+2,j-1} + 2U_{i+2,j-2} \\
&- 4U_{i+2,j} + 70U_{i,j+1} - 4U_{i,j+2} + 70U_{i,j-1} - 4U_{i,j-2} - 132U_{i,j} - 80U_{i-1,j+1} \\
&+ 2U_{i-1,j+2} + 8U_{i-1,j-1} + 70U_{i-1,j} + 2U_{i-2,j+1} + 2U_{i-2,j+2} - 4U_{i-2,j}),
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$M_{R2}U_{i,j} = \frac{1}{720}(-7U_{i+1,j+1} + 67U_{i+1,j-1} - 7U_{i+1,j-2} + 67U_{i+1,j} - 7U_{i+2,j-1} - 4U_{i+2,j-2} - 4U_{i+2,j} + 67U_{i,j+1} - 4U_{i,j+2} + 67U_{i,j-1} - 4U_{i,j-2} + 384U_{i,j} + 67U_{i-1,j+1} - 7U_{i-1,j+2} - 7U_{i-1,j-1} + 67U_{i-1,j} - 7U_{i-2,j+1} - 4U_{i-2,j+2} - 4U_{i-2,j}). \tag{3.130}$$

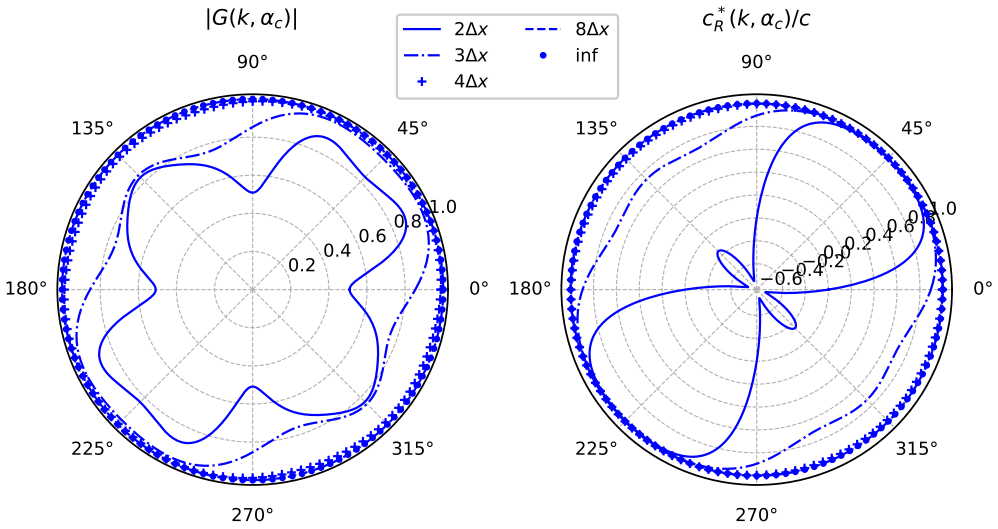
Il est clair que de la même manière que pour le cas 1D, l'utilisation du formalisme de Petrov-Galerkin avec une reconstruction quadratique entraine un élargissement du stencil du schéma. Cet élargissement est en particulier visible sur le terme de la matrice de masse. À titre d'illustration, la Fig. 3.28 compare le stencil des schémas TTG classiques et celui issu de la famille TTG-R2. Comme expliqué auparavant, le stencil des schémas TTG classiques ne fait intervenir que les valeurs nodales des plus proches voisins d'un nœud donné. Pour les schémas TTG-R2, un deuxième niveau de voisinage est aussi présent dans leur stencil (*i.e.* les voisins des plus proches voisins d'un nœud donné).



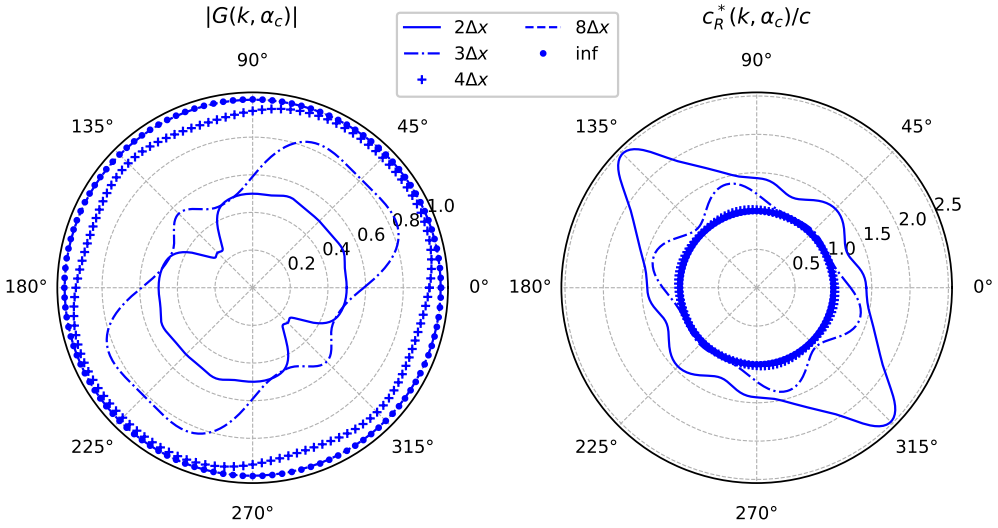
(a) Famille TTG classique. (b) Famille TTG-R2.

Figure 3.28: Représentation 2D des coefficients du terme de la matrice de masse sur un maillage triangulaire régulier.

Une fois les opérateurs nodaux précédents obtenus, il est possible par transformée de Fourier de calculer le coefficient d'amplification $G(k, \alpha_c)$ du schéma. Par la suite, les propriétés de dissipation et de dispersion dans un cas bidimensionnel peuvent être comparées aux schémas existants et présentés en Section 3.2. La dissipation numérique et la dispersion numérique du schéma TTG4A-R2 sont données en Fig. 3.29. Malgré l'utilisation du formalisme Petrov-Galerkin avec la reconstruction quadratique, ces propriétés restent assez proches du schéma TTG4A classique (comme pour le cas 1D d'ailleurs).



(a) $\nu = 0.3$.



(b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.29: Dissipation numérique et dispersion numérique du schéma TTG4A-R2 pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL.

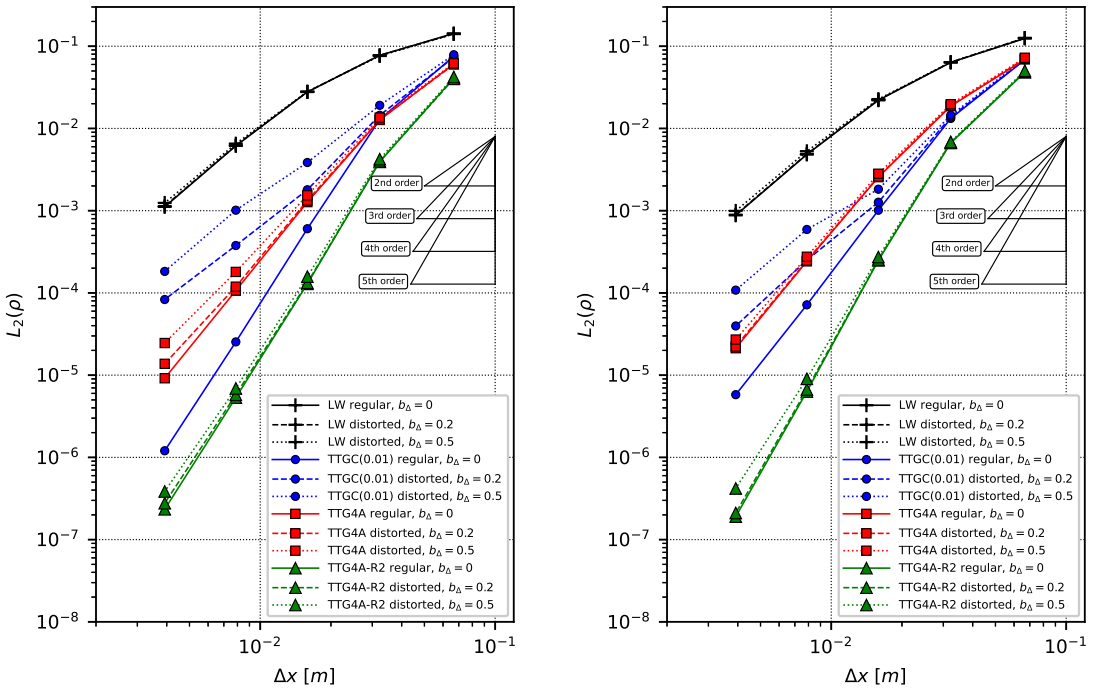
Validation sur des cas académiques

Le schéma TTG4A-R2 issu de la nouvelle famille de schémas Taylor-Petrov-Galerkin décrite dans cette section est dans la suite analysé en termes d'ordre de convergence pour comparer sa sensibilité à la qualité du maillage par rapport aux schémas classiques. Pour cela, les deux cas tests académiques déjà étudiés sont utilisés pour faire cette comparaison, *i.e.* la convection d'une onde entropique avec le démonstrateur Python et la convection d'un vortex isentropique dans AVBP. En complément, une dernière comparaison entre schémas est réalisée sur une configuration simulant une couche de cisaillement linéaire.

Convection d'une onde entropique monodimensionnelle

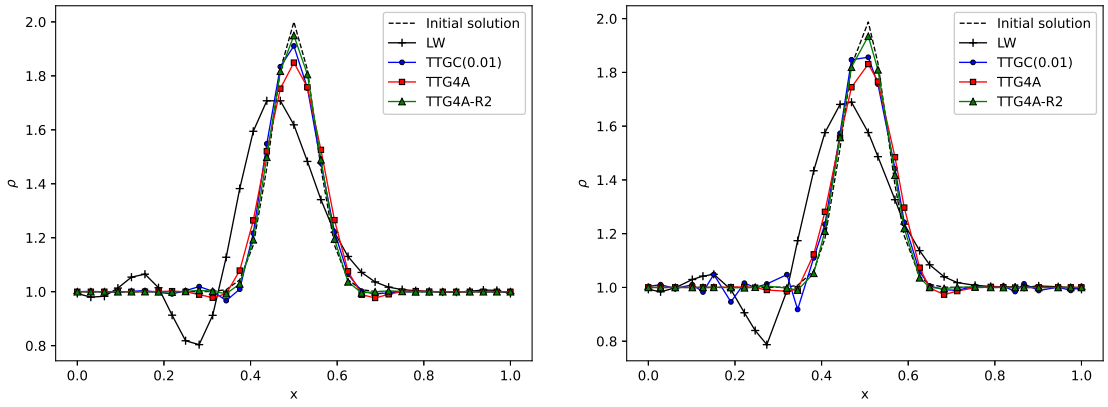
Le premier cas test correspond à la convection d'une onde entropique monodimensionnelle. L'ordre de convergence du schéma TTG4A-R2 est comparé aux schémas standards à $\nu = 0.3$ et $\nu = 0.7$

sur la Fig. 3.30. Il est clair que l'ordre de convergence est grandement amélioré pour TTG4A-R2 par rapport aux autres schémas, en particulier sur maillages perturbés. À noter qu'un nombre d'itérations égal à 20 a été utilisé pour la méthode de Jacobi. L'impact de ce choix sera quantifié juste après. Au final, TTG4A-R2 conserve un ordre de convergence supérieur à 4, même sur un maillage fortement perturbé, ce qui était l'objectif initial de ce nouveau formalisme. Les apports de la reconstruction quadratique sont également visibles sur des coupes selon l'axe x de la Gaussienne entropique pour deux discrétisations différentes $\Delta x = L_x/32$ (Fig. 3.31) et $\Delta x = L_x/20$ (Fig. 3.32). Pour les deux raffinements, TTG4A-R2 est significativement moins dissipatif que TTGC(0.01), tout en présentant une sensibilité à la qualité du maillage moindre par rapport à TTG4A.



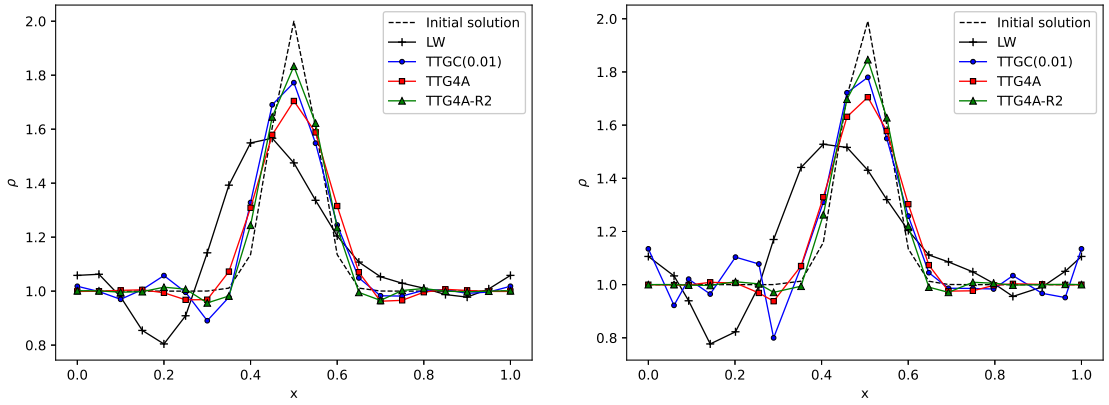
(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.30: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.



(a) $b_\Delta = 0$. (b) $b_\Delta = 0.5$.

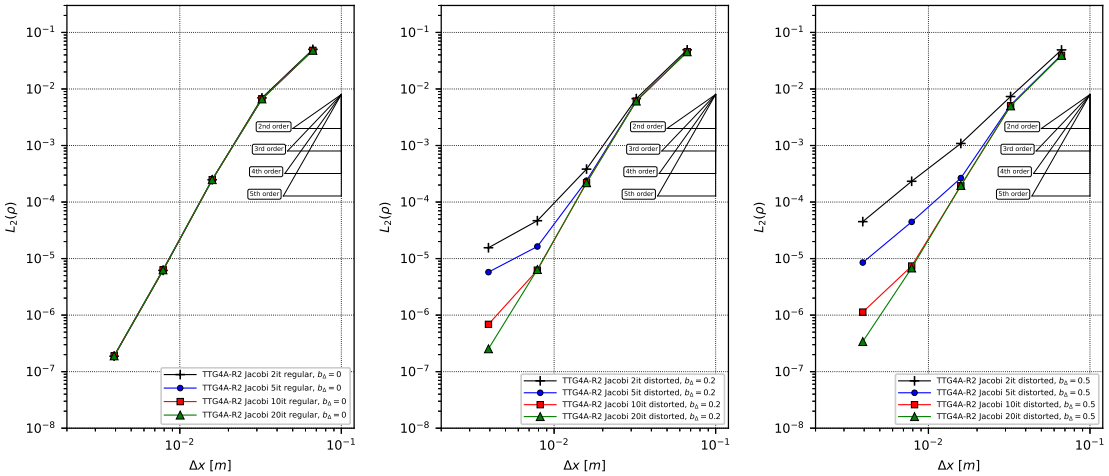
Figure 3.31: Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation de $\Delta x = L_x/32$ après 1 tour à $\nu = 0.7$.



(a) $b_\Delta = 0$. (b) $b_\Delta = 0.5$.

Figure 3.32: Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation de $\Delta x = L_x/20$ après 1 tour à $\nu = 0.7$.

En ce qui concerne l'impact du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi, pour le schéma TTGC, les travaux de Colin [57] ont montré que seulement deux itérations de la méthode de Jacobi été nécessaires pour donner un bon compromis entre temps de calcul et précision (sur maillages réguliers). Avec le nouveau schéma TTG4A-R2, l'impact du nombre d'itérations doit également être quantifié. Cette quantification est présentée en Fig. 3.33. Pour un maillage régulier ($b_\Delta = 0$), le nombre d'itérations ne modifie pas l'ordre de convergence. Dès 2 itérations, l'ordre de convergence atteint sa valeur maximale. Pour des maillages perturbés, 20 itérations de la méthode de Jacobi sont nécessaires pour obtenir un profil linéaire pour l'ordre de convergence (un nombre supérieur à 20 ne permet pas d'accroitre davantage l'ordre de convergence du schéma). Au final, le schéma TTG4A-R2 est bien plus sensible au nombre d'itérations que TTGC(0.01). L'impact du nombre d'itérations a aussi été quantifié pour TTGC(0.01) mais les résultats ne sont pas présentés ici. Cette sensibilité accrue s'explique simplement par l'ordre de convergence plus élevé de TTG4A-R2. En effet, même sur maillages perturbés, l'ordre de convergence de TTG4A-R2 reste excellent. L'erreur introduite par l'approximation de l'inverse par méthode de Jacobi est ainsi plus visible que TTGC(0.01) pour lequel l'erreur est dominée par l'erreur du schéma en lui-même. Pour TTCC(0.01), l'erreur de l'inversion est aussi bien présente mais demeure négligeable par rapport au reste.

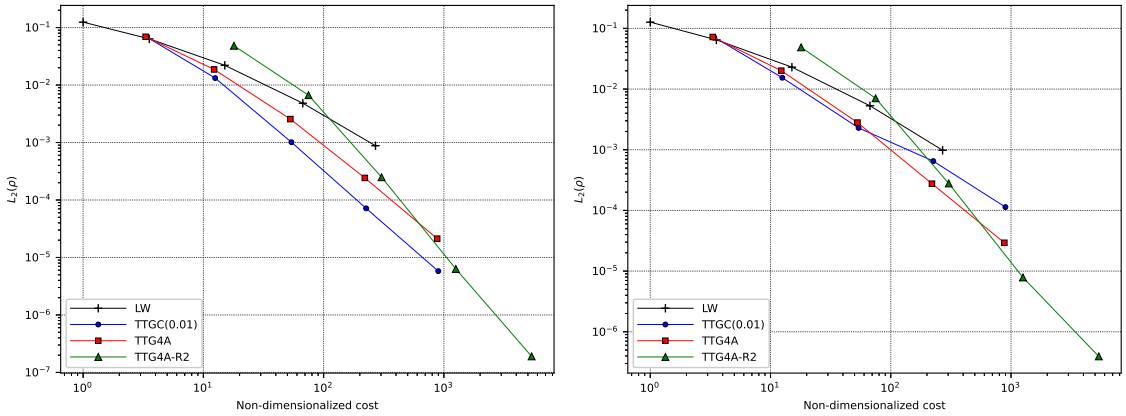


(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0$. (b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2$. (c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5$.

Figure 3.33: Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi sur le schéma TTG4A-R2 pour différents niveaux de perturbations et à $\nu = 0.7$ dans le cas de l'onde entropique.

Le schéma TTG4A-R2 présente des avantages certains notamment en termes d'ordre de convergence sur maillages perturbés. Néanmoins, pour que le nouveau formalisme puisse être utilisé en pratique, une quantification du coût supplémentaire introduit par ce formalisme par rapport aux schémas existants est nécessaire. Dans ce but, la Fig. 3.34 présente l'évolution de l'erreur quadratique sur la densité en fonction du coût de la simulation adimensionné par le coût de la simulation du schéma LW pour le raffinement le plus grossier.

Sur maillages réguliers ($\beta_\Delta = 0$) et pour des raffinements intermédiaires, le schéma TTGC(0.01) donne les meilleures performances. La pente de TTG4A-R2 est toutefois plus importante, ce qui signifie que TTG4A-R2 devient moins coûteux pour atteindre des niveaux d'erreur très bas. Sur maillages perturbés, étant donné que l'ordre de convergence de TTGC(0.01) est fortement dégradé, il est largement moins intéressant. Cette fois, c'est TTG4A qui est supérieur aux autres schémas pour des raffinements intermédiaires. Pour atteindre des erreurs très faibles, TTG4A-R2 se révèle là encore le moins coûteux des quatre schémas comparés.



(a) $\beta_\Delta = 0$. (b) $\beta_\Delta = 0.5$.

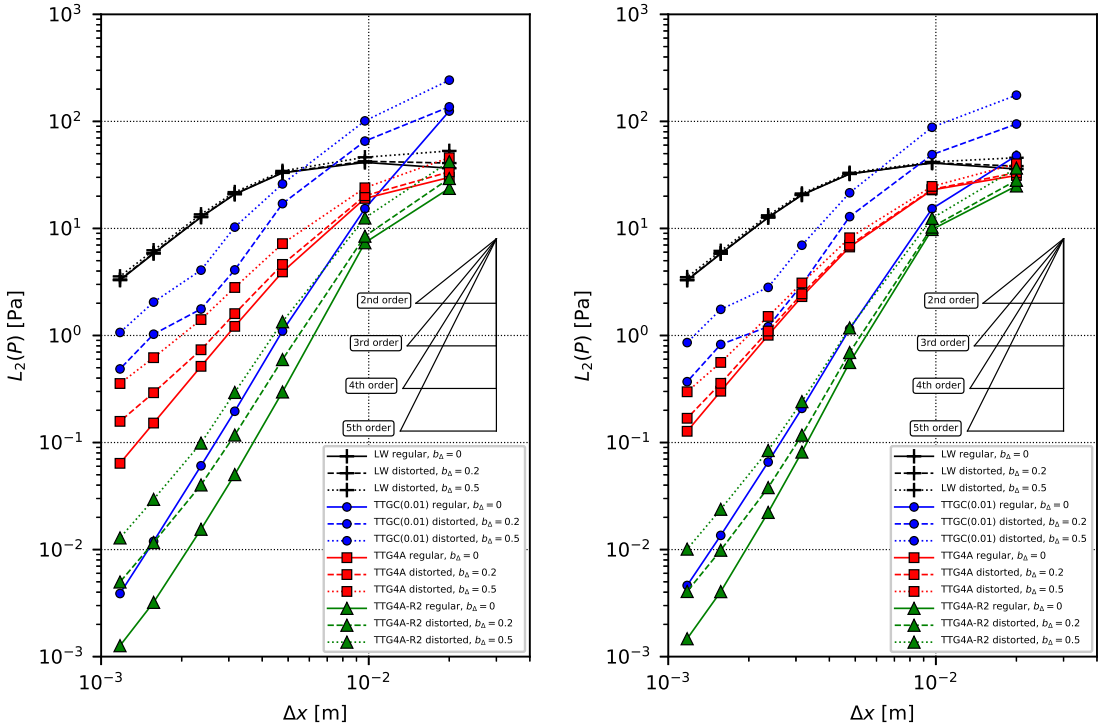
Figure 3.34: Évolution de l'erreur quadratique pour le cas de l'onde entropique en fonction du coût adimensionné de chaque schéma pour deux niveaux de perturbations à $\nu = 0.7$ (avec 20 itérations de la méthode de Jacobi pour les schémas éléments finis).

Convection d'un vortex isentropique

Le second cas test présenté s'intéresse à la convection d'un vortex isentropique. Comme pour le cas précédent, l'ordre de convergence de TTG4A-R2 est là aussi comparé aux trois schémas standards (Fig. 3.35). Sur maillages réguliers, les performances de TTG4A sont de nouveau très bonnes. L'ordre de convergence est supérieur à 4, avec un niveau d'erreur absolu meilleur que TTGC(0.01). À noter que lorsque le maillage est très grossier, ici $\Delta x = L_x/32$ pour le premier point de la courbe d'ordre, l'erreur de TTG4A-R2 est significativement plus faible que TTGC(0.01). Cela s'explique par l'utilisation de la reconstruction quadratique qui est très performante pour décrire la solution sur le maillage très peu résolu. Sur maillages perturbés, TTG4A-R2 présente des erreurs quadratiques largement plus faibles que les trois autres schémas. Néanmoins, il est intéressant de remarquer que TTG4A-R2 est plus impacté par la qualité du maillage sur ce cas de convection d'un vortex isentropique que pour le cas de la Gaussienne entropique. Une explication probable réside dans l'hypothèse faite sur la matrice Jacobienne des flux. Pour rappel, cette dernière est considérée comme constante dans chaque élément, ce qui est vrai pour la convection d'un scalaire. Cependant, ce n'est plus le cas pour la convection d'un vortex isentropique. Cela pourrait aussi expliquer pourquoi même sur maillages réguliers, l'ordre de convergence est inférieur sur ce cas par rapport à la Gaussienne entropique pour TTG4A-R2.

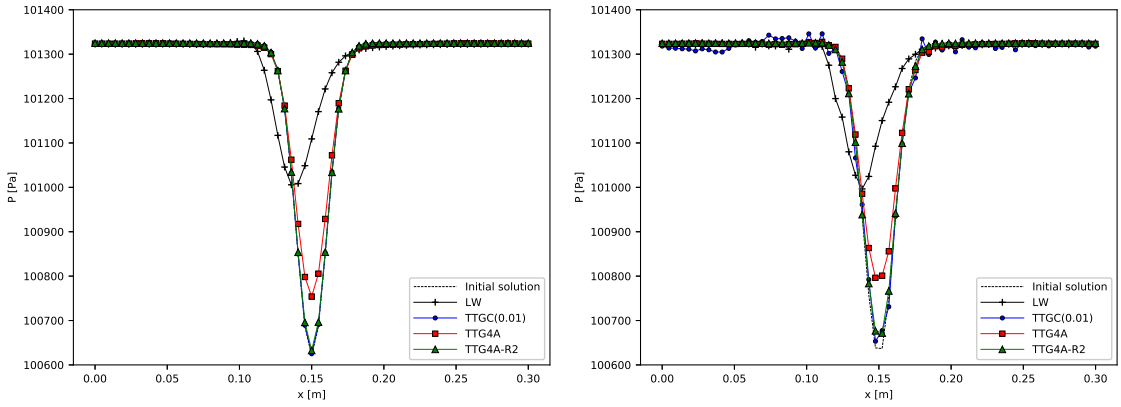
Pour mieux comprendre l'impact de la différence d'ordre de convergence sur la solution en elle-même, la Fig. 3.36 présente les profils de pression à $y = 0.15$ après un tour pour $\Delta x = L_x/64$ et pour les quatre schémas dont l'ordre est comparé. Comme pour le cas de l'onde entropique, sur

maillages réguliers, les performances de TTG4A-R2 et TTGC(0.01) sont très comparables. Ils sont tous les deux très peu dissipatifs et leur solution finale respective est quasiment superposée à la solution initiale. Sur maillages perturbés, les observations sont très différentes. La dégradation des performances de TTGC(0.01) sur maillages perturbés est ici clairement visible, avec l'apparition de *wiggles* dans tout le domaine. Au contraire, TTG4A-R2 est très peu affecté par la dégradation de la qualité du maillage. Il maintient un niveau de dissipation faible, sans apparition de *wiggles*.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

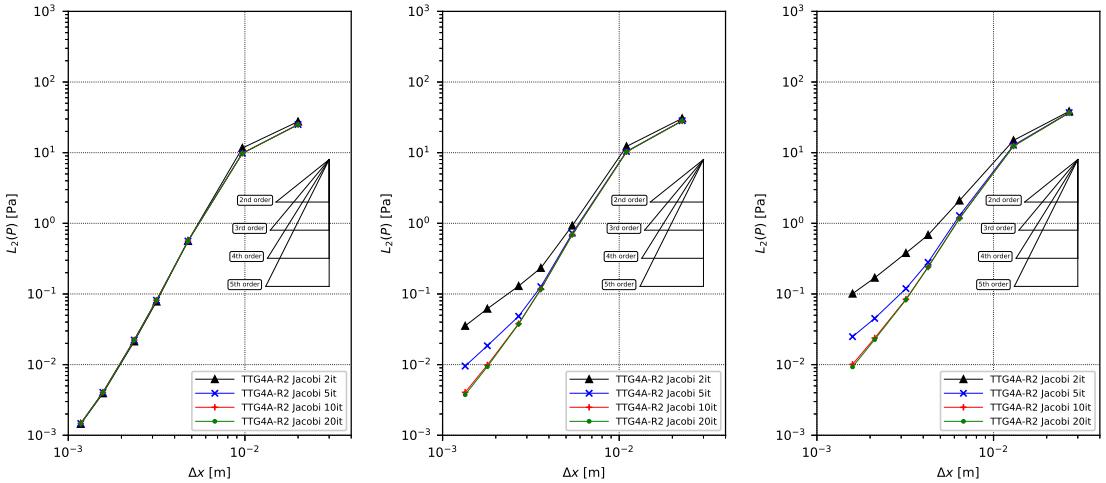
Figure 3.35: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.



(a) $b_\Delta = 0$. (b) $b_\Delta = 0.5$.

Figure 3.36: Profils de pression en $y = 0.15$ après un tour pour $\Delta x = L_x/64$ pour deux niveaux de perturbations du maillage pour le cas du vortex isentropique.

Comme pour le cas précédent, l'impact du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi est aussi quantifié sur le cas de la convection du vortex isentropique. Cet effet est visible sur la Fig. 3.37 et apparaît comme plus mesuré que pour l'onde entropique. Un nombre d'itérations autour de 10 semble suffisant pour atteindre la valeur d'erreur la plus faible possible. Ce nombre d'itérations plus faible que pour l'onde entropique s'explique aussi probablement par l'hypothèse faite sur la matrice Jacobienne des flux (considérée comme constante dans chaque cellule). À partir d'environ 10 itérations, il n'est plus possible de réduire davantage l'erreur en augmentant le nombre d'itérations puisque l'erreur introduite par l'hypothèse sur la matrice Jacobienne devient prédominante.



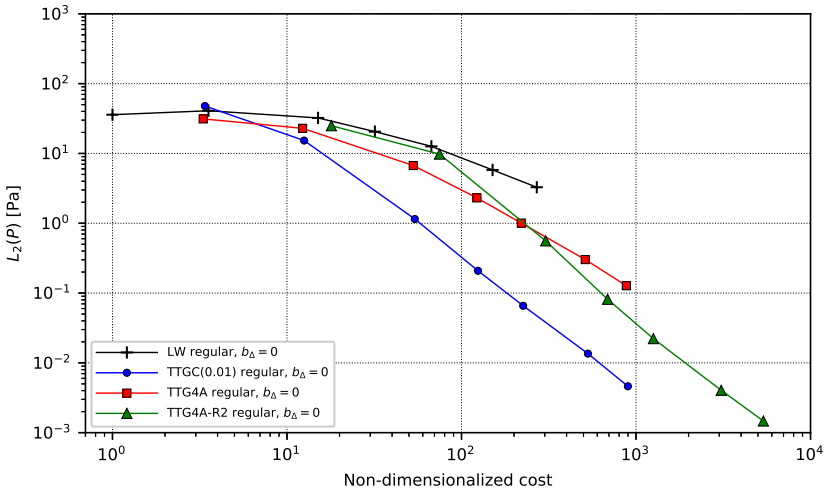
(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0.$ (b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2.$ (c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5.$

Figure 3.37: Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi sur le schéma TTG4A-R2 pour différents niveaux de perturbations et à $\nu = 0.7$ dans le cas du vortex isentropique.

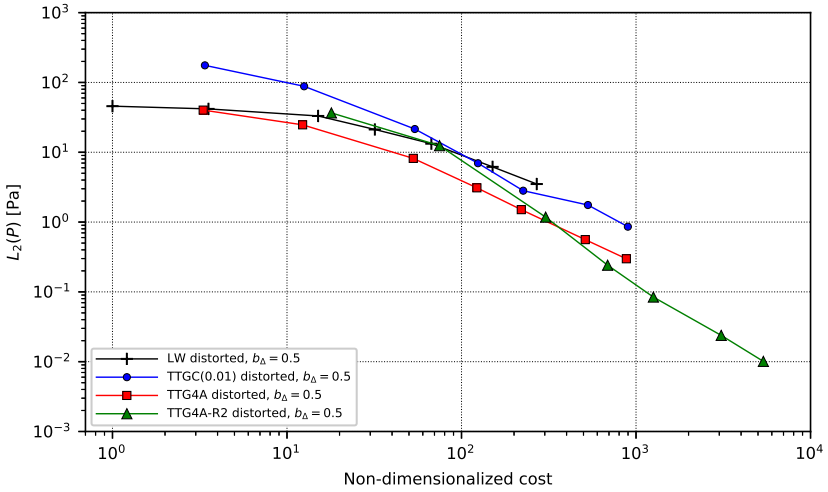
Enfin, la dernière étape sur ce cas test consiste à comparer les coûts associés à chacun des schémas. La comparaison se fait de manière identique à l'onde entropique, c'est-à-dire que l'erreur quadratique sur la pression est tracée en fonction du coût adimensionné de chaque simulation (Fig. 3.38). L'adimensionnement est fait par rapport au coût de la simulation avec le schéma LW pour le raffinement le plus grossier.

Sur maillages réguliers, comme pour le cas test précédent, TTGC(0.01) donne clairement le meilleur ratio entre le niveau d'erreur et le temps de calcul. Pour les niveaux d'erreur très faibles, comme les pentes de TTGC(0.01) et TTG4A-R2 semblent quasiment identiques, TTG4A-R2 ne sera pas plus performant en augmentant le raffinement. Sur maillages perturbés, TTG4A-R2 devient de nouveau plus performant lorsque le raffinement augmente à cause de la dégradation de l'ordre de convergence de TTGC(0.01) et de l'ordre de convergence plus faible de TTG4A.

Le bénéfice des schémas ordre élevé en termes de coût de calcul à iso-niveau d'erreur a déjà été observé par le passé. Par exemple, dans le cadre du projet CN2020 (Cœurs Numériques 2020), l'objectif était de comparer plusieurs codes de calcul sur différents cas tests de complexité croissante. En particulier, le cas de la convection d'un vortex isentropique faisait partie de ce projet [38]. La comparaison entre AVBP utilisant le schéma TTGC et un code Galerkin discontinu comme ARGO [127] a montré que sur maillages perturbés, l'utilisation de reconstructions d'ordre élevé au sein de chaque élément permet d'obtenir un meilleur temps de retour pour un niveau d'erreur fixé. Au niveau mathématique, le schéma TTG4A-R2 est différent d'un schéma obtenu par une méthode Galerkin discontinu mais il est possible de faire un rapprochement entre TTG4A-R2 et des éléments quadratiques pour la méthode Galerkin discontinu. C'est pourquoi, il n'est pas surprenant d'observer un comportement similaire à ce dernier sur un cas test identique.



(a) $\beta_\Delta = 0$.



(b) $\beta_\Delta = 0.5$.

Figure 3.38: Évolution de l'erreur quadratique pour le cas du vortex isentropique en fonction du coût adimensionné de chaque schéma pour deux niveaux de perturbations à $\nu = 0.7$ (avec 10 itérations de la méthode de Jacobi pour les schémas éléments finis).

Couche de cisaillement linéaire

Ce cas test considère une couche de cisaillement en 2D avec un profil de vitesse linéaire. La solution initiale correspond à la superposition d'un profil moyen de vitesse avec une perturbation qui permet de déclencher une instabilité. Pour ce problème, la théorie des écoulements non visqueux permet de déterminer analytiquement le taux de croissance des vortex générés à partir de la longueur d'onde de la perturbation [48, 84]. Le taux de croissance obtenu à partir de différentes simulations peut ainsi être facilement comparé à la valeur analytique. Le choix de ce cas test est motivé par les exigences de la LES qui nécessitent d'être capable de simuler avec précision l'évolution d'un vortex au sein d'un écoulement. Ce cas de validation permet de vérifier que la croissance du tourbillon est en accord avec la valeur théorique, ce qui est un prérequis important pour obtenir des résultats satisfaisants sur des écoulements plus complexes contenant un ensemble de tourbillons.

La solution initiale du problème est définie par un profil moyen de vitesse sur lequel est superposé une perturbation qui permet de déclencher une instabilité. Les caractéristiques de ces profils sont les suivantes,

- Profil moyen de vitesse

  Le profil moyen de vitesse est linéaire, comme le montre la Fig. 3.39 et se définit par le système d'équations suivant,

$$U(y) = \begin{cases} U_1 & \text{si} \quad y \geqslant \dfrac{d}{2}, \\ \dfrac{U_1 - U_2}{d} y + \dfrac{U_1 + U_2}{2} & \text{si} \quad \dfrac{d}{2} > y > -\dfrac{d}{2}, \\ U_2 & \text{si} \quad y \leqslant -\dfrac{d}{2}, \end{cases} \tag{3.131}$$

  avec d l'épaisseur de la couche de cisaillement, U_1 le vitesse constante dans la région supérieure et U_2 la vitesse constante dans la région inférieure.

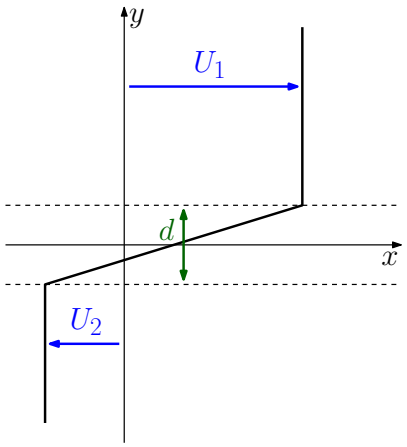


Figure 3.39: Profil moyen de vitesse.

- Profil de la perturbation

  Pour étudier l'évolution de la perturbation dans une couche linéaire de cisaillement, une perturbation est ajoutée au profil moyen de vitesse. Cette perturbation se définit par les expressions suivantes, où le symbole $'$ dénote la perturbation sur la variable considérée,

$$\begin{cases} u_1'^0 = kBe^{-ky}\sin(kx) & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ u_2'^0 = kBe^{-ky}\cos(kx) & \text{si} \quad y < 0, \end{cases} \tag{3.132}$$

$$\begin{cases} v_1'^0 = kBe^{-ky}\cos(kx) & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ v_2' = kBe^{-ky}\sin(kx) & \text{si} \quad y < 0, \end{cases} \tag{3.133}$$

  avec B un réel qui correspond au coefficient de la perturbation et $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde de la perturbation considérée. Cette superposition est représentée sur la Fig. 3.40.

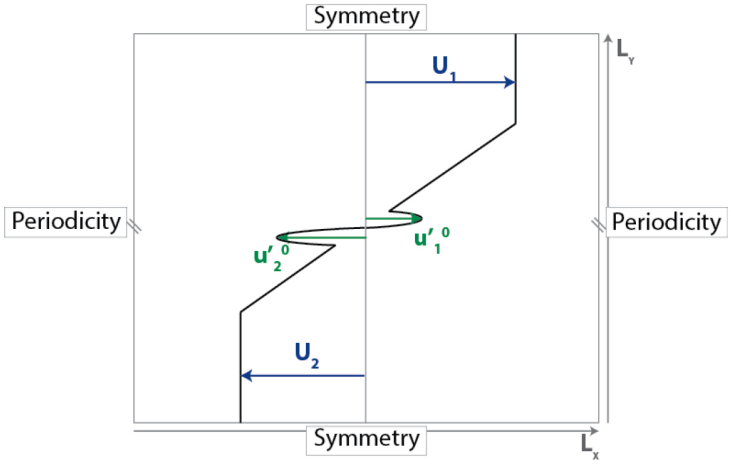


Figure 3.40: Profil de vitesse initial avec la superposition de la perturbation.

Les paramètres généraux du problème simulé sont détaillés dans la Table 3.1.

Largeur du domaine	$L_x = \lambda$
Hauteur du domaine	$L_y = 0.5$ m
Épaisseur de la couche de cisaillement	$d = 0.1$ m
Résolution dans la direction x	$\lambda/\Delta x = 40$
Résolution dans la direction y	$d/\Delta y = 5$
Vitesse moyenne dans la partie supérieure	$U_1 = 5$ m/s
Vitesse moyenne dans la partie inférieure	$U_2 = -5$ m/s
Coefficient de la perturbation	$B = 5.10^{-3}$

Table 3.1: Paramètres généraux du cas test de la couche linéaire de cisaillement.

Après une analyse de stabilité du problème, la relation de dispersion de l'Eq. (3.134) montre que le système possède deux valeurs propres complexes conjuguées.

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \frac{U_1 - U_2}{2kd}\sqrt{(kd-1)^2 - e^{-2kd}}, \tag{3.134}$$

avec $k = 2\pi/\lambda$. Le taux de croissance de l'instabilité à la longueur d'onde λ, noté $\sigma_{\text{theo, adim}}$, peut alors s'exprimer en prenant la partie imaginaire de kc, adimensionnée par $(U_1 - U_2)/d$,

$$\sigma_{\text{theo, adim}} = \text{Im}(kc)\frac{d}{U_1 - U_2} = \frac{1}{2}\,\text{Im}\left(\sqrt{(kd-1)^2 - e^{-2kd}}\right). \tag{3.135}$$

La Figure 3.41 représente l'évolution du taux de croissance de l'instabilité en fonction de kc. La valeur maximale du taux de croissance se situe aux alentours de $kc = 0.8$. Les propriétés de la configuration sont choisies pour se placer à cette valeur, ce qui signifie que la valeur attendue du taux de croissance se situe autour de 0.2.

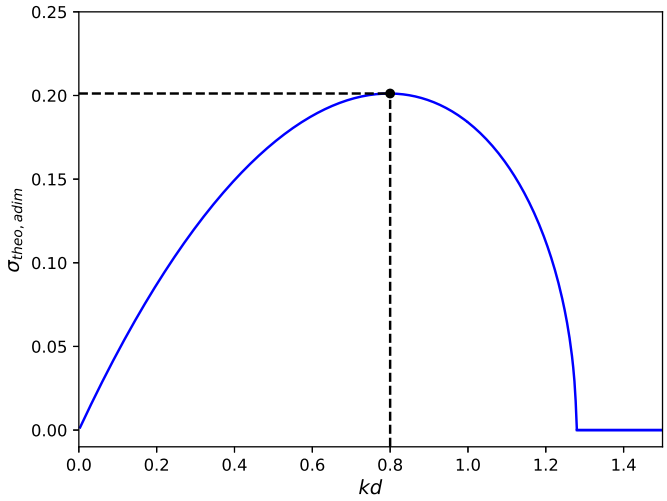
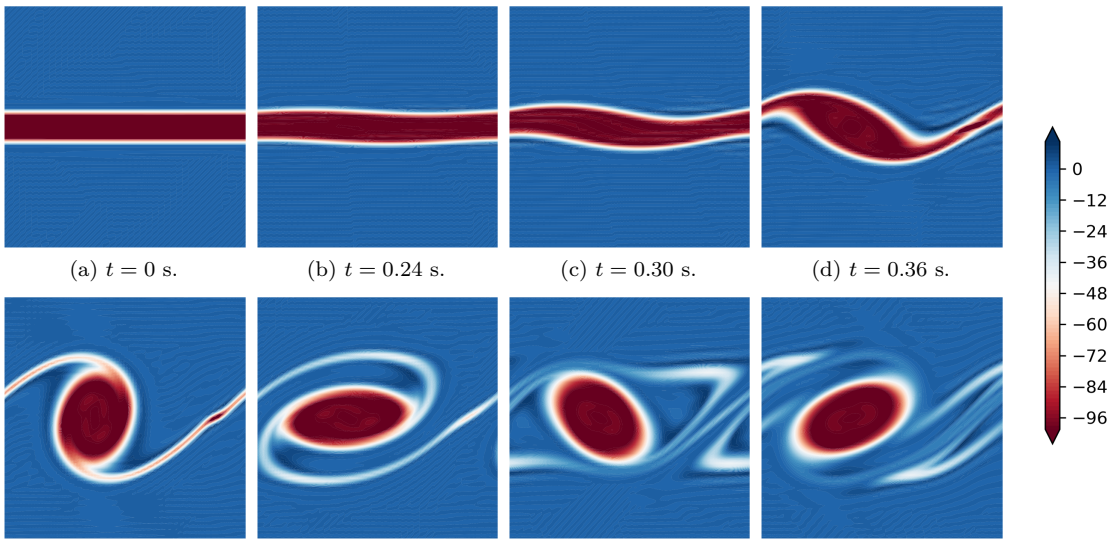


Figure 3.41: Taux de croissance σ de l'instabilité hydrodynamique de la couche de cisaillement en fonction de la longueur d'onde réduite kd.

La Figure 3.42 met en évidence l'apparition de l'instabilité en traçant un contour de vorticité depuis la solution initiale jusqu'à $t = 0.60$ s. Il est important de souligner que l'hypothèse de linéarité faite dans l'étude analytique est valide jusqu'à l'apparition du vortex, ce qui correspond à environ $t = 0.30$ s.



(a) $t = 0$ s. (b) $t = 0.24$ s. (c) $t = 0.30$ s. (d) $t = 0.36$ s.

(e) $t = 0.42$ s. (f) $t = 0.48$ s. (g) $t = 0.52$ s. (h) $t = 0.60$ s.

Figure 3.42: Évolution temporelle du champ de vorticité pour TTGC à $b_\Delta = 0$.

En termes d'exploitation, le taux de croissance de la perturbation est calculé en partir des simulations en évaluant la variation de l'intégrale sur le domaine de l'énergie cinétique dans la direction transversale de l'écoulement, i.e. $Ec(v)$. L'évolution de cette quantité est présentée pour différents schémas et pour deux maillages, l'un régulier et l'autre perturbé en Fig. 3.43. Sur maillages réguliers, dans la région linéaire, les schémas LW et TTG4A donnent une pente plus faible que les schémas TTGC(0.01) et TTG4A-R2. Les valeurs exactes des pentes obtenues sont données dans la Table 3.2. Pour $b_\Delta = 0$, seuls les schémas TTGC(0.01) et TTG4A-R2 sont capables de prédire correctement la valeur du taux de croissance. Cela s'explique par le niveau de dissipation trop important des schémas LW et TTG4A qui ralentit l'évolution de l'instabilité. Sur maillages perturbés ($b_\Delta = 0.25$), les résultats sont différents. LW et TTG4A sont toujours incapables de

prédire la valeur correcte du taux de croissance. Par ailleurs, sur ce maillage, la pente obtenue pour TTGC(0.01) est nettement moins satisfaisante que pour le cas régulier. Dès le début de la simulation, le niveau d'énergie cinétique est largement supérieur à l'évolution théorique puisque l'apparition de *wiggles* dans le domaine accélère la transition linéaire de l'instabilité. Pour le schéma TTG4A-R2, cet effet est beaucoup moins présent puisque ce dernier est moins sensible à la qualité du maillage comme l'ont montré les cas tests précédents. Cela lui permet de conserver un taux de croissance très proche du cas régulier malgré les perturbations du maillage.

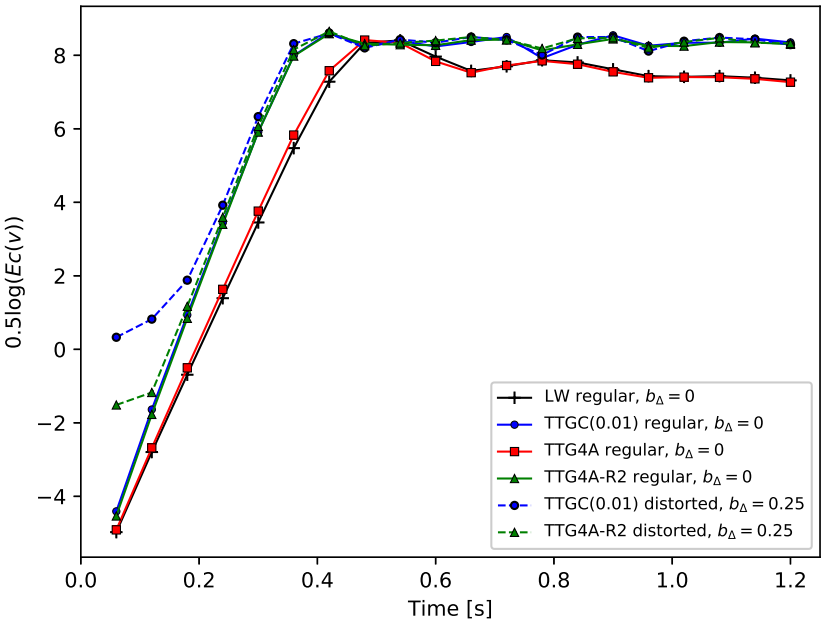


Figure 3.43: Évolution temporelle de $0.5\log(Ec(v))$.

	Régulier, $b_\Delta = 0$	Perturbé, $b_\Delta = 0.25$
LW	0.171	0.144
TTGC(0.01)	0.196	0.179
TTG4A	0.176	0.144
TTG4A-R2	0.198	0.194

Table 3.2: Comparaison du taux de croissance de l'instabilité. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la valeur théorique. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %.

Perspectives d'amélioration du nouveau formalisme

Les comparaisons précédentes ont mis en évidence les propriétés très intéressantes du nouveau formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique. Néanmoins, ce formalisme présente aussi des inconvénients par rapport aux schémas existants. Un bilan comparatif des schémas étudiés dans ce chapitre s'attachera à fournir des outils de comparaison sur un ensemble de critères pour effectivement juger de la qualité de chaque schéma. Ce bilan est présenté en Section 3.4, mais quelques perspectives d'amélioration pour le formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique peuvent déjà être détaillées.

Coût de calcul

Dans l'état actuel de l'implémentation, le formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique se révèle être naturellement plus coûteux que les schémas TTG classiques. Cet augmentation de coût est causée par plusieurs étapes nécessaires au schéma :

- La reconstruction quadratique nécessite l'obtention des opérateurs nodaux sur l'ensemble du domaine, entrainant un coût supplémentaire.
- Les formules de quadrature permettant l'intégration des polynômes pour le calcul des différents termes du schéma génèrent aussi un surcoût.
- Le nombre plus important d'itérations de la méthode de Jacobi pour inverser la matrice de masse contribue aussi largement à l'augmentation du coût total. En particulier puisque chaque itération de la méthode demande le calcul des opérateurs nodaux pour déterminer la reconstruction quadratique au sein de chaque élément, ce qui est plus coûteux qu'une itération de Jacobi pour les schémas TTG standards.

Sur l'ensemble de ces points, le dernier est en pratique le plus pénalisant en termes de temps de calcul. Et l'implémentation qui a été faite a surtout été choisie pour utiliser une implémentation proche de la méthode déjà existante dans AVBP pour approximer l'inverse de la matrice de masse. Elle a aussi été retenue pour un point particulier : comme l'a montré l'analyse sur maillages réguliers en 1D du formalisme, le terme de la matrice de masse d'un nœud i implique des nœuds du domaine au delà de ses plus proches voisins (les plus proches voisins de ses plus proches voisins pour être exact). Or, dans un code non structuré et massivement parallèle, la connectivité nœud à nœud au delà des plus proches voisins est en pratique très difficile et/ou très coûteuse à obtenir. La méthode d'inversion retenue permet de boucler sur les éléments en contact avec le nœud i et de reconstruire le polynôme de l'élément sans avoir besoin de cette connectivité.

Malgré tout, le calcul des opérateurs nodaux et de la reconstruction quadratique à chaque itération de Jacobi demande des ressources importantes et peut sembler assez inefficace. En particulier parce que comme le montre l'Eq. (3.87), le terme de la matrice de masse est linéaire, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont multipliées par des coefficients constants qui ne dépendent pas de la solution. En théorie, ces coefficients pourraient donc être stockés au sein de chaque élément pour éviter le calcul de la reconstruction quadratique à chaque itération temporelle. Ce point nécessite des modifications assez importantes dans le code actuel mais constitue une piste très intéressante pour améliorer significativement les performances de ce formalisme. Pour cette raison, cette piste sera étudiée avec intérêt dans un futur proche.

Expression de la Jacobienne des flux

Comme expliqué dans la description du formalisme, la matrice Jacobienne des flux est considérée comme constante au sein de chaque élément du domaine et de ce fait, elle peut être sortie de l'intégrale des termes du schéma. Néanmoins, comme mis en évidence par la différence d'ordre de convergence entre le cas test de la convection d'un scalaire (pour lequel la Jacobienne est effectivement constante) et celui de la convection d'un vortex isentropique (pour lequel ce n'est plus le cas), cette hypothèse dégrade significativement les performances du schéma. Quelques idées peuvent être avancées pour tenter de résoudre de problème.

La plus évidente consiste, en 2D, à laisser la matrice Jacobienne au sein de l'intégrale en la considérant comme non constante au sein de chaque élément. Dans le cas des équations d'Euler en deux dimensions, la matrice Jacobienne des flux s'écrit,

$$\underline{\mathbf{A}}_e(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\gamma-1)q^2-u^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ \left((\gamma-1)q^2-H\right)u & H-(\gamma-1)u^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{pmatrix}, \tag{3.136}$$

$$\underline{\mathbf{B}}_e(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ (\gamma-1)q^2 - v^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ \left((\gamma-1)q^2 - H\right)v & H-(\gamma-1)v^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma v \end{pmatrix}, \tag{3.137}$$

avec $q^2 = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)$ et $H = (E+p)/\rho$ l'enthalpie totale.

Il est dans ce cas possible de chercher une reconstruction quadratique au sein de chaque élément pour les grandeurs ρ, u, v et H à la manière de ce qui a été fait pour les flux. Une fois ces grandeurs exprimées sous la forme de polynôme de degré 2, elles peuvent facilement être incluses dans les intégrales, rendant possible l'intégration par formules de quadrature comme décrit précédemment.

Cette idée peut sembler intéressante mais en pratique, elle souffre d'un inconvénient majeur : l'ordre des polynômes à intégrer est significativement plus élevé que dans le cas où la matrice Jacobienne est constante. En prenant le cas le plus extrême, le premier terme de la quatrième ligne de $\underline{\mathbf{A}}_e(x,y)$ génère un polynôme d'ordre 6, qui lui même est multiplié à un polynôme d'ordre 1. Ce qui donne au final, un polynôme d'ordre 7 à intégrer, nécessitant au minimum 13 points de quadrature avec les formules de quadrature de Gauss. Ce point particulier accroît significativement le coût total de la méthode, mais demeure toutefois une piste intéressante à explorer.

Extension de la méthode au cas 3D

L'extension de la méthodologie précédente au cas 3D est aussi une étape importante puisque la majorité des applications réelles se fait en 3D, mais elle ne pose pas de difficultés particulières. L'expression d'un polynôme quadratique en 3D fait intervenir 10 coefficients à déterminer, tels que,

$$\begin{aligned} U_e(x,y,z) = a + b(x-x_1) + c(y-y_1) + d(z-z_1) + e(x-x_1)^2 + f(x-x_1)(y-y_1) \\ + g(x-x_1)(z-z_1) + h(y-y_1)^2 + i(y-y_1)(z-z_1) + j(z-z_1)^2. \end{aligned} \tag{3.138}$$

Comme pour le cas 2D, les 10 coefficients peuvent être déterminés en utilisant les 4 valeurs et les 6 valeurs aux demi-arrêtes obtenues par extrapolation des valeurs nodales à chaque extrémité de l'arrête (Fig. 3.44). Cette extrapolation se fait en calculant au préalable les opérateurs nodaux en chaque nœud du maillage par l'inversion d'un système linéaire similaire à l'Eq. (3.104). À noter qu'en 3D, l'inversion du système linéaire pour trouver les opérateurs nodaux nécessitent au moins 9 voisins directs (3 dérivées premières et 6 dérivées croisées). Les fonctions tests $\psi_i(x,y,z)$ correspondent quant à elles aux fonctions tests linéaires classiques pour un tétraèdre quelconque [193].

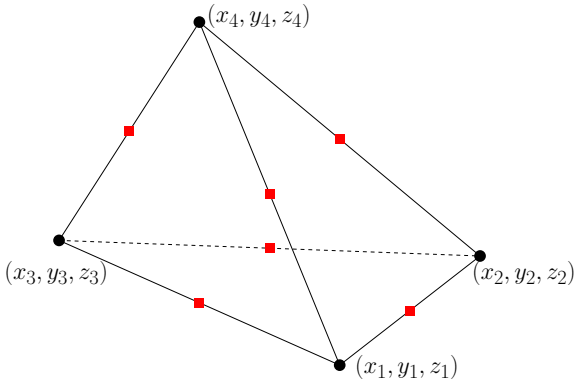


Figure 3.44: Illustration d'un tétraèdre quelconque avec ses quatre vertex et les six points aux demi-arrêtes.

Dérivation d'un schéma TTG-R2 à trois étapes

À la manière de ce qui a été fait pour le formalisme TTG standard dans la Section 3.3.1, il est aussi possible d'envisager des schémas à trois étapes utilisant la reconstruction quadratique précédemment introduite. Cette famille de schémas sera notée TTG-3S-R2 dans la suite et elle se présente sous la même forme que les schémas TTG-3S dont la formulation est donnée par le système (3.56).

L'expression du coefficient d'amplification des schémas TTG-3S-R2 diffère quant à elle de la famille TTG-3S puisque les expressions des opérateurs L et LL sont différentes. Le coefficient s'exprime avec les notations précédentes comme,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R2}}(k) &= 1 - \left(\alpha\nu\hat{\Delta}_{0,R2} - \beta\nu^2\hat{\delta}^2_{R2}\right)/\hat{M}_{R2},\\
\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R2}}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\theta_1\hat{\Delta}_{0,R2} + \theta_2\hat{\Delta}_{0,R2})\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R2}}(k)\right)\\
&\quad -\nu^2\left(\epsilon_1\hat{\delta}^2_{R2} + \epsilon_2\hat{\delta}^2_{R2}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R2}}(k)\right)\Big]/\hat{M}_{R2},\\
G_{\text{TTG-3S-R2}}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\mu_1\hat{\Delta}_{0,R2} + \mu_2\hat{\Delta}_{0,R2}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R2}}(k) + \mu_3\hat{\Delta}_{0,R2}\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R2}}(k)\right)\\
&\quad -\nu^2\left(\delta_1\hat{\delta}^2_{R2} + \delta_2\hat{\delta}^2_{R2}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R2}}(k) + \delta_3\hat{\delta}^2_{R2}\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R2}}(k)\right)\Big]/\hat{M}_{R2}.
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Pour monter d'un ordre par rapport au schéma TTG4A-R2, il est nécessaire d'imposer les contraintes permettant d'obtenir un ordre 5. Le système des contraintes s'écrit (la méthode de calcul est la même que pour les cas précédents, *i.e.* par développement de Taylor du coefficient d'amplification),

$$\begin{cases}
\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1,\\
\alpha\mu_2 + \mu_3(\theta_1 + \theta_2) + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \dfrac{1}{2},\\
\alpha\delta_2 + \alpha\mu_3\theta_2 + \beta\mu_2 + \delta_3\theta_1 + \delta_3\theta_2 + \mu_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \dfrac{1}{6},\\
\alpha\delta_3\theta_2 + \alpha\epsilon_2\mu_3 + \beta\delta_2 + \beta\mu_3\theta_2 + \delta_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \dfrac{1}{24},\\
\alpha\delta_3\epsilon_2 + \beta\delta_3\theta_2 + \beta\epsilon_2\mu_3 = \dfrac{1}{120},\\
\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0,
\end{cases} \tag{3.140}$$

qui est indéterminé. La reconstruction quadratique ne permet donc pas d'obtenir un schéma d'ordre 5 à trois étapes.

Note complémentaire sur la condition du nombre de voisins pour obtenir les opérateurs nodaux

Comme mentionné lors de la partie sur l'obtention des opérateurs nodaux en 2D grâce au système (3.104), l'inversion de ce dernier nécessite au minimum 5 nœuds dans le voisinage du nœud concerné. Or, dans le cas d'un maillage quelconque, cette condition n'est pas garantie, en particulier proche des conditions limites. Dans l'hypothèse où le nombre de voisins n'est pas suffisant pour inverser le système (3.104), la solution retenue consiste à limiter le calcul des opérateurs nodaux aux deux gradients en 2D. Ce calcul nécessite seulement deux voisins, ce qui est toujours le cas puisque le voisinage d'un nœud est toujours composé au minimum des vertex qui composent l'élément auquel il appartient. En 2D, pour un triangle, il y a donc bien au minimum deux nœuds dans ce voisinage.

Dans le cas où le nombre de voisins n'est pas suffisant pour inverser le système complet, l'extrapolation au niveau des demi-arrêtes se fait donc en considérant seulement les gradients dans les deux directions. L'Équation (3.105) est remplacée par,

$$U_{ij}^{*} = \frac{1}{2}\left[U_i + \frac{1}{2}\Delta x_{i,j}\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta y_{i,j}\frac{\partial U_i}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\left[U_j - \frac{1}{2}\Delta x_{i,j}\frac{\partial U_j}{\partial x} - \frac{1}{2}\Delta y_{i,j}\frac{\partial U_j}{\partial y}\right]. \tag{3.141}$$

Lorsque la formule d'interpolation aux demi-arrêtes précédente est utilisée à la place de l'Eq. (3.105), il est important de vérifier que la stabilité du schéma n'est pas impacté, mais aussi de déterminer les conséquences sur l'ordre du schéma qui en découle. Après des calculs analytiques en 1D en utilisant la même méthodologie que pour la reconstruction complète, les opérateurs obtenus sont les suivants,

$$L_i = c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\psi_i(x)dx = -\frac{c}{12}\left(-U_{i-2} + 8U_{i-1} - 8U_{i+1} + U_{i+2}\right), \tag{3.142}$$

$$LL_i = c^2\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x)dx = \frac{c^2}{\Delta x}\left(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}\right), \tag{3.143}$$

$$MU_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_e(x)\psi_i(x)dx = \frac{\Delta x}{24}\left(-U_{i-2} + 4U_{i-1} + 18U_i + 4U_{i+1} - U_{i+2}\right). \tag{3.144}$$

Il s'avère qu'avec les opérateurs précédents, le système exprimant les contraintes sur les coefficients des schémas est le même que pour la famille TTG standard, *i.e.*,

$$\begin{cases} a_1 = \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ a_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ a_3 = \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ a_4 = \beta\epsilon_2 = \dfrac{1}{24}, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \end{cases} \tag{3.145}$$

Ainsi, le système précédent étant indéterminé, comme pour les schémas TTG classiques, il n'est pas possible d'obtenir un schéma d'ordre 4 en utilisant une reconstruction quadratique à partir des gradients uniquement. Néanmoins, puisque les contraintes pour obtenir un ordre 3 des schémas de la famille TTG-R2 exprimées par le système (3.97) sont les mêmes que le système précédent, le schéma obtenu avec la reconstruction dégradée sera lui aussi d'ordre 3.

À titre illustratif, la répartition du nombre de voisins d'un maillage non structuré en 2D est calculée pour le maillage présenté en Fig. 3.45. Il correspond à un domaine carré discrétisé à l'aide d'un logiciel de maillage non structuré classiquement utilisé pour obtenir les maillages des simulations AVBP. Le nombre de voisins de chaque nœud du maillage est tracé par l'histogramme de la Fig. 3.46. L'axe y de l'histogramme correspond au nombre de nœuds ayant un nombre de voisins donné, divisé par le nombre total de nœuds du maillage. Les nœuds avec un nombre de voisins strictement inférieur à 5 sont mis en évidence par des marqueurs rouges. Il est clair que ces derniers sont tous localisés au niveau des bords. Ainsi, même si la contrainte d'avoir un nombre minimal de voisins pour obtenir les opérateurs nodaux peut sembler assez pénalisante, en pratique, elle est très peu restrictive et c'est majoritairement les nœuds aux bords qui seront concernés par la diminution d'ordre du schéma. Ce qui est d'ailleurs le cas pour la majorité des schémas numériques.

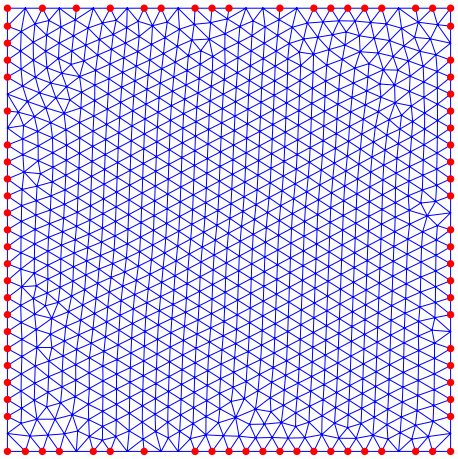


Figure 3.45: Illustration de la contrainte du nombre de voisins sur un maillage non structuré. Les ronds rouges correspondent aux nœuds ayant un nombre de voisins strictement inférieur à 5.

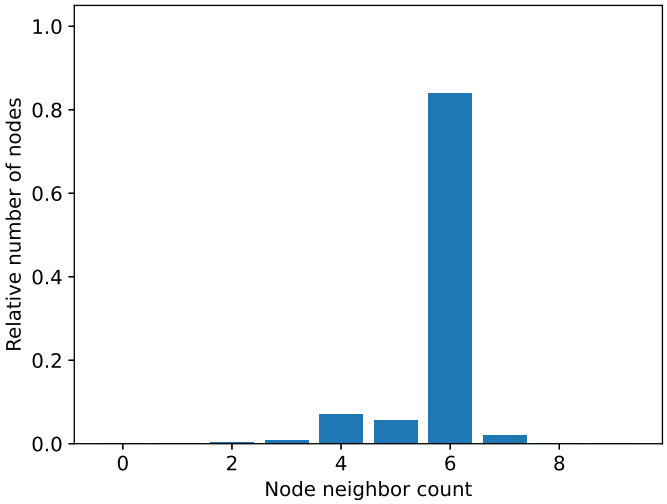


Figure 3.46: Histogramme présentant la répartition en termes de nombre de voisins des noeuds du maillage de la Fig. 3.45. Cette répartition est exprimée en termes de nombre relatif de noeuds, *i.e.* le nombre de noeuds ayant un nombre de voisins donné, divisé par le nombre total de nœuds du maillage.

Traitement des termes diffusifs

Une autre perspective de la méthode est le calcul des termes diffusifs. Jusqu'à présent, seul le calcul des termes convectifs a été abordé. Néanmoins, les flux diffusifs jouent également un rôle dans la précision des simulations. Dans la Section 2.4.4 qui présente l'implémentation de la méthode de calcul des flux diffusifs dans AVBP, la méthode utilisée est décrite comme proche d'une méthode des éléments finis de Galerkin. Avec le formalisme de Petrov-Galerkin introduit ici, il serait aussi envisageable d'utiliser des reconstructions polynomiales pour les flux diffusifs et ainsi accroître la précision et la robustesse de la méthode sur maillages perturbés.

3.3.3 Schémas Petrov-Galerkin avec une reconstruction polynomiale d'ordre supérieur à 2

La section précédente a permis d'introduire une nouvelle famille de schémas basée sur le formalisme Petrov-Galerkin en utilisant une reconstruction quadratique au sein des éléments. Il est toutefois possible de définir des reconstructions polynomiales d'ordre supérieur à 2. La section qui suit a pour but d'étudier un autre ensemble de schémas qui utilise une reconstruction cubique ou quintique à la place de la reconstruction quadratique précédente. Comme pour la reconstruction quadratique, la première partie de la section se concentre sur le cas monodimensionnel, avant d'étendre dans un second temps, la méthode à des cas multidimensionnels.

Reconstruction cubique C^0 : cas monodimensionnel

Cette sous-section présente le développement d'une reconstruction cubique C^0, *i.e.* dont le polynôme de la solution est continu entre chaque élément, mais pas ses dérivées. Cette reconstruction a néanmoins l'avantage d'être exacte pour une solution cubique quelle que soit la qualité du maillage.

En reprenant le cas monodimensionnel décrit précédemment, une reconstruction cubique de la solution au sein de chaque élément s'écrit simplement comme un polynôme d'ordre 3,

$$U_e(x) = a + b\,(x - x_i) + c\,(x - x_i)^2 + d\,(x - x_i)^3\,, x \in [x_i, x_{i+1}]\,. \tag{3.146}$$

Dans cette expression, quatre coefficients sont à déterminer, ce qui implique de définir quatre contraintes. Les quatre contraintes utilisées sont les suivantes,

$$U_e\left(x_i\right) = U_i, \quad U_e\left(x_{i+1}\right) = U_{i+1}, \quad \frac{d^2U_e}{dx^2}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \bar{\delta}_0^2 U_{i+\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^3U_e}{dx^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}}. \tag{3.147}$$

Les expressions de $\bar{\delta}_0^2 U_{i+\frac{1}{2}}$ et $\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}}$ sont détaillées dans la suite.

Tout d'abord, comme pour la reconstruction quadratique, les dérivées nodales première et seconde peuvent être obtenues par les formules,

$$\begin{aligned}
\Delta_0 U_i &= \frac{\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left(U_{i+1} - U_i\right) + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\left(U_i - U_{i-1}\right)}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}, \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_i\right) + \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_i\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^3,
\end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 U_i &= \frac{2\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\left(U_{i+1} - U_i\right) - \Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(U_i - U_{i-1}\right)\right)}{\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}, \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i\right) + \frac{1}{3}\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_i\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^2.
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Par ailleurs, le gradient au centre de l'élément est estimé en utilisant la formule classique,

$$\Delta_0 U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{24}\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x)^4. \tag{3.150}$$

Et la dérivée seconde au centre de l'élément est approximée en utilisant les dérivées secondes des nœuds i et $i+1$,

$$\delta^2 U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 U_{i+1} + \delta^2 U_i}{2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i+\frac{3}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x)^2. \quad (3.151)$$

Jusqu'à présent, les différents opérateurs décrits présentent tous un terme d'erreur proportionnel à $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ qui est nul seulement lorsque la fonction U est quadratique. Il est néanmoins possible d'améliorer les approximations précédentes des dérivées au centre de l'élément pour les rendre exactes pour une fonction cubique.

En particulier, la sommation des dérivées premières $\Delta_0 U_i$ et $\Delta_0 U_{i+1}$ des nœuds i et $i+1$ donne,

$$\begin{aligned}
\Delta_0 U_i + \Delta_0 U_{i+1} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}) + \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(\Delta x_{i+\frac{3}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i+1}) + O(\Delta x)^3, \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}) + \frac{1}{6}\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{3}{2}}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x)^3, \\
&= 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{4}\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{6}\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{3}{2}}\right)\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x)^3, \\
&= 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{12}\left(3\Delta x_{i+\frac{1}{2}} + 2\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{3}{2}}\right)\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x)^3.
\end{aligned} \quad (3.152)$$

Les Équations (3.150) et (3.152) fournissent deux équations pour les termes $\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, dont l'erreur de troncature est maintenant proportionnelle à $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ (ou plus). Ce qui signifie que ces opérateurs sont exacts lorsque la solution est cubique.

Après résolution, ces opérateurs, notés $\bar{\Delta}_0 U_{i+\frac{1}{2}}$ et $\bar{\delta}^3 U_{i+\frac{1}{2}}$, s'écrivent,

$$\bar{\Delta}_0 U_{i+\frac{1}{2}} = \Delta_0 U_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O\left(\Delta x^3\right), \quad (3.153)$$

$$\bar{\delta}^3 U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{6\left(\Delta_0 U_i - 2\Delta_0 U_{i+\frac{1}{2}} + \Delta_0 U_{i+1}\right)}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{3}{2}}\right)} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x). \quad (3.154)$$

En substituant l'expression de $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ donnée par l'Eq. (3.154) dans l'Eq. (3.151), il est maintenant possible d'obtenir une expression pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ dont l'erreur de troncature est proportionnelle à $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ (ou plus). Cet opérateur noté $\bar{\delta}^2 U_{i+\frac{1}{2}}$ se définit par,

$$\bar{\delta}^2 U_{i+\frac{1}{2}} = \delta^2 U_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\left(\Delta x_{i+\frac{3}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O\left(\Delta x^2\right). \quad (3.155)$$

Les coefficients du polynôme défini par l'Eq. (3.146) peuvent alors être déterminés à l'aide des conditions imposées par l'Eq. (3.147). Le polynôme obtenu pour décrire la solution au sein de l'élément $[x_i, x_{i+1}]$ s'écrit,

$$U_e(x) = U_i + \left(\Delta_0 U_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\bar{\delta}_0^2 U_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}^2\right)(x - x_i) + \left(\frac{1}{2}\bar{\delta}_0^2 U_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}\right)(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}\bar{\delta}_0^3 U_{i+\frac{1}{2}} (x - x_i)^3 . \tag{3.156}$$

Comme pour la reconstruction cubique, la détermination des opérateurs L_i, LL_i et MU_i nécessite le calcul du polynôme décrivant la solution U pour les éléments qui contiennent le nœud i, *i.e.* l'élément $[x_{i-1}, x_i]$ et l'élément $[x_i, x_{i+1}]$. L'expression du polynôme pour l'élément $[x_{i-1}, x_i]$ n'est pas donnée ici mais elle peut être obtenue facilement en remplaçant les indices i de l'Eq. (3.156) par $i-1$. Après calculs et sur un maillage régulier avec un pas d'espace Δx et les mêmes fonctions tests linéaires que la reconstruction quadratique, les opérateurs suivants sont obtenus,

$$L_i = c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\psi_i(x)dx = -\frac{c}{24}\left(-U_{i-2} + 14U_{i-1} - 14U_{i+1} + U_{i+2}\right), \tag{3.157}$$

$$LL_i = c^2\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial U_e}{\partial x}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x)dx = \frac{c^2}{\Delta x}\left(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}\right), \tag{3.158}$$

$$MU_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_e(x)\psi_i(x)dx = \frac{\Delta x}{360}\left(-7U_{i-2} + 58U_{i-1} + 258U_i + 58U_{i+1} - 7U_{i+2}\right). \tag{3.159}$$

Par rapport à la reconstruction quadratique, seul le terme de la matrice de masse MU_i est modifié. Les termes L_i et LL_i sont identiques. Avec les notations introduites au début de la Section 3.2.1, les opérateurs s'écrivent,

$$\Delta_{0,R3} = \frac{1}{24}(-E^2 + 14E - 14E^{-1} + E^{-2}), \tag{3.160}$$

$$\delta_{R3}^2 = (E - 2 + E^{-1}), \tag{3.161}$$

$$M_{R3} = \frac{1}{360}(-7E^2 + 58E + 258 + 58E^{-1} - 7E^{-2}). \tag{3.162}$$

Ce qui donne le système suivant en deux étapes pour les schémas de la famille Petrov-Galerkin avec une reconstruction cubique,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j^n &= U_j^n - M_{R3}^{-1}\left(\alpha\nu\Delta_{0,R3}U_j^n - \beta\nu^2\delta_{R3}^2 U_j^n\right), \\ U_j^{n+1} &= U_j^n - M_{R3}^{-1}\left(\nu\left(\theta_1\Delta_{0,R3}U_j^n + \theta_2\Delta_{0,R3}\tilde{U}_j^n\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\delta_{R3}^2 U_j^n + \epsilon_2\delta_{R3}^2\tilde{U}_j^n\right)\right). \end{aligned} \tag{3.163}$$

La transformée de Fourier du système précédent (3.163) donne,

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\xi) &= 1 + \frac{1}{\hat{M}_{R3}}\left(-\alpha\nu\hat{\Delta}_{0,R3} + \beta\nu^2\hat{\delta}_{R3}^2\right), \\ z(\xi) &= 1 + \frac{1}{\hat{M}_{R3}}\left(-\left(\theta_1 + \theta_2\tilde{z}\right)\nu\hat{\Delta}_{0,R3} + \left(\epsilon_1 + \epsilon_2\tilde{z}\right)\nu^2\hat{\delta}_{R3}^2\right), \end{aligned} \tag{3.164}$$

avec $\hat{\Delta}_{0,R3}$, $\hat{\delta}_{R3}^2$ et $\hat{M}_{R3}$ les transformées de Fourier des opérateurs $\Delta_{0,R3}$, δ_{R3}^2 et M_{R3} égales à,

$$\hat{\Delta}_{0,R3}(\xi) = i\left(\frac{7}{6}\sin(\xi) - \frac{1}{12}\sin(2\xi)\right), \tag{3.165}$$

$$\hat{\delta}^2_{R3}(\xi) = -4\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2, \tag{3.166}$$

$$\hat{M}_{R3}(\xi) = \frac{43}{60} + \frac{29}{90}\cos(\xi) - \frac{7}{180}\cos(2\xi). \tag{3.167}$$

Au final, le coefficient d'amplification de la famille de schémas TTG-R3 (R3 pour reconstruction cubique en opposition à R2 pour reconstruction quadratique) s'exprime en deux étapes comme,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\text{TTG}-\text{R3}}(k) &= 1 - \left(\alpha\nu\hat{\Delta}_{0,R3} - \beta\nu^2\hat{\delta}^2_{R3}\right)/\hat{M}_{R3}, \\
G_{TTG-R3}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\theta_1\hat{\Delta}_{0,R3} + \theta_2\hat{\Delta}_{0,R3})\tilde{G}_{\text{TTG}-\text{R3}}(k)\right) \\
&\qquad -\nu^2\left(\epsilon_1\hat{\delta}^2_{R3} + \epsilon_2\hat{\delta}^2_{R3}\tilde{G}_{\text{TTG}-\text{R3}}(k)\right)\Big]/\hat{M}_{R3},
\end{aligned} \tag{3.168}$$

dont le développement de Taylor lorsque $k \to 0$ s'écrit,

$$\begin{aligned}
z_{\text{TTG-R3}}(\xi) =& 1 - i\xi\nu(\theta_1+\theta_2) - \xi^2\nu^2(\alpha\theta_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2) + i\xi^3\nu^3(\alpha\epsilon_2 + \beta\theta_2) \\
&+ \nu^4\xi^4\beta\epsilon_2 + \mathcal{O}(\xi^6).
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Comme pour la reconstruction quadratique, malgré la modification des opérateurs L_i, LL_i et MU_i, le système exprimant les contraintes sur les coefficients α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1 et ϵ_2 pour atteindre un ordre 4 est le même que pour les schémas TTG-R2. Ainsi, cette fois encore, les coefficients du schéma TTG4A satisfont les contraintes pour obtenir un ordre 4 en temps. Ce schéma sera donc noté TTG4A-R3 dans la suite. Il n'est d'autre part pas possible d'obtenir un schéma d'ordre 5, puisque le terme en ξ^5 est nul.

La pulsation temporelle modifiée de TTG4A-R3 est obtenue à partir de l'Eq. (3.24), lorsque $k \to 0$,

$$\Omega^*_{\text{TTG4A}-\text{R3}}(k) = kc - \frac{c\Delta x^4}{120}\nu^4k^5 - i\frac{c\Delta x^5}{1440}\nu\left(10\nu^4+11\right)k^6 + \mathcal{O}\left(k^7\right). \tag{3.170}$$

Ce qui donne l'équation modifiée suivante,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x^4}{120}\nu^4\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{c\Delta x^5}{1440}\nu\left(10\nu^4+11\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}\left(\Delta x^6\right). \tag{3.171}$$

Cette dernière équation montre que le schéma TTG4A-R3 est d'ordre 4 en espace, ainsi que d'ordre 4 en temps par construction comme TTG4A-R2. Par ailleurs, les propriétés de dissipation et de dispersion de TTG4A-R3 sont très proches de TTG4A-R2 (les courbes de dissipation et de dispersion sont présentées en Annexe B.2).

Reconstruction cubique C^1 : cas monodimensionnel

Cette sous-section a pour but de décrire un second type de reconstruction cubique qui contrairement à la précédente est continue à la fois pour la solution et pour sa dérivée première.

Comme pour le cas précédent, une reconstruction cubique de la solution au sein de chaque élément s'écrit,

$$U_e(x) = a + b\,(x - x_i) + c\,(x - x_i)^2 + d\,(x - x_i)^3\,, x \in [x_i, x_{i+1}]\,. \tag{3.172}$$

Les quatre contraintes utilisées pour déterminer les quatre coefficients du polynôme sont les suivantes,

$$U_e\,(x_i) = U_i, \quad U_e\,(x_{i+1}) = U_{i+1}, \quad \frac{dU_e}{dx}\,(x_i) = \Delta_0 U_i, \quad \frac{dU_e}{dx}\,(x_{i+1}) = \Delta_0 U_{i+1}, \tag{3.173}$$

avec $\Delta_0 U_i$ et $\Delta_0 U_{i+1}$ les opérateurs définis lors de la reconstruction quadratique par l'Eq. (3.70).

Une fois ces contraintes définies, il est possible d'obtenir les coefficients du polynôme sous la forme d'un système linéaire à inverser,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta x_{i,i+1} & (\Delta x_{i,i+1})^2 & (\Delta x_{i,i+1})^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\Delta x_{i,i+1} & 3(\Delta x_{i,i+1})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ \Delta_0 U_i \\ \Delta_0 U_{i+1} \end{pmatrix}, \tag{3.174}$$

avec $\Delta x_{i,i+1} = x_{i+1} - x_i$.

Comme pour les cas précédents, la matrice à inverser étant uniquement dépendante des grandeurs géométriques du maillage, son inverse peut être stocké avant la boucle temporelle pour réduire le coût de cette opération.

Après calculs, sur un maillage régulier avec un pas d'espace Δx et avec des fonctions tests linéaires, les opérateurs suivants sont obtenus pour les schémas TTG avec reconstruction cubique C^1, notés TTG-R3C1,

$$L_i = -\frac{c}{24}\left(-U_{i-2} + 14U_{i-1} - 14U_{i+1} + U_{i+2}\right), \tag{3.175}$$

$$LL_i = \frac{c^2}{\Delta x}\left(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}\right), \tag{3.176}$$

$$MU_i = \frac{\Delta x}{60}\left(-U_{i-2} + 9U_{i-1} + 44U_i + 9U_{i+1} - U_{i+2}\right). \tag{3.177}$$

Avec la même méthodologie que pour la reconstruction précédente, *i.e.* par transformée de Fourier du coefficient d'amplification, le développement de Taylor lorsque $k \to 0$ s'écrit,

$$\begin{aligned} z_{\text{TTG-R3C1}}(\xi) =& 1 - i\xi\nu(\theta_1 + \theta_2) - \xi^2\nu^2(\alpha\theta_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2) + i\xi^3\nu^3(\alpha\epsilon_2 + \beta\theta_2) \\ &+ \nu^4\xi^4\beta\epsilon_2 + i\nu^5\xi^5\frac{1}{360}(\theta_1 + \theta_2) + \mathcal{O}(\xi^6). \end{aligned} \tag{3.178}$$

De nouveau, les coefficients de TTG4A conviennent pour satisfaire les contraintes d'ordre 4 en temps et après calcul, l'équation modifiée de ce schéma noté TTG4A-R3C1 est,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{c\Delta x^4}{360}(3\nu^4+1)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{c\Delta x^5}{1440}\nu\left(10\nu^4+13\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathcal{O}\left(\Delta x^6\right). \tag{3.179}$$

Au final, TTG4A-R3C1 est lui aussi à la fois d'ordre 4 en espace et en temps.

Reconstruction quintique C^2 : cas monodimensionnel

En reprenant l'idée précédente, il est possible d'étendre la continuité de la reconstruction à la dérivée seconde. Cela nécessite de définir un polynôme d'ordre 5 dont l'expression est donnée par,

$$U_e(x)=a+b\left(x-x_i\right)+c\left(x-x_i\right)^2+d\left(x-x_i\right)^3+e\left(x-x_i\right)^4+f\left(x-x_i\right)^5, x\in[x_i,x_{i+1}]. \tag{3.180}$$

Dans ce cas, les six contraintes utilisées pour déterminer les six coefficients du polynôme sont les suivantes,

$$\begin{aligned}&U_e\left(x_i\right)=U_i,\quad U_e\left(x_{i+1}\right)=U_{i+1},\quad \frac{dU_e}{dx}\left(x_i\right)=\Delta_0 U_i,\quad \frac{dU_e}{dx}\left(x_{i+1}\right)=\Delta_0 U_{i+1},\\ &\frac{d^2U_e}{dx^2}\left(x_i\right)=\delta^2 U_i,\quad \frac{d^2U_e}{dx^2}\left(x_{i+1}\right)=\delta^2 U_{i+1},\end{aligned} \tag{3.181}$$

avec $\Delta_0 U_i$, $\Delta_0 U_{i+1}$, $\delta^2 U_i$ et $\delta^2 U_{i+1}$ les opérateurs définis lors de la reconstruction quadratique par les Eqs. (3.70) et (3.71).

Comme pour le cas précédent, grâce aux six contraintes, l'obtention des coefficients du polynôme se fait par inversion du système linéaire suivant,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&\Delta x_{i,i+1}&(\Delta x_{i,i+1})^2&(\Delta x_{i,i+1})^3&(\Delta x_{i,i+1})^4&(\Delta x_{i,i+1})^5\\0&1&0&0&0&0\\0&1&2\Delta x_{i,i+1}&3(\Delta x_{i,i+1})^2&4(\Delta x_{i,i+1})^3&5(\Delta x_{i,i+1})^4\\0&0&2&0&0&0\\0&0&2&6\Delta x_{i,i+1}&12(\Delta x_{i,i+1})^2&20(\Delta x_{i,i+1})^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_i\\U_{i+1}\\\Delta_0 U_i\\\Delta_0 U_{i+1}\\\delta^2 U_i\\\delta^2 U_{i+1}\end{pmatrix}, \tag{3.182}$$

avec $\Delta x_{i,i+1}=x_{i+1}-x_i$.

En utilisant des fonctions tests linéaires avec un pas d'espace régulier Δx, les opérateurs des schémas TTG avec reconstruction quintique C^2, notés TTG-R5C2, s'écrivent,

$$L_i=-\frac{c}{24}\left(-U_{i-2}+14U_{i-1}-14U_{i+1}+U_{i+2}\right), \tag{3.183}$$

$$LL_i=\frac{c^2}{\Delta x}\left(-U_{i-1}+2U_i-U_{i+1}\right), \tag{3.184}$$

$$MU_i=\frac{\Delta x}{840}\left(-13U_{i-2}+122U_{i-1}+622U_i+122U_{i+1}-13U_{i+2}\right). \tag{3.185}$$

Par transformée de Fourier du coefficient d'amplification, le développement de Taylor de ce dernier lorsque $k \to 0$ s'écrit,

$$\begin{aligned} z_{\text{TTG-R5C2}}(\xi) =& 1 - i\xi\nu(\theta_1+\theta_2) - \xi^2\nu^2(\alpha\theta_2+\epsilon_1+\epsilon_2) + i\xi^3\nu^3(\alpha\epsilon_2+\beta\theta_2) \\ &+ \nu^4\xi^4\beta\epsilon_2 + i\nu^5\xi^5\frac{1}{252}(\theta_1+\theta_2) + \mathcal{O}(\xi^6). \end{aligned} \tag{3.186}$$

Avec les coefficients de TTG4A, l'équation modifiée du schéma obtenu noté TTG4A-R5C2 s'exprime comme,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x^4}{2520}(21\nu^4+10)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{c\Delta x^5}{10080}\nu\left(70\nu^4+97\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}\left(\Delta x^6\right). \tag{3.187}$$

Ce qui montre que TTG4A-R5C2 est d'ordre 4 en espace et en temps.

Extension aux cas multidimensionnels

Reconstruction cubique C^0

L'extension aux cas multidimensionnels de la reconstruction cubique présente des difficultés supplémentaires par rapport au cas 1D. Contrairement au cas 1D, en 2D, il n'est pas possible de procéder de la même manière pour obtenir des opérateurs exacts pour une fonction cubique à chaque demi-arrête du triangle. Il faut donc procéder différemment pour reconstruire un polynôme cubique au sein de chaque élément. En 2D, un polynôme d'ordre 3 s'exprime à l'aide de 10 coefficients, ce qui signifie que 10 contraintes sont à définir,

$$\begin{aligned} U_e(x,y) =& a + b(x-x_1) + c(y-y_1) + d(x-x_1)^2 + e(x-x_1)(y-y_1) + f(y-y_1)^2 \\ &+ g(x-x_1)^3 + h(x-x_1)^2(y-y_1) + i(x-x_1)(y-y_1)^2 + j(y-y_1)^3. \end{aligned} \tag{3.188}$$

Neuf contraintes peuvent être obtenues en imposant la valeur nodale et les deux dérivées premières à chaque vertex du triangle. Les dérivées premières sont calculées de la même manière que pour la reconstruction quadratique, *i.e.* en écrivant un développement de Taylor des valeurs nodales de chaque voisin d'un nœud i et par inversion du système linéaire (3.104). Ces contraintes s'expriment comme,

$$\begin{aligned} &U_e(x_1,y_1) = U_1, \quad \frac{\partial U_e}{\partial x}(x_1,y_1) = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_e}{\partial y}(x_1,y_1) = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \\ &U_e(x_2,y_2) = U_2, \quad \frac{\partial U_e}{\partial x}(x_2,y_2) = \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_e}{\partial y}(x_2,y_2) = \frac{\partial U_2}{\partial y}, \\ &U_e(x_3,y_3) = U_3, \quad \frac{\partial U_e}{\partial x}(x_3,y_3) = \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_e}{\partial y}(x_3,y_3) = \frac{\partial U_3}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.189}$$

avec (x_i, y_i) les coordonnées du nœud i, U_i, $\dfrac{\partial U_i}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial U_i}{\partial y}$, sa valeur nodale, sa dérivée première selon x et sa dérivée première selon y respectivement.

La dernière contrainte est choisie comme étant la valeur de la solution au centre de gravité du triangle dont les coordonnées sont notées (x_0, y_0). Cette valeur est obtenue par la moyenne des solutions extrapolées à partir des trois vertex du triangle comme,

$$U^* = U_e(x_0,y_0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(U_i + \Delta x_{i,0}\frac{\partial U_i}{\partial x} + \Delta y_{i,0}\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{1}{2}(\Delta x_{i,0})^2\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \Delta x_{i,0}\Delta y_{i,0}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(\Delta y_{i,ij})^2\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}\right). \tag{3.190}$$

Les contraintes sont représentées pour un triangle quelconque sur la Fig. 3.47.

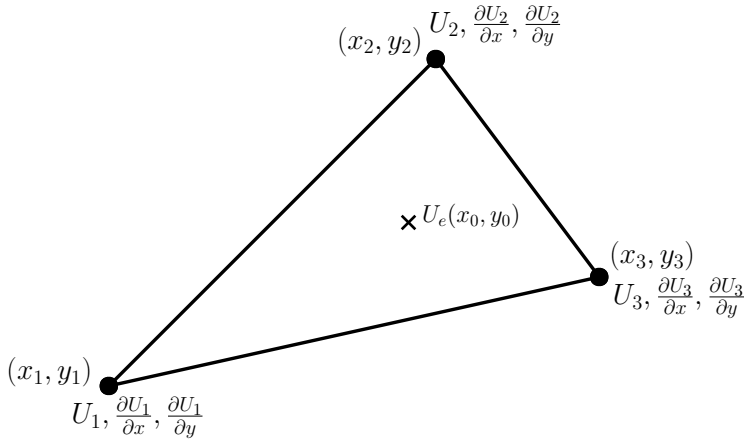


Figure 3.47: Illustration des contraintes imposées à un triangle quelconque composé de trois vertex (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) pour une reconstruction cubique C^0.

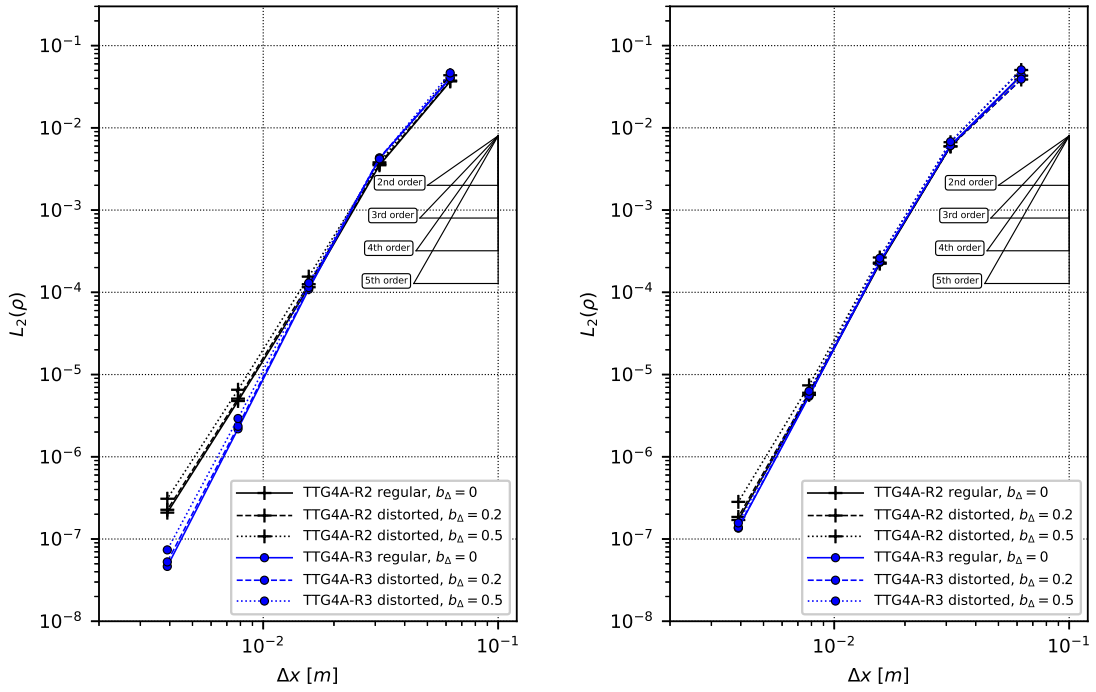
Les coefficients du polynôme (3.188) sont ensuite calculés à partir de l'inversion du système linéaire suivant,

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \Delta x_{1,2} & \Delta y_{1,2} & \Delta x_{1,2}^2 & \Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2} & \Delta y_{1,2}^2 & \Delta x_{1,2}^3 & \Delta x_{1,2}^2\Delta y_{1,2} & \Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2}^2 & \Delta y_{1,2}^3 \\
1 & \Delta x_{1,3} & \Delta y_{1,3} & \Delta x_{1,3}^2 & \Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3} & \Delta y_{1,3}^2 & \Delta x_{1,3}^3 & \Delta x_{1,3}^2\Delta y_{1,3} & \Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3}^2 & \Delta y_{1,3}^3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2\Delta x_{1,2} & \Delta y_{1,2} & 0 & 3\Delta x_{1,2}^2 & 2\Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2} & \Delta y_{1,2}^2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2\Delta x_{1,3} & \Delta y_{1,3} & 0 & 3\Delta x_{1,3}^2 & 2\Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3} & \Delta y_{1,3}^2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \Delta x_{1,2} & 2\Delta y_{1,2} & 0 & \Delta x_{1,2}^2 & 2\Delta x_{1,2}\Delta y_{1,2} & 3\Delta y_{1,2}^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \Delta x_{1,3} & 2\Delta y_{1,3} & 0 & \Delta x_{1,3}^2 & 2\Delta x_{1,3}\Delta y_{1,3} & 3\Delta y_{1,3}^2 \\
1 & \Delta x_{1,0} & \Delta y_{1,0} & \Delta x_{1,0}^2 & \Delta x_{1,0}\Delta y_{1,0} & \Delta y_{1,0}^2 & \Delta x_{1,0}^3 & \Delta x_{1,0}^2\Delta y_{1,0} & \Delta x_{1,0}\Delta y_{1,0}^2 & \Delta y_{1,0}^3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} \\ \frac{\partial U_3}{\partial y} \\ U^* \end{pmatrix}. \tag{3.191}$$

Une fois la reconstruction polynomiale obtenue pour chaque élément du domaine, les termes L, LL et MU peuvent être calculés par intégration (par les Eqs. (3.108), (3.109) et (3.110) dans le cas de la convection d'un scalaire ou par les Eqs. (3.121), (3.122) et (3.123) pour les équations d'Euler). À noter qu'avec la reconstruction cubique, les formules de quadrature doivent être adaptées pour tenir compte de l'augmentation de l'ordre des polynômes à intégrer (voir par exemple le papier de Cowper [64] pour le détail des formules de quadrature).

La Figure 3.48 présente la convergence en maillage des schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 (avec la méthode de reconstruction cubique C^0 présentée) sur le cas de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle en 2D simulée avec le démonstrateur Python. Comme TTG4A-R2, le schéma TTG4A-R3 est très peu sensible à la qualité du maillage. Il conserve un ordre de convergence aux alentours de 5 quelle que soit la qualité du maillage. Par ailleurs, lorsque le CFL diminue, le niveau d'erreur de TTG4A-R3 devient plus faible que TTG4A-R2.

À noter que la méthode de reconstruction cubique présentée ici ne garantit pas la continuité des dérivées premières à l'interface entre les éléments, *i.e.* au niveau des arrêtes. La continuité des dérivées premières est imposée uniquement au niveau des vertex par le biais des contraintes du système (3.189). Cette propriété est observée en visualisant les reconstructions polynomiales obtenues et leurs deux dérivées premières dans le cas de trois triangles quelconques avec des valeurs nodales arbitraires (Fig. 3.49). Les trois couleurs différentes correspondent aux reconstructions de chaque élément. Il est clair qu'à l'interface entre les éléments, la pente de $U_e(x, y)$ n'est pas continue et cela se vérifie en regardant les surfaces des fonctions $\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_e(x,y)}{\partial y}$.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure 3.48: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

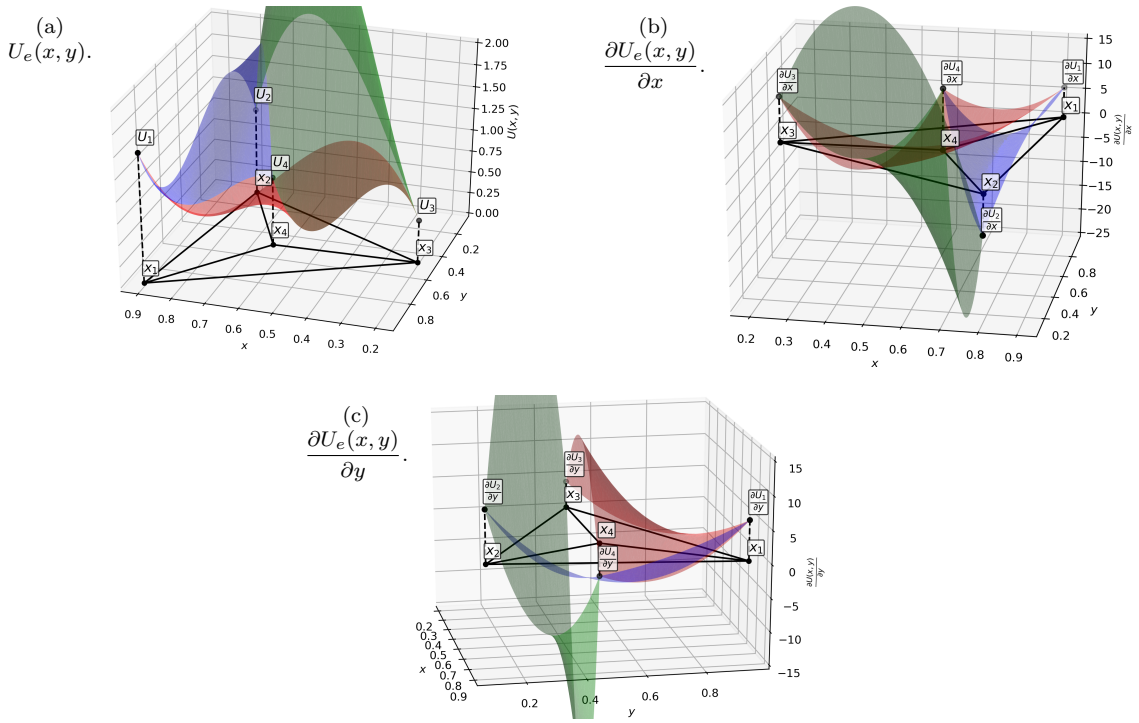


Figure 3.49: Reconstructions polynomiales cubiques C^0 et leurs deux dérivées premières dans le cas de trois triangles quelconques avec des valeurs nodales arbitraires.

Reconstruction cubique C^1

Pour garantir la continuité des dérivées premières à l'interface entre élément, une possibilité consiste à utiliser les éléments de Hsieh-Clough-Tocher [52, 51]. Dans le cas d'un domaine composé de triangles, les éléments triangulaires de Hsieh-Clough-Tocher permettent la construction d'une surface cubique et continue pour la solution ainsi que pour ses dérivées premières.

La méthode de reconstruction cubique est très bien détaillée dans le papier de McClain et Witzgall [180] et elle nécessite uniquement les valeurs de la fonction à reconstruire ainsi que ses deux dérivées premières en chaque nœud du domaine. Les étapes de cette reconstruction sont brièvement décrites ici (les notations et les numérotations des équations font référence aux équations du papier de McClain et Witzgall [180]) :

- Calcul des termes λ_i à l'aide de l'Eq. (2.3).
- Calcul des termes ρ_i avec l'Eq. (2.5) dans chacun des trois sous-triangles.
- Calcul de termes supplémentaires avec l'Eq. (2.7).
- Calcul des termes V_i avec l'Eq. (2.8).
- La fonction cubique z est obtenue avec l'Eq. (2.10) qui dépend des termes calculés aux étapes précédentes. Les dérivées premières de z peuvent aussi être obtenues avec les Eqs. (3.5) et (3.6) qui vont intervenir des termes calculés en (3.2), (3.3) et (3.7).

La Figure 3.50 montre l'utilisation des éléments triangulaires de Hsieh-Clough-Tocher pour reconstruire la surface correspondant aux mêmes valeurs nodales que la Fig. 3.49. Il est clair que dans le cas de cette méthode, la continuité des dérivées premières est en effet assurée, ce qui permet d'obtenir une solution plus lisse que dans le cas précédent. Cette méthode peut donc être utilisée pour obtenir une reconstruction polynomiale d'ordre 3 à l'aide des valeurs nodales et des dérivées premières de manière à l'utiliser dans le calcul des intégrales des schémas TTG. Cette

implémentation n'est pas encore été faite dans le démonstrateur Python mais cela constitue une piste intéressante.

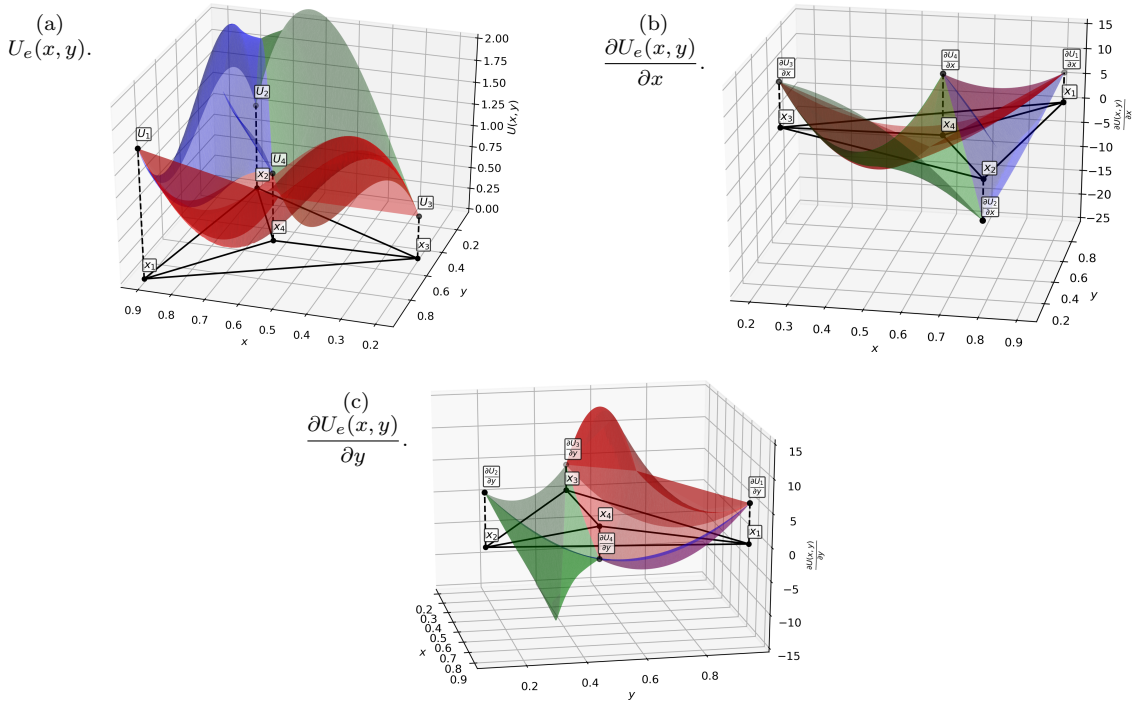


Figure 3.50: Reconstructions polynomiales cubiques C^1 de Hsieh-Clough-Tocher et leurs deux dérivées premières dans le cas de trois triangles quelconques avec des valeurs nodales arbitraires (les mêmes que la Fig. 3.49).

Pistes supplémentaires explorées

Calcul de termes supplémentaires du développement de Taylor

Pour rappel, les termes L_i et LL_i proviennent du développement de Taylor en temps calculé pour le vecteur solution. Lorsque l'interpolant de la solution est linéaire, seuls ces deux termes sont non nuls et il est donc inutile d'aller plus loin. Cependant, lorsque que l'interpolant est quadratique dans le cas de la reconstruction quadratique ou cubique pour une reconstruction cubique, des termes supplémentaires peuvent être obtenus (et encore davantage pour une reconstruction quintique). En détails, ces termes s'expriment,

$$LLL_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2}(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x) dx, \tag{3.192}$$

$$LLLL_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^3 U_e}{\partial x^3}(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x) dx. \tag{3.193}$$

À noter que dans le cas de la reconstruction quadratique, uniquement le terme LLL_i est non nul puisque $\frac{\partial^3 U_e}{\partial x^3}(x) = 0$.

Dans le cas de la convection d'un scalaire dans un champ de vitesse uniforme, le calcul de ces termes ne pose pas de problèmes particuliers puisque l'expression du polynôme $U_e(x)$ est déjà nécessaire pour les termes L_i et LL_i. En ajoutant les termes LLL_i et $LLLL_i$ à la formulation en deux étapes des schémas TTG, il est possible de dériver de nouveaux schémas en déterminant un

autre système de coefficients pour contrôler la contribution des différents termes. Un schéma TTG en ajoutant le terme **LLL** aux deux étapes peut par exemple s'écrire comme,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n) =& -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) - \gamma\Delta t^3\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right), \\
\mathbf{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) =& -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \epsilon_2\mathbf{LL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\
& -\Delta t^3\left(\mu_1\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \mu_2\mathbf{LLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.194}$$

ou en ajoutant les termes **LLL** et **LLLL**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n) =& -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) - \gamma\Delta t^3\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) \\
& +\delta\Delta t^4\mathbf{LLLL}\left(\mathbf{U}^n\right), \\
\mathbf{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) =& -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \epsilon_2\mathbf{LL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\
& -\Delta t^3\left(\mu_1\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \mu_2\mathbf{LLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\
& +\Delta t^4\left(\lambda_1\mathbf{LLLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \lambda_2\mathbf{LLLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.195}$$

Dans le cas de la convection d'un scalaire, ces schémas sont assez faciles à mettre en place puisque la reconstruction polynomiale au sein de chaque élément donne accès aux dérivées successives de la solution. En pratique, le passage aux équations d'Euler complique cependant fortement le calcul de ces termes supplémentaires, avec notamment l'apparition de produit entre les matrices Jacobiennes des flux. Néanmoins, quelques schémas obtenus en ajoutant des termes supplémentaires au développement de Taylor sont donnés en Annexe B.3. L'ajout de ces termes supplémentaires permet d'augmenter l'ordre des schémas générés tout en offrant davantage de flexibilité dans le choix des coefficients (et donc au niveau des propriétés des schémas obtenus).

Dérivation d'un schéma TTG-R3 à trois étapes

Pour la reconstruction quadratique, la tentative de dériver un schéma à 3 étapes d'ordre 5 a été infructueuse. Néanmoins, pour la reconstruction cubique, il est possible d'utiliser la même démarche. Cette famille de schémas sera notée TTG-3S-R3. Le coefficient d'amplification de cette famille s'écrit,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R3}}(k) &= 1 - \left(\alpha\nu\hat{\Delta}_{0,R3} - \beta\nu^2\hat{\delta}^2_{R3}\right)/\hat{M}_{R3}, \\
\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R3}}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\theta_1\hat{\Delta}_{0,R3} + \theta_2\hat{\Delta}_{0,R3})\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R3}}(k)\right) \\
&\quad -\nu^2\left(\epsilon_1\hat{\delta}^2_{R3} + \epsilon_2\hat{\delta}^2_{R3}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R3}}(k)\right)\Big]/\hat{M}_{R3}, \\
G_{\text{TTG-3S-R3}}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\mu_1\hat{\Delta}_{0,R3} + \mu_2\hat{\Delta}_{0,R3}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R3}}(k) + \mu_3\hat{\Delta}_{0,R3}\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R3}}(k)\right) \\
&\quad -\nu^2\left(\delta_1\hat{\delta}^2_{R3} + \delta_2\hat{\delta}^2_{R3}\tilde{G}_{\text{TTG-3S-R3}}(k) + \delta_3\hat{\delta}^2_{R3}\tilde{\tilde{G}}_{\text{TTG-3S-R3}}(k)\right)\Big]/\hat{M}_{R3}.
\end{aligned} \tag{3.196}$$

De la même manière que ce qui a été fait pour les schémas précédents, le coefficient d'amplification permet d'obtenir les contraintes d'ordre 5 et elles s'expriment par le système,

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \alpha\mu_2 + \mu_3(\theta_1 + \theta_2) + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \dfrac{1}{2}, \\ \alpha\delta_2 + \alpha\mu_3\theta_2 + \beta\mu_2 + \delta_3\theta_1 + \delta_3\theta_2 + \mu_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \dfrac{1}{6}, \\ \alpha\delta_3\theta_2 + \alpha\epsilon_2\mu_3 + \beta\delta_2 + \beta\mu_3\theta_2 + \delta_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \dfrac{1}{24}, \\ \alpha\delta_3\epsilon_2 + \beta\delta_3\theta_2 + \beta\epsilon_2\mu_3 = \dfrac{1}{120}. \end{cases} \tag{3.197}$$

Contrairement à la reconstruction quadratique, ce système possède une infinité de solutions. Pour réduire les degrés de liberté du système et également limiter le coût de calcul du schéma, à la manière de TTG4A et TTGC, certains coefficients sont choisis égaux à zéro (cela évite de calculer certains termes). En particulier,

- pour ne pas stocker les termes de premier ordre à chaque sous-itération, $\theta_1 = \mu_1 = \mu_2 = 0$,
- pour ne calculer que deux termes de second ordre, $\delta_3 = 0$,
- pour ne pas stocker le terme de second ordre de la deuxième étape, $\delta_2 = 0$.

Avec ces contraintes supplémentaires ajoutées au système (3.197), les solutions sont les suivantes,

$$\begin{cases} \alpha > 0, \\ \beta > 0, \\ \theta_1 = 0, \\ \theta_2 = -(\alpha/\beta - 5)/(120\beta), \\ \epsilon_1 = \alpha^2/(120\beta^2) - \alpha/(24\beta) + 1/6 - 1/(120\beta), \\ \epsilon_2 = 1/(120\beta), \\ \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \mu_3 = 1, \\ \delta_1 = 1/2 + (\alpha/\beta - 5)/(120\beta), \\ \delta_2 = 0, \\ \delta_3 = 0. \end{cases} \tag{3.198}$$

Avec le même code d'optimisation que celui présenté dans l'Annexe B.1.3, une optimisation est réalisée pour trouver les valeurs optimales de α et β avec pour fonctions objectifs le niveau de dissipation, de dispersion et le CFL critique en 1D. Le schéma obtenu, appelé TTG3-3S-R3, s'exprime avec les coefficients,

$$\begin{cases} \alpha = 9/76, \\ \beta = 43/527, \\ \theta_1 = 0, \\ \theta_2 = 52871/145920, \\ \epsilon_1 = 48077/2217984, \\ \epsilon_2 = 49/480, \\ \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \mu_3 = 1, \\ \delta_1 = 20089/145920, \\ \delta_2 = 0, \\ \delta_3 = 0. \end{cases} \quad \text{(TTG3-3S-R3)} \tag{3.199}$$

Le développement de Taylor de son coefficient d'amplification s'exprime,

$$z_{\mathrm{TTG3-3S-R3}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^4\xi^4 - \frac{1}{120}i\nu^5\xi^5 - \frac{220979}{105062400}\nu^6\xi^6 + \mathcal{O}\left(\xi^7\right), \tag{3.200}$$

ce qui correspond au développement de Taylor d'une exponentielle jusqu'au terme d'ordre 5. Le schéma est donc d'ordre 5.

L'équation modifiée associée s'écrit (la procédure utilisée pour l'obtenir est la même que pour les schémas précédents),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} =& c\Delta x^5 \nu \left(-\frac{\nu^4}{720} + \frac{220979}{105062400} \right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\ &+ c\Delta x^6 \left(-\frac{\nu^6}{840} + \frac{1697113\nu^2}{7984742400} - \frac{17}{15120} \right) \frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + \mathcal{O}\left(\Delta x^7\right). \end{aligned} \tag{3.201}$$

Le premier terme non nul du schéma TTG3-3S-R3 est donc bien proportionnel à $\partial^6 u/\partial x^6$, ce qui correspond à un schéma d'ordre 5 en espace et en temps.

3.4 Bilan des schémas comparés

Ce chapitre s'est intéressé à une large palette de schémas numériques pour traiter le terme convectif dans le code AVBP. Au fil des analyses présentées, ces schémas ont tous mis en évidence des avantages et des inconvénients pour différents points. L'objectif de cette dernière section est de fournir des outils pour faire un bilan des schémas décrits au cours du chapitre. En particulier, plusieurs critères sur la base de leur capacité à réaliser une simulation numérique de qualité sont identifiés pour classer ces derniers. Les critères se décomposent de la façon suivante,

- évaluation de leurs ordres temporel et spatial respectif,

- valeurs des CFL critiques en 1D et 2D sur maillages triangulaires et quadrangulaires,
- leur comportement sur maillages perturbés, avec la classification suivante,
  - 🔴 ordre de convergence fortement dégradé par la qualité du maillage,
  - 🟠🟠 ordre de convergence moyennement dégradé par la qualité du maillage,
  - 🟢🟢🟢 ordre de convergence peu dégradé par la qualité du maillage,
  - 🟢🟢🟢🟢 schéma quasiment insensible à la qualité du maillage,
- l'estimation de leur coût de calcul associé, définie par les points suivants,
  - 🟢 coût très bas, correspond au schéma de référence LW
  - 🟢🟢 coût seulement 2 à 3 fois plus élevé que LW
  - 🟠🟠🟠 coût environ 4 à 5 fois plus élevé que LW
  - 🔴🔴🔴🔴 coût supérieur à 10 fois celui de LW
- et la difficulté d'implémentation de ces schémas,
  - 🟢 schéma déjà implémenté dans AVBP,
  - 🟠🟠 schéma nécessitant des petites modifications du code,
  - 🔴🔴🔴 schéma nécessitant des modifications profondes du code.

La Table 3.3 présente les valeurs obtenues pour les différents critères introduits précédemment dans le cas des schémas déjà existants dans AVBP. Comme observé sur les comparaisons en début de chapitre, le comportement de LW et TTG4A est très satisfaisant. Seul TTGC(0.01), dont l'ordre de convergence est fortement dégradé par des perturbations introduites sur le maillage peut donner lieu à des questionnements et à des potentielles améliorations. En termes de coût, les schémas standards sont très performants, en partie grâce au fait que leur implémentation a pu être optimisée au fil des années.

La Table 3.4 compare les mêmes critères pour les schémas de l'Annexe B.1. Il présente l'avantage d'avoir un coût de calcul similaire aux schémas de la famille TTG, avec en plus une difficulté d'implémentation assez limitée. Néanmoins, leur comportement sur maillages perturbés ne permet pas de corriger les défauts des schémas existants aboutissant à un comportement qui au mieux est proche de celui de TTG4A (c'est pourquoi ils sont seulement présentés en annexe). Ce constat est la raison principale de la deuxième partie de ce chapitre qui a cherché à introduire des schémas qui ne sont pas directement issus de la famille TTG à deux étapes.

Le bilan des performances des nouveaux schémas est présenté dans la Table 3.5. Le premier élément à noter est que les nouveaux schémas introduits sont tous d'ordre 4 en espace et en temps. Les schémas à 3 étapes (TTG1-3S et TTG2-3S) ne sont pas suffisamment performants sur maillages perturbés et présentent en plus le désavantage d'être plus coûteux que leur version à deux étapes. Les schémas à deux étapes avec modification de la matrice de masse peuvent aussi sembler intéressants mais la forte dégradation de leur limite de stabilité lors du passage à plusieurs dimensions est un obstacle majeur à leur utilisation en pratique. En effet, la réduction de la limite de stabilité a une conséquence directe sur le coût de calcul en contraignant le pas de temps de la simulation. Enfin, les schémas issus du formalisme Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique ou cubique sont très prometteurs. Principalement grâce à leur comportement sur maillages perturbés qui se révèle être quasiment insensible à la qualité du maillage, ce qui était le point principal d'amélioration visé au début de ce chapitre. Malgré tout, du fait que ce formalisme est relativement nouveau, de nombreuses optimisations sont encore nécessaires pour qu'ils deviennent pleinement utilisables dans AVBP à un coût compétitif par rapport aux schémas existants. À noter que le formalisme Petrov-Galerkin avec les différentes reconstructions polynomiales décrites n'a pas encore été adapté aux quadrilatères, c'est pourquoi les CFL critiques avec maillages composés de quadrilatères ne sont pas renseignés.

	LW (3.2)	TTG4A (3.2)	TTGC(0.01) (3.2)
Ordre temporel	**2**	**3**	**3**
Ordre spatial	**2**	**3**	**3**
CFL critique 1D	1	1	1.023
CFL critique 2D triangles	0.707	0.807	0.762
CFL critique 2D quadrilatères	1	0.933	0.811
Comportement sur maillages perturbés	●●●●	●●●	●
Coût du schéma	●	●●	●●
Difficulté d'implémentation	●	●	●

Table 3.3: Comparaison des schémas classiques (Section 3.2).

	TTG-Opt1 (B.1.3)	TTG-Opt4 (B.1.3)	TTGC(γ) (B.1.4)
Ordre temporel	**4**	**3**	**3**
Ordre spatial	**3**	**3**	**3**
CFL critique 1D	0.899	1.013	Fonction de γ
CFL critique 2D triangles	0.802	0.777	Fonction de γ
CFL critique 2D quadrilatères	0.897	0.842	Fonction de γ
Comportement sur maillages perturbés	●●●	●●	●●
Coût du schéma	●●	●●	●●
Difficulté d'implémentation	●●	●●	●●

Table 3.4: Comparaison des schémas améliorés (Annexe B.1).

	TTG1-3S (3.3.1)	TTG2-3S (3.3.1)	TTG4A-R2 (3.3.2)	TTG4A-R3 (3.3.3)	TTG3-3S-R3 (3.3.3)
Ordre temporel	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**
Ordre spatial	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**
CFL critique 1D	1.011	1.307	0.991	1.023	1.113
CFL critique 2D triangles	0.762	1.008	0.827	-	-
CFL critique 2D quadrilatères	0.852	1.123	-	-	-
Comportement sur maillages perturbés	●●	●	●●●●	●●●●	●●●●
Coût du schéma	●●●	●●●	●●●●	●●●●	●●●●
Difficulté d'implémentation	●●	●●	●●●	●●●	●●●

Table 3.5: Comparaison des nouveaux schémas (Section 3.3).

3.5 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a permis de mieux comprendre les propriétés des schémas déjà existants dans AVBP. Plusieurs analyses numériques, ainsi que des cas tests académiques pour obtenir l'ordre de convergence des schémas ont mis en évidence certains défauts des schémas existants. Les deux défauts principaux soulevés sont : 1) un niveau de dissipation trop important qui est incompatible avec les exigences de la LES puisqu'elle nécessite d'être capable de transporter des petites structures sans les dissiper (LW et TTG4A); 2) un comportement du schéma, en particulier son ordre de convergence largement dégradé lorsque la qualité du maillage diminue (TTGC).

En parallèle de ce chapitre, l'Annexe B.1 s'est attachée à tenter de résoudre ces problèmes en optimisant les schémas déjà existants. Pour les schémas de la famille TTG, les coefficients qui les définissent ont un effet direct sur les propriétés des schémas. Ainsi, plusieurs optimisations ont cherché à supprimer certains défauts des schémas existants en modifiant ces coefficients grâce à des critères prédéfinis. En particulier, l'impact du paramètre γ qui contrôle le caractère dissipatif du schéma TTGC a été analysé. Différentes tentatives ont été faites pour faire varier globalement et même localement ce paramètre. Malheureusement, l'ensemble de ces solutions ne se sont pas montrées très efficaces pour résoudre les problèmes des schémas existants décrits dans la première partie du chapitre et c'est pourquoi ces résultats ont été placés en annexe.

La deuxième partie de ce chapitre a donc choisi une approche plus éloignée des schémas existants. Des schémas de la famille TTG à 3 étapes ont été explorés, avec des performances variées. L'intérêt de cette deuxième partie réside surtout dans la nouvelle famille de schémas introduite utilisant le formalisme Petrov-Galerkin. Ce formalisme, adopté en parallèle de reconstructions quadratique et cubique au sein des éléments du maillage, a permis de définir des schémas très intéressants notamment en termes de robustesse à la qualité du maillage. À la suite des résultats présentés ici, des travaux sont encore nécessaires pour optimiser certains éléments de ce formalisme, en particulier son coût et sa parallélisation.

À noter que la fin de ce chapitre s'est concentrée sur des schémas issus du formalisme Petrov-Galerkin. Néanmoins, pour ce qui est de la chronologie de la thèse, des investigations avaient d'abord été menées dans le cadre d'une méthode volumes finis *node-centered* avec reconstruction des flux avant de s'intéresser au formalisme Petrov-Galerkin. Cette méthode utilise les travaux

de Bernard *et al.* [32] pour obtenir une reconstruction ordre élevé des flux à l'interface entre les volumes de contrôle. Un schéma permettant de résoudre le problème de Riemann à l'interface et ainsi calculer les flux numériques aux bords est ensuite nécessaire pour permettre l'avancement en temps (par le biais du calcul des résidus). Les travaux conduits dans le cadre de ces investigations sont présentés dans l'Annexe D. Même si ces recherches ont montré des résultats intéressants, notamment pour réduire la sensibilité des schémas numériques à la qualité du maillage, les travaux n'ont pas été poursuivis au delà de ce qui est décrit dans l'annexe. Le problème principal est que ce type de schémas utilise un formalisme complètement différent de celui d'AVBP (volumes finis *node-centered* alors qu'AVBP est écrit avec un formalisme éléments finis *cell-vertex*). Ces travaux ont toutefois largement contribué et inspiré le développement des schémas Petrov-Galerkin avec reconstruction polynomiale présentés dans ce chapitre.

Pour finir, ce chapitre s'est particulièrement intéressé à la sensibilité des schémas numériques à la qualité du maillage. Pour réduire au maximum cette sensibilité, les pistes étudiées se sont articulées autour de la modification des schémas numériques en eux-mêmes, par le biais par exemple de leurs coefficients ou de la reconstruction de la solution au sein de chaque élément. Il ne faut cependant pas oublier que la dégradation des propriétés des schémas est liée à la dégradation de la qualité du maillage. Une autre option possible pour réduire cette sensibilité est donc de travailler directement sur la qualité des maillages. Cette stratégie est communément appelée méthode de régularisation de maillage et consiste à optimiser la position des nœuds d'un maillage pour en améliorer la qualité. Ces méthodes sont particulièrement intéressantes pour une configuration réelle puisque dans ce cas le maillage sera nécessairement de moins bonne qualité qu'une configuration simple à cause des géométries complexes qui doivent être maillées. Cette approche est brièvement considérée dans l'Annexe C dans laquelle est détaillée deux méthodes de régularisation de maillage qui ont été étudiées. Ces méthodes sont utilisées sur des cas simples en 2D, mais leur extension en 3D ne pose pas de difficultés particulières. À noter que les deux méthodes font intervenir des matrices de taille importante qui doivent être inversées. C'est pourquoi la dernière partie de l'annexe introduit une librairie et une portion de code permettant de réaliser ces inversions très rapidement et de manière parallèle. Cet élément est particulièrement important si l'objectif est d'appliquer ces méthodes de régularisation à des maillages de plusieurs millions d'éléments.

Chapitre 4

Analyse numérique d'une méthode de pas de temps local pour le couplage entre composants

“ Science never solves a problem without creating ten more. ”

— George Bernard Shaw

4.1 Introduction 151
4.2 Principes et gains attendus par pas de temps local 153
4.2.1 Gains théoriques sur un cas concret 154
4.3 Analyse numérique de la méthode MISCOG 156
4.3.1 Représentation matricielle avec un domaine unique 157
4.3.2 Représentation matricielle dans le cas à deux domaines 166
4.4 Précision spatiale de MISCOG dans AVBP 175
4.4.1 Propagation d'une onde acoustique monodimensionnelle sur un maillage uniforme 175
4.4.2 Convection d'un vortex isentropique en deux dimensions 184
4.5 Évaluation de la méthode LTS sur des écoulements complexes . . 190
4.5.1 Canal turbulent 193
4.5.2 Turbine LS89 199
4.5.3 Application de la méthode de pas de temps local à une simulation intégrée chambre de combustion et turbine 216
4.6 Bilan des gains réalisés par la méthode LTS et parallélisation de la méthode 226
4.7 Conclusion 228

4.1 Introduction

L'étude de la physique des écoulements complexes est grandement facilitée par l'utilisation de simulations numériques, qui sont obtenues par la résolution des équations de la mécanique des fluides (Euler ou Navier-Stokes) dans leur forme discrétisée. En fonction du modèle retenu, leur résolution est obtenue par des méthodes d'intégrations temporelles et/ou spatiales. En termes d'intégration temporelle, une méthode très populaire est l'algorithme de Runge-Kutta, reconnu pour son efficacité [248, 142]. Cependant, dans sa forme standard, *i.e.* dans sa version explicite, il souffre d'un défaut majeur : le pas de temps dans le domaine de calcul est contraint par une condition de stabilité. Dans le cas des schémas convectifs disponibles dans AVBP, l'intégration temporelle n'est pas assurée par une méthode de Runge-Kutta puisque les dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées spatiales mais les contraintes de stabilité restent les mêmes.

À partir de ce constat, étant donné que dans la plupart des simulations CFD, une large hétérogénéité de raffinement est présente dans le domaine pour cibler des régions spécifiques qui nécessitent des petites mailles pour correctement prédire les propriétés de l'écoulement alors que la taille de maille est moins importante dans d'autres régions d'intérêt moindre. Par conséquent, pour un code qui utilise une méthode explicite d'avancement en temps, le pas de temps de l'ensemble du domaine est imposé par la condition de stabilité des plus petites cellules du domaine. La conséquence directe est que, pour la majorité des cellules du domaine, ce pas de temps unique est beaucoup plus petit que nécessaire, augmentant ainsi artificiellement le coût total de la simulation. Les méthodes implicites d'avancement en temps sont une alternative possible à ce type de problème. Cependant, elles requièrent généralement des efforts importants en termes d'écriture du code pour obtenir des résultats intéressants en termes de parallélisation. Ces méthodes peuvent aussi être moins précises que les méthodes explicites puisqu'elles impliquent la sélection d'un pas de temps arbitraire qui est généralement trop grand pour fournir une discrétisation temporelle suffisante des échelles de temps impliquées dans la prédiction d'un écoulement.

Une autre alternative possible pour adresser ce problème est l'introduction d'une méthode de pas de temps local ou *Local Time Stepping* (LTS). Avec cette méthodologie, deux approches sont possibles. La première consiste à utiliser un pas de temps différent pour chaque cellule du domaine, en accord avec sa condition locale de stabilité. Cette approche conduit généralement à une formulation asynchrone de l'intégration temporelle. Cette idée a été utilisée par Omelchenko [198, 199] pour des simulations instationnaires basées sur les équations d'Euler. Dans ce cas, chaque cellule du domaine est mise à jour indépendamment en fonction de sa propre échelle de temps physique. Une méthode similaire a été développée par Unfer [271] pour adresser des problèmes multi-physiques, couplés avec du raffinement de maillage adaptatif. À noter que dans la plupart des cas, la méthode d'intégration temporelle doit être largement modifiée pour tenir compte des pas de temps locaux tout en assurant la conservativité de la méthode. À titre d'exemple et de démonstration, dans [267], un schéma Runge-Kutta asynchrone de second ordre a été dérivé et appliqué à l'équation de Maxwell monodimensionnelle. Dans [247], un schéma d'advection de second ordre en espace et en temps est étendu à une formulation asynchrone de pas de temps local et utilisé pour le calcul de problèmes aéro-acoustiques.

Cependant, une autre approche de pas de temps local peut être considérée. Cette approche alternative consiste à diviser le domaine initial, non pas au niveau local à chaque cellule, mais à l'échelle du domaine lui-même. Cela consiste à le partitionner en plusieurs sous-domaines composés de groupes de cellules, pour lesquels un pas de temps local est utilisé, obtenu à partir de la condition CFL locale de stabilité. Dans ce type de cas, un ratio donné est généralement fixé entre les pas de temps de deux domaines adjacents pour garantir la synchronisation en temps de la méthode. Un des premiers schémas de pas de temps local, stable et simple, est celui présenté dans [200] écrit sous la forme d'un schéma à deux étapes prédicteur/correcteur, dont l'étape de prédiction est différente en fonction du sous-domaine (et donc du pas de temps local). Malheureusement, ce schéma ne donne en pratique qu'une convergence de premier ordre et est localement inconsistant [134]. Le travail décrit dans [59] présente une intégration temporelle à plusieurs niveaux (*multirate time discretization*) pour la résolution d'équations aux dérivés partielles, qui préserve une précision de second ordre du schéma et reste conservatif. Dans la résolution de problèmes d'advection-diffusion, des ordres de précision similaires ont été obtenus dans [261] (combinaison entre méthode de reconstruction et schémas de Runge-Kutta ou Lax-Wendroff) ou [238], tout en réduisant le coût total des simulations sur des cas d'application concrets. Une approche avec une précision de troisième ordre est obtenue dans [143] (méthode de Runge-Kutta partitionnée) avec une étape de correction pour satisfaire la conservativité. Pour ce cas, la méthode de pas de temps local est appliquée à la simulation de l'écoulement autour d'un profil avec réussite par rapport à une méthode utilisant un pas de temps global. Dans [98], un schéma LTS est développé pour résoudre les équations de la LES d'un écoulement instationnaire et réactif. Ce développement est aussi fait dans le code AVBP, comme la méthode présentée dans la suite de ce chapitre. La méthode est ensuite validée sur des cas simples et turbulents, en montrant un bon accord entre les valeurs théoriques et les valeurs de référence. Dans le travail décrit dans [213], la méthode MISCOG est utilisée pour réduire le temps de calcul de la LES du jet en sortie de tuyère d'un booster de fusée. Dans cette configuration, le domaine

s'étend très loin an aval de la sortie de la tuyère. Grâce à la méthode de pas de temps local, le grand domaine éloigné de la physique d'intérêt du jet, avec un raffinement relativement grossier, est isolé dans sa propre instance avec un pas de temps plus grand pour réduire le coût total de la simulation. Dans ce cadre, AVBP a ainsi déjà été utilisé pour effectuer des simulations avec des pas de temps locaux. Néanmoins, aucunes validations théoriques de la méthode n'ont été effectuées pour confirmer le comportement numérique de la méthode. Ce point particulier est l'objet de la première partie de ce chapitre. À noter enfin que pour toutes les méthodes décrites précédemment, les pas de temps des différents sous-domaines sont reliés par un ratio entier. Cependant, des ratios arbitraires (*i.e.* non entiers) peuvent aussi être utilisés [170, 171], avec comme contrainte supplémentaire l'implémentation d'une méthode d'interpolation temporelle.

Dans ce chapitre, la méthode MISCOG utilisée pour permettre les simulations LTS sera analysée en détails dans une première section. De la même manière que dans [213], la méthode de pas de temps local se base sur un domaine initial qui est subdivisé en plusieurs instances avec leur pas de temps propre en accord avec leur condition locale de stabilité. Par construction, chaque sous-domaine possède une région de superposition avec les domaines voisins pour générer une interface de couplage en interpolant les grandeurs conservatives dans cette zone. L'objectif de ce travail est d'étudier et de valider la méthode LTS dans un code LES et de démontrer sa capacité à obtenir des ordres de convergence identiques à ceux des schémas numériques utilisés dans une configuration standard. Contrairement à la majorité des études décrites dans la revue de la littérature des paragraphes précédents, la méthode LTS introduite ici ne repose pas sur le développement d'un nouveau schéma numérique spécifiquement construit pour adresser les problèmes de pas de temps locaux. L'objectif est d'utiliser la méthode MISCOG existante, capable de gérer et de coupler plusieurs instances du même code LES, pour montrer qu'elle est capable de conserver les ordres de convergence des schémas numériques utilisés dans un contexte LTS. La nouveauté réside dans l'exploitation de cette méthode pour coupler plusieurs sous-domaines avec des pas de temps différents, ce qui introduit la notion de pas de temps local. Il est important de noter que contrairement à une bonne partie de la littérature existante à ce sujet, l'application de la méthode ne sera pas uniquement limitée à des cas de validations 1D ou 2D. L'objectif de l'étude est d'appliquer cette méthode à des cas 3D complexes décomposés en sous-domaines statiques et/ou tournants, tout en résolvant les équations instationnaires de la LES sur des maillages non structurés, comme couramment rencontrés dans des applications turbomachines. Dans un premier temps, les ratios entre les pas de temps des sous-domaines sont choisis comme des nombres entiers. Mais, comme il sera montré dans le chapitre, une petite modification de la méthode permet aussi d'utiliser facilement des ratios non entiers, sans mettre en place d'interpolation temporelle entre les pas de temps.

Dans la première partie du chapitre, une analyse théorique de la méthode MISCOG est déroulée pour comprendre les implications et les contraintes du couplage entre sous-domaines, ainsi que valider le comportement numérique de la méthode. À l'aide de la méthode MISCOG, la notion de pas de temps local est ensuite introduite. Deux cas de validation sont présentés pour s'assurer de la convergence spatiale et de la conservativité de la méthode. La dernière partie est consacrée à l'application de la méthode LTS à des cas plus complexes pour lesquels un gain en temps de calcul significatif est espéré tout en préservant la qualité de la solution.

4.2 Principes et gains attendus par pas de temps local

En utilisant l'implémentation de la méthode MISCOG, la notion de pas de temps local ou *Local Time Stepping* (LTS) peut être facilement introduite. En effet, plusieurs domaines sont définis comme décrit précédemment, avec des régions de superposition qui permettent l'échange des grandeurs conservatives. Même si la méthode MISCOG a été construite et validée dans le contexte d'une décomposition partie fixe/partie tournante conventionnelle en sous-domaines partageant un pas de temps unique, elle peut être sans développement supplémentaire appliquée à des instances avec des pas de temps différents. La conséquence directe est de permettre le couplage entre deux instances fixes et/ou mobiles avec leur pas de temps propre et donc une condition CFL qui sera moins

restrictive pour l'instance qui utilise des cellules plus grandes.

Ainsi, dans toutes les configurations concrètes, les différences de pas de temps entre les régions du domaine sont une conséquence directe des hétérogénéités du maillage. Néanmoins, pour simplifier les analyses qui vont suivre, les pas d'espace seront considérés comme constants pour chaque sous-domaine, seul leur pas de temps respectif (et donc leurs CFL) sera différent.

À noter aussi que dans cette étude reste dans le contexte de couplage synchrone entre les sous-domaines, *i.e.* le temps physique est identique entre les deux domaines lors de l'échange. D'autre part, aucune interpolation temporelle n'est introduite à l'interface entre les différents maillages avançant à des pas de temps différents, *i.e.* seule l'information spatiale au moment de l'échange est partagée. À titre d'illustration, l'exemple suivant considère deux sous-domaines 1 et 2 possédant chacun un pas de temps différent Δt_{small} et Δt_{large} reliés par la relation $\Delta t_{\text{large}} = 4\Delta t_{\text{small}}$ (Fig. 4.1). Par conséquent, entre le temps t_0 et $t_0 + \Delta t_{\text{large}}$, 4 itérations avec le pas de temps Δt_{small} sont simulées par l'instance 1, alors que seulement 1 itération est simulée avec le pas de temps Δt_{large} pour l'instance 2. En pratique, aucune interpolation temporelle n'intervient au niveau de l'interface pour l'instance 1 aux temps $t+\Delta t_{\text{small}}$, $t+2\Delta t_{\text{small}}$ et $t+3\Delta t_{\text{small}}$ pour assurer une conservativité au cours du temps. La conséquence directe de ce choix est le fait que la méthode de pas de temps local décrite ici ne garantit pas la conservativité. Cependant, en pratique, l'erreur sur le débit introduite par l'absence d'interpolation temporelle reste très faible et cette erreur est aussi dépendante du nombre de cellules présentes dans la zone d'interface. À cette étape, le seul paramètre qui reste indéterminé est le nombre de points qui doivent être présents pour permettre l'interpolation des grandeurs conservatives au niveau de la zone d'échange en minimisant l'erreur introduite. Ce sujet sera abordé plus en détails dans la suite du chapitre.

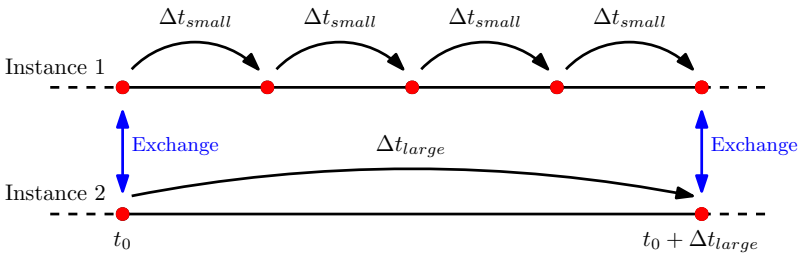


Figure 4.1: Illustration de la relation entre les pas de temps des deux instances.

4.2.1 Gains théoriques sur un cas concret

Pour mettre en évidence les bénéfices de la méthode de pas de temps local proposée ici, les charges de calcul pour une simulation standard et une simulation LTS sont comparées sur un cas d'illustration. L'idée est de présenter le cadre théorique des gains d'une méthode de pas de temps local en montrant sa dépendance aux propriétés des domaines considérés. Dans ce cas très simple présenté en Fig. 4.2, un domaine 1 est composé de n_1 cellules et son pas de temps optimal (déterminé par sa condition CFL locale) est Δt_{small}. De la même façon, le domaine 2 contient n_2 cellules et possède un pas de temps optimal Δt_{large}. Pour la configuration avec pas de temps local, l'interface est constituée d'une région de superposition entre les deux sous-domaines et contient n_{inter} cellules. Dans le cas standard, toutes les cellules font partie d'un domaine unique et le pas de temps est fixé par la condition CFL la plus restrictive, *i.e.* Δt_{small}. Par conséquent, pour un temps de simulation total de t_{sim}, la charge théorique (avec l'hypothèse d'un *scaling* parfait par rapport au nombre de processeurs) s'exprime comme,

$$Load_{\text{Standard}} = (n_1 + n_{\text{inter}} + n_2) \times \frac{t_{\text{sim}}}{\Delta t_{\text{small}}}. \tag{4.1}$$

Cette charge correspond donc au produit entre le nombre d'itérations à réaliser pendant t_{sim} et le nombre de cellules dans le domaine. Pour le cas LTS, le domaine 1 est composé de $n_1 + n_{\text{inter}}$ pour un pas de temps Δt_{small} alors que le domaine 2 contient $n_{\text{inter}} + n_2$ cellules avec un pas de temps Δt_{large}. Dans ce cas, l'interface est dupliquée pour créer la superposition entre les sous-domaines

nécessaire à l'échange d'information, ce qui explique la présence de n_{inter} dans le nombre de cellules des domaines 1 et 2. Ainsi, pour la même simulation d'une durée t_{sim}, la charge s'exprime donc comme,

$$Load_{\text{LTS}} = (n_1 + n_{\text{inter}}) \times \frac{t_{\text{sim}}}{\Delta t_{\text{small}}} + (n_{\text{inter}} + n_2) \times \frac{t_{\text{sim}}}{\Delta t_{\text{large}}}. \tag{4.2}$$

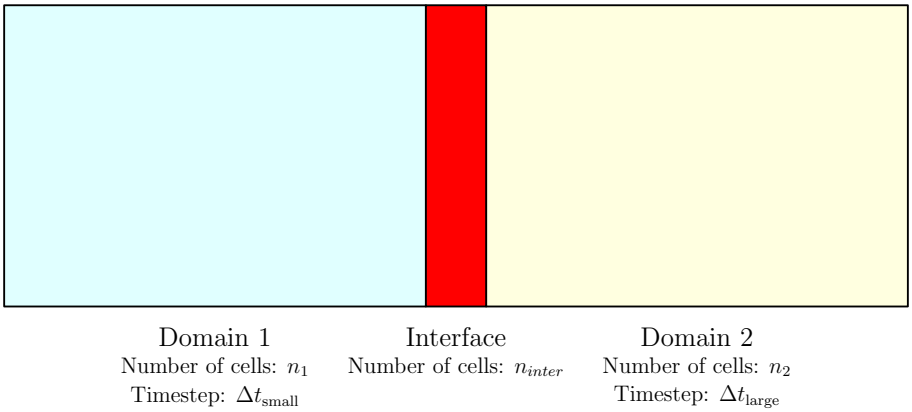


Figure 4.2: Exemple de répartition de cellules pour appliquer une méthode de pas de temps local.

En pratique, le nombre de cellules situées au niveau de l'interface est négligeable par rapport au nombre total de cellules. Pour être cohérent avec cette remarque, dans la suite, le nombre de cellules à l'interface sera choisi comme égal à 1 % du nombre total de cellules dans le domaine 1, n_1, soit $n_{\text{inter}} = \eta n_1$ avec $\eta = 0.01$. Pour paramétriser le problème, les ratios suivants sont introduits,

$$N_n = \frac{n_2}{n_1}, \tag{4.3}$$

$$N_{dt} = \frac{\Delta t_{\text{large}}}{\Delta t_{\text{small}}}. \tag{4.4}$$

Ainsi, le facteur d'accélération ou *speedup* défini comme le ratio entre la charge du cas standard et la charge du cas LTS, s'écrit,

$$\begin{aligned} \text{Speedup} = S_p &= \frac{Load_{\text{Standard}}}{Load_{\text{LTS}}}, \\ &= \frac{N_{dt}(1 + \eta + N_n)}{N_{dt}(1 + \eta) + (\eta + N_n)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les iso-lignes de S_p sont représentées en Fig. 4.3 dans le plan $N_{dt} - N_n$. Deux comportements asymptotiques de S_p apparaissent : $N_{dt} \to \infty$ et $N_n \to \infty$. À partir de l'Eq. (4.5), les limites sont les suivantes,

$$\lim_{N_{dt} \to \infty} S_p = 1 + \frac{N_n}{1 + \eta}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{N_n \to \infty} S_p = N_{dt}. \tag{4.7}$$

Comme attendu, l'Eq. (4.6) montre que pour $N_{dt} \gg 1$, N_n doit être le plus grand possible pour atteindre des valeurs élevées de S_p. Cela aussi souligne l'importance de minimiser le nombre de cellules contenues dans l'interface (ici paramétrisé par η) et d'avoir $n_2 \gg n_1$ puisque cela agit directement sur la valeur atteignable de S_p pour un N_n donné. D'un autre côté, à partir de l'Eq. (4.7), pour $N_n \gg 1$, le nombre de cellules dans l'interface n'a pas de poids dans l'expression de la limite de S_p puisque celui-ci devient négligeable par rapport au nombre total de cellules. S_p devient alors simplement limité par la valeur de N_{dt}. La ligne rouge pointillée de la Fig. 4.3 illustre l'effet d'une augmentation du nombre de cellules dans l'interface (ici traduite par une augmentation de η); l'iso-ligne de S_p est déplacée vers le haut mais l'asymptote pour $N_n \to \infty$ reste inchangée. En conclusion, une valeur élevée de S_p et donc de gains en temps de calcul se traduit par un N_{dt} grand et un N_n grand, ce qui sera un objectif pour les applications concrètes à venir.

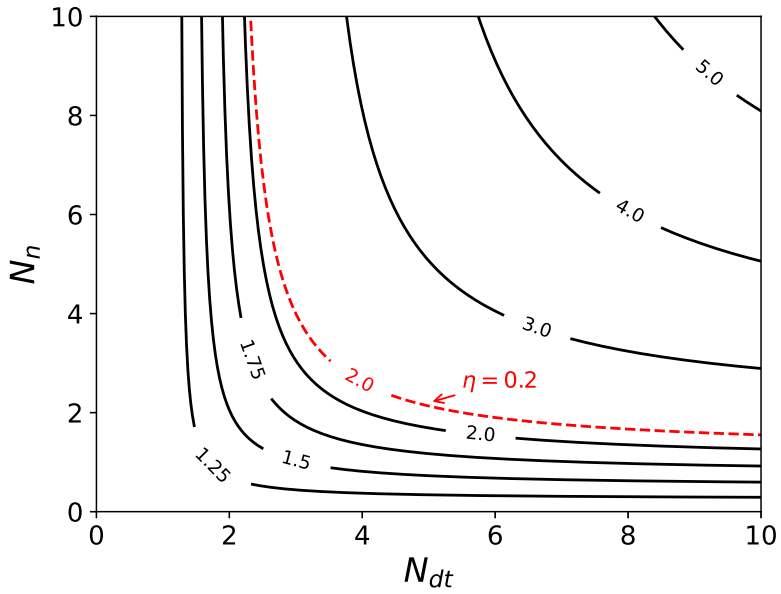


Figure 4.3: Iso-lignes de S_p dans le plan $N_{dt} - N_n$ en noir pour $\eta = 0.01$ et en rouge pointillé pour $\eta = 0.2$.

Maintenant que les principes théoriques et les gains potentiels en termes de coût CPU de la méthode LTS ont été introduits, l'analyse qui va suivre s'attache à valider la méthode MISCOG dans un contexte LTS. En particulier, elle montrera l'importance de l'interface entre les sous-domaines, à la fois pour permettre le couplage et donc l'échange d'information mais aussi pour conserver les propriétés des schémas utilisés. La question qui sera abordée dans la prochaine section est la suivante : quelles conditions doit remplir la région d'interface pour préserver l'ordre de convergence des différents schémas ?

4.3 Analyse numérique de la méthode MISCOG

Pour identifier les conditions nécessaires à la préservation des propriétés des schémas numériques en présence d'une interface d'échange comme décrit précédemment, les schémas numériques présents dans AVBP sont d'abord réécrits dans un formalisme différences finies et en 1D. À partir de ce formalisme simple, le but de cette section est de montrer comment exprimer les différents schémas sous la forme d'une représentation matricielle propre à chaque schéma. Une fois cette représentation matricielle obtenue, l'idée sera de comparer un cas de référence avec un domaine unique à un autre cas avec deux domaines et une région de superposition. Grâce à cette comparaison, il sera possible de mettre en évidence les contraintes à imposer dans la région de superposition pour coupler correctement les deux domaines sans dégradation de l'ordre spatial des schémas numériques utilisés.

4.3.1 Représentation matricielle avec un domaine unique

Dans un premier temps, l'objectif est d'étudier sous forme matricielle un problème de convection linéaire monodimensionnelle par une vitesse c dans un domaine unique. Pour ce faire, un domaine $\Omega = [0, L]$ est défini et discrétisé avec un pas spatial constant $\Delta x = L/(J-1)$, où J correspond au nombre total de nœuds dans le domaine (Fig. 4.4). Le pas de temps Δt dans le domaine est également constant. La position du nœud d'indice j et le temps à l'itération n peuvent être simplement exprimés en fonction de Δx et Δt, comme $(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t)$. Ainsi, il est possible d'écrire la solution de l'équation d'advection discrétisée à la position x_j et au temps t_n uniquement avec les indices j et n. Ce qui donne $U(x_j, t^n) = U_j^n$. La configuration est supposée périodique, *i.e.* l'onde qui quitte le domaine Ω par la droite ré-rentre par le côté gauche. Pour ce problème, le nombre CFL, noté ν, s'exprime simplement comme,

$$\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \tag{4.8}$$

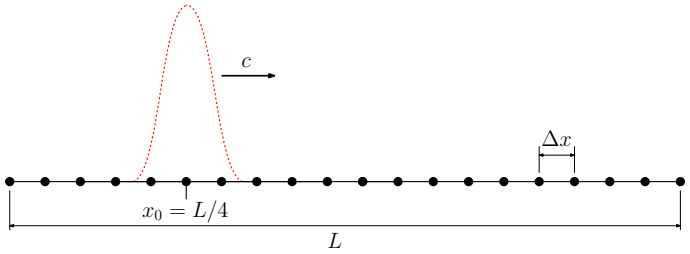


Figure 4.4: Illustration du problème pour un domaine unique.

Dans le contexte particulier d'une représentation 1D du problème, les opérateurs suivants sont introduits (identiques à ceux du chapitre précédent) :

- E : l'opérateur de décalage spatial, pour lequel $U_{j+1}^n = EU_j^n$ et $U_{j-1}^n = E^{-1}U_j^n$. Pour rappel, l'exposant fait référence à l'itération et l'indice à la position du nœud.
- $\Delta_0 = \frac{1}{2}(E - E^{-1})$: l'opérateur de différences centrées usuel permettant de discrétiser les dérivées spatiales d'ordre 1.
- $\delta^2 = (E - 2 + E^{-1})$: l'opérateur de différences centrées permettant de discrétiser les dérivées spatiales d'ordre 2.
- $M = \frac{1}{6}(E + 4 + E^{-1})$: l'opérateur "matrice de masse", pour les méthodes éléments finis [57].

En utilisant les opérateurs décrits au-dessus, n'importe quel schéma numérique peut être reformulé en un schéma 1D différences finies pour faciliter son analyse grâce à une représentation matricielle. Les paragraphes qui suivent décrivent ces étapes dans le cas particulier des schémas LW et TTG, mais une méthode similaire est facilement généralisable à d'autres schémas.

Schéma LW

Dans le cas d'une convection linéaire monodimensionnelle, le développement de Taylor à l'ordre 3 suivant,

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = \left.\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right|^n + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right|^n \Delta t + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right), \tag{4.9}$$

peut être reformulé avec le formalisme différences finies au nœud j en utilisant les opérateurs introduits précédemment,

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \nu\Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2}\nu^2\delta^2 U_j^n, \\ &= \frac{1}{2}\nu(\nu-1)U_{j+1}^n + (1-\nu^2)U_j^n + \frac{1}{2}\nu(\nu+1)U_{j-1}^n. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Enfin, la condition de périodicité aux deux extrémités du domaine est directement incluse au système d'équations grâce aux expressions suivantes pour les nœuds d'indice 0 et $J-1$, c'est-à-dire le premier et le dernier nœud respectivement,

$$U_0^{n+1} = \frac{1}{2}\nu(\nu-1)U_1^n + (1-\nu^2)U_0^n + \frac{1}{2}\nu(\nu+1)U_{J-1}^n, \tag{4.11}$$

$$U_{J-1}^{n+1} = \frac{1}{2}\nu(\nu-1)U_0^n + (1-\nu^2)U_{J-1}^n + \frac{1}{2}\nu(\nu+1)U_{J-2}^n. \tag{4.12}$$

En utilisant la notation matricielle, le système s'écrit comme,

$$\boldsymbol{U_{N+1}} = \boldsymbol{K_{\mathrm{LW}}}.\boldsymbol{U_N}, \tag{4.13}$$

ou avec l'expression matricielle complète,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_j^{n+1} \\ \vdots \\ U_{J-2}^{n+1} \\ U_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U_{N+1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\nu^2 & \frac{1}{2}\nu(\nu-1) & & \dots & & & \frac{1}{2}\nu(\nu+1) \\ \frac{1}{2}\nu(\nu+1) & 1-\nu^2 & \frac{1}{2}\nu(\nu-1) & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \frac{1}{2}\nu(\nu+1) & 1-\nu^2 & \frac{1}{2}\nu(\nu-1) & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & \frac{1}{2}\nu(\nu+1) & 1-\nu^2 & \frac{1}{2}\nu(\nu-1) \\ \frac{1}{2}\nu(\nu-1) & & & \dots & & \frac{1}{2}\nu(\nu+1) & 1-\nu^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{K_{\mathrm{LW}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_j^n \\ \vdots \\ U_{J-2}^n \\ U_{J-1}^n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U_N}}. \tag{4.14}$$

Grâce à cette formulation matricielle, l'avancement temporel du problème de convection dans un domaine unique devient donc simplement un produit matrice-vecteur entre $\boldsymbol{K_{\mathrm{LW}}}$ et $\boldsymbol{U_N}$ pour obtenir $\boldsymbol{U_{N+1}}$, avec $\boldsymbol{U_N}$ et $\boldsymbol{U_{N+1}}$ qui contiennent l'ensemble des valeurs nodales du domaine aux itérations (n) et $(n+1)$ respectivement [128].

Schémas TTG

Comme expliqué précédemment, les schémas TTG diffèrent du schéma LW puisque qu'ils utilisent le formalisme éléments finis et sont écrits en deux étapes. Néanmoins, de la même manière que pour LW, l'Eq. (3.3) peut être ré-exprimé dans le cas d'un formalisme différences finies en 1D,

$$M(\widetilde{U}_j^n - U_j^n) = -\alpha\nu\Delta_0 U_j^n + \beta\nu^2\delta^2 U_j^n, \tag{4.15}$$

$$M(U_j^{n+1} - U_j^n) = -\nu(\theta_1\Delta_0 U_j^n + \theta_2\Delta_0\widetilde{U}_j^n) + \nu^2(\epsilon_1\delta^2 U_j^n + \epsilon_2\delta^2\widetilde{U}_j^n). \tag{4.16}$$

Les deux équations précédentes (4.15) et (4.16) peuvent ensuite être exprimées de manière équivalente sous une forme qui ne contient que le nouveau terme de chaque étape à gauche de l'équation. La première équation (4.15) devient,

$$
\begin{aligned}
M(\widetilde{U}_j^n - U_j^n) &= -\alpha\nu\Delta_0 U_j^n + \beta\nu^2\delta^2 U_j^n, && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{6}\left(\widetilde{U}_{j+1}^n - U_{j+1}^n + 4(\widetilde{U}_j^n - U_j^n) + (\widetilde{U}_{j-1}^n - U_{j-1}^n)\right) &= -\frac{1}{2}\alpha\nu(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \beta\nu^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{6}\left(\widetilde{U}_{j+1}^n + 4\widetilde{U}_j^n + \widetilde{U}_{j-1}^n\right) &= \left(\frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu)\right) U_{j+1}^n + \left(\frac{2}{3} - 2\beta\nu^2\right) U_j^n + \left(\frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu)\right) U_{j-1}^n, && (4.17)
\end{aligned}
$$

et la deuxième équation (4.16) devient,

$$
\begin{aligned}
M(U_j^{n+1} - U_j^n) &= -\nu(\theta_1\Delta_0 U_j^n + \theta_2\Delta_0\widetilde{U}_j^n) + \nu^2(\epsilon_1\delta^2 U_j^n + \epsilon_2\delta^2\widetilde{U}_j^n), && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{6}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n + 4(U_j^{n+1} - U_j^n) + (U_{j-1}^{n+1} - U_{j-1}^n)\right) &= -\nu\left(\frac{\theta_1}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\theta_2}{2}(\widetilde{U}_{j+1}^n - \widetilde{U}_{j-1}^n)\right) + \\
&\quad + \nu^2\left(\epsilon_1(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + \epsilon_2(\widetilde{U}_{j+1}^n - 2\widetilde{U}_j^n + \widetilde{U}_{j-1}^n)\right), && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{6}\left(U_{j+1}^{n+1} + 4U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right) &= \left(\frac{1}{6} - \nu\frac{\theta_1}{2} + \nu^2\epsilon_1\right) U_{j+1}^n + \left(\frac{2}{3} - 2\epsilon_1\nu^2\right) U_j^n + \left(\frac{1}{6} + \nu\frac{\theta_1}{2} + \nu^2\epsilon_1\right) U_{j-1}^n \\
&\quad + \left(-\nu\frac{\theta_2}{2} + \nu^2\epsilon_2\right)\widetilde{U}_{j+1}^n - 2\epsilon_2\nu^2\widetilde{U}_j^n + \left(\nu\frac{\theta_2}{2} + \nu^2\epsilon_2\right)\widetilde{U}_{j-1}^n. && (4.18)
\end{aligned}
$$

Le système précédent (4.15)-(4.16) est ainsi reformulé comme,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6}\left(\widetilde{U}_{j+1}^n + 4\widetilde{U}_j^n + \widetilde{U}_{j-1}^n\right) &= \left(\frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu)\right) U_{j+1}^n + \left(\frac{2}{3} - 2\beta\nu^2\right) U_j^n \\
&\quad + \left(\frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu)\right) U_{j-1}^n, && (4.19) \\
\frac{1}{6}\left(U_{j+1}^{n+1} + 4U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right) &= \left(\frac{1}{6} - \nu\frac{\theta_1}{2} + \nu^2\epsilon_1\right) U_{j+1}^n + \left(\frac{2}{3} - 2\epsilon_1\nu^2\right) U_j^n \\
&\quad + \left(\frac{1}{6} + \nu\frac{\theta_1}{2} + \nu^2\epsilon_1\right) U_{j-1}^n + \left(-\nu\frac{\theta_2}{2} + \nu^2\epsilon_2\right)\widetilde{U}_{j+1}^n && (4.20) \\
&\quad - 2\epsilon_2\nu^2\widetilde{U}_j^n + \left(\nu\frac{\theta_2}{2} + \nu^2\epsilon_2\right)\widetilde{U}_{j-1}^n,
\end{aligned}
$$

ou dans sa forme matricielle complète,

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \cdots & & & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & & & \cdots & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{pmatrix}}_{M}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\widetilde{U}_0^{n+1} \\ \widetilde{U}_1^{n+1} \\ \vdots \\ \widetilde{U}_j^{n+1} \\ \vdots \\ \widetilde{U}_{J-2}^{n+1} \\ \widetilde{U}_{J-1}^{n+1}
\end{pmatrix}}_{\widetilde{U}_N}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{2}{3} - 2\beta\nu^2 & \frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & \cdots & & \frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) \\
\frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & \frac{2}{3} - 2\beta\nu^2 & \frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & \frac{2}{3} - 2\beta\nu^2 & \frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & \frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & \frac{2}{3} - 2\beta\nu^2 & \frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) \\
\frac{1}{6} + \nu(-\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & & \cdots & & \frac{1}{6} + \nu(\frac{\alpha}{2} + \beta\nu) & \frac{2}{3} - 2\beta\nu^2
\end{pmatrix}}_{K_{1,\mathrm{TTG}}}
\underbrace{\begin{pmatrix}
U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_j^n \\ \vdots \\ U_{J-2}^n \\ U_{J-1}^n
\end{pmatrix}}_{U_N}, \qquad (4.21)
$$

et,

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \dots & & & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & 0 & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & & & \dots & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{M}}
\underbrace{\begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_j^{n+1} \\ \vdots \\ U_{J-2}^{n+1} \\ U_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U_{N+1}}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{2}{3}-2\epsilon_1\nu^2 & \frac{1}{6}-\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \dots & & \frac{1}{6}+\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 \\
\frac{1}{6}+\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \frac{2}{3}-2\epsilon_1\nu^2 & \frac{1}{6}-\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \\
& \frac{1}{6}+\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \frac{2}{3}-2\epsilon_1\nu^2 & \frac{1}{6}-\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \frac{1}{6}+\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \frac{2}{3}-2\epsilon_1\nu^2 & \frac{1}{6}-\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 \\
\frac{1}{6}-\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & & \dots & \frac{1}{6}+\nu\frac{\theta_1}{2}+\nu^2\epsilon_1 & \frac{2}{3}-2\epsilon_1\nu^2
\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{K_{2,TTG}}}
\underbrace{\begin{pmatrix} U_0^{n} \\ U_1^{n} \\ \vdots \\ U_j^{n} \\ \vdots \\ U_{J-2}^{n} \\ U_{J-1}^{n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U_N}}
$$

$$
+
\underbrace{\begin{pmatrix}
-2\epsilon_2\nu^2 & -\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & \dots & & \nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 \\
\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & -2\epsilon_2\nu^2 & -\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \\
& \nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & -2\epsilon_2\nu^2 & -\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & -2\epsilon_2\nu^2 & -\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 \\
-\nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & & \dots & \nu\frac{\theta_2}{2}+\nu^2\epsilon_2 & -2\epsilon_2\nu^2
\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{K_{3,TTG}}}
\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{U}_0^{n+1} \\ \tilde{U}_1^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{U}_j^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{U}_{J-2}^{n+1} \\ \tilde{U}_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\widetilde{U}_N}}. \tag{4.22}
$$

En utilisant les matrices introduites par les Eqs. (4.21) et (4.22), le système précédent est simplifié sous la forme,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U_{N+1}} &= \boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{2,TTG}}.\boldsymbol{U_N} + \boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{3,TTG}}.\boldsymbol{\widetilde{U}_N}, \\
&= \boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{2,TTG}}.\boldsymbol{U_N} + \boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{3,TTG}}.\boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{1,TTG}}.\boldsymbol{U_N}, \\
&= (\boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{2,TTG}} + \boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{3,TTG}}.\boldsymbol{M^{-1}}.\boldsymbol{K_{1,TTG}}).\boldsymbol{U_N}, \\
&= \boldsymbol{K_{TTG}}.\boldsymbol{U_N}.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Cette fois encore, dans le cas d'un domaine unique, l'expression nécessaire pour calculer $\boldsymbol{U_{N+1}}$ est similaire à celle obtenue pour LW : un produit matrice-vecteur entre $\boldsymbol{K_{TTG}}$ et $\boldsymbol{U_N}$. Dans l'expression de $\boldsymbol{K_{TTG}}$, $\boldsymbol{\widetilde{U}_N}$ contient les valeurs nodales à la fin de la première étape du prédicteur, alors que $\boldsymbol{U_{N+1}}$ correspond aux valeurs nodales à l'itération $n+1$, c'est-à-dire à la fin de l'étape du correcteur.

À noter qu'en pratique l'inversion exacte de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$ implique de stocker une grosse matrice, ce qui est très coûteux ou impossible dans le cas général, particulièrement pour des maillages non structurés et/ou des domaines partitionnés. Pour les raisons citées, à la place, l'inversion de la matrice de masse est approximée par la méthode de Jacobi avec une hypothèse de *mass lumping*. Avec une telle stratégie, lors du développement des schémas TTG, une étude a montré que seulement deux étapes de la méthode de Jacobi (noté $p = 2$ dans la suite) étaient nécessaires pour obtenir une solution suffisamment proche de celle obtenue par inversion exacte [82, 57].

Avec l'inversion par méthode de Jacobi, la version explicite des schémas TTG avec p itérations devient,

$$
\begin{aligned}
\left(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right)^{(0)} &= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1,TTG}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}}, \\
\left(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right)^{(k)} &= \left(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right)^{(0)} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\left(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right)^{(k-1)}, \quad k=1,p, \\
\left(\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}\right)^{(0)} &= \boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\mathbf{2,TTG}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{K}_{\mathbf{3,TTG}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right), \\
\left(\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}\right)^{(k)} &= \left(\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}\right)^{(0)} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\left(\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}\right)^{(k-1)}, \quad k=1,p,
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

où $\boldsymbol{D}$ est la matrice diagonale *mass lumped* qui s'exprime comme,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{ii} &= \sum_j \boldsymbol{M}_{ij}, \\
\boldsymbol{D}_{ij} &= 0 \quad \text{for } i \neq j.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Wathen [286] a montré que la convergence de l'inversion par méthode de Jacobi est assurée sur un maillage quelconque quand la matrice $\boldsymbol{D}$ *mass lumped* est utilisée à la place de la matrice $\boldsymbol{M}$ classique. Avec $p=2$, la formulation matricielle devient,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}} = \left(\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N}}\right)^{(2)} &= \Big[\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1},\boldsymbol{TTG}} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}) \\
&\times \left(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1},\boldsymbol{TTG}} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1},\boldsymbol{TTG}}\right)\Big]\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}}, \\
&= \underbrace{\Big[\boldsymbol{D}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\left(\boldsymbol{D}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}^{-1}\right)\Big]}_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1},\boldsymbol{TTG}}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}} = \left(\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}\right)^{(2)} &= \Big[\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{K}_{\mathbf{2,TTG}} + \boldsymbol{K}_{\mathbf{3,TTG}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1,TTG}}) - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}) \\
&\times \Big(\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{K}_{\mathbf{2,TTG}} + \boldsymbol{K}_{\mathbf{3,TTG}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1,TTG}}) \\
&-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{K}_{\mathbf{2,TTG}} + \boldsymbol{K}_{\mathbf{3,TTG}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1,TTG}})\Big)\Big]\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}}, \\
&= \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}(\boldsymbol{K}_{\mathbf{2,TTG}} + \boldsymbol{K}_{\mathbf{3,TTG}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathbf{1,TTG}})\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Ainsi, même en utilisant la méthode de Jacobi pour approximer l'inversion de la matrice de masse, il est possible de se ramener à une forme similaire à l'Eq. (4.23). L'inversion exacte de $\boldsymbol{M}$ notée $\boldsymbol{M}^{-1}$ dans l'Eq. (4.23) est remplacée par sa valeur approximée $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{J}}^{-1}$ dont son expression exacte est donnée par l'Eq. (4.26).

Analyse numérique de la formulation matricielle avec un domaine unique

Comme décrit dans la section précédente, $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N+1}}$ peut être exprimé comme le produit entre une matrice $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{total}}$ (qui dépend du schéma) et un vecteur $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{N}}$ contenant les valeurs nodales à l'itération précédente, donc sous la forme,

$$\boldsymbol{U_{N+1}} = \boldsymbol{K_{\text{total}}}.\boldsymbol{U_N}. \tag{4.28}$$

Cette formulation simple peut être facilement implémentée pour effectuer des comparaisons entre schémas. C'est ce qui est fait dans la suite par le biais d'un code Python décrivant le problème introduit.

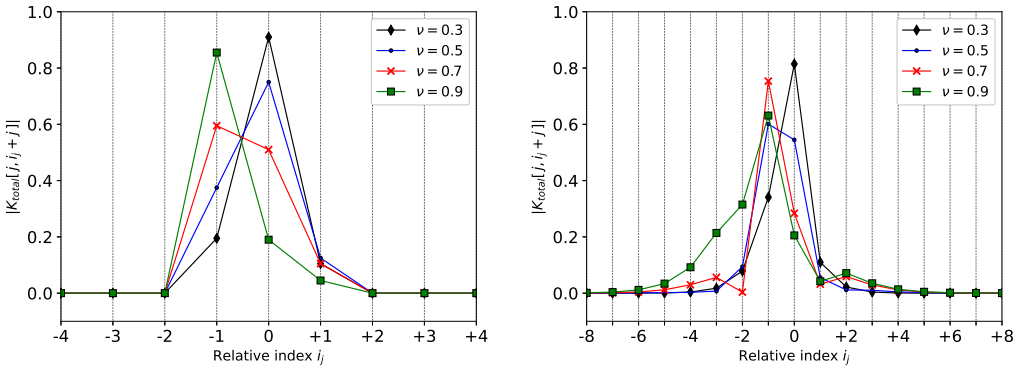
Une conséquence directe de l'expression précédente est que pour un nœud donné d'indice j, la j-ième ligne de la matrice $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ renseigne directement sur les contributions de chaque nœud voisin de j dans le calcul de U_j^{n+1}. Grâce à cette observation, tracer les valeurs de $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ le long d'une ligne choisie donne des informations intéressantes sur les propriétés du schéma considéré [128].

Dans la suite, quatre schémas seront comparés et nommés par les acronymes suivants,

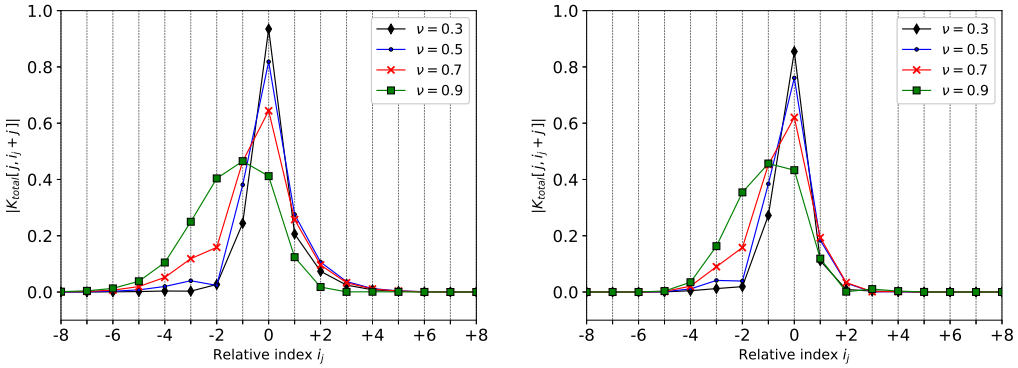
- **LW** : schéma LW avec un domaine unique,
- **TTG4A** : schéma TTG4A avec un domaine unique et une inversion exacte de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$,
- **TTGC** : schéma TTGC avec un domaine unique et une inversion exacte de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$,
- **TTGC-J** : schéma TTGC avec un domaine unique et utilisant la méthode de Jacobi avec deux itérations pour approximer l'inverse de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$.

Pour ces schémas, l'effet local d'un changement de CFL sur la contribution peut par exemple être analysé. Cet effet est mis en évidence par la Fig. 4.5 pour laquelle les contributions d'une ligne de $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ sont tracées pour plusieurs valeurs de CFL ($\nu = 0.3$, 0.5, 0.7 and 0.9). Tous ces graphiques sont centrés sur la position du nœud d'intérêt, *i.e.* correspondant à l'indice 0 sur l'axe des x. Comme attendu, le schéma LW utilise seulement les deux plus proches voisins d'un nœud pour déterminer sa valeur à l'itération suivante. Pour les schémas TTG, cette détermination implique clairement un nombre plus important de voisins à cause de l'inversion de la matrice de masse.

Étant donné qu'au-delà du 4-ième ou 5-ième voisin les contributions sont très faibles, pour faire une analyse plus fine, les mêmes graphiques sont représentés avec une échelle logarithmique en Fig. 4.6. Même si les contributions sont très faibles, cela montre que pour les schémas TTGC et TTG4A avec inversion exacte de la matrice de masse, tous les nœuds du domaine sont impliqués dans le calcul. Cependant, dans le cas du schéma TTGC avec inversion par méthode de Jacobi (**TTGC-J**), les contributions sont non nulles seulement jusqu'aux sixièmes voisins (à gauche et à droite). Autre observation à signaler, les contributions des voisins les plus distants en amont de l'onde semblent augmenter avec le CFL. Étant donné que l'étude s'intéresse à l'analyse de la convection d'une onde 1D de la gauche vers la droite à une vitesse constante c positive, l'observation est donc cohérente. L'onde "parcourt" plus de chemin quand le CFL est plus élevé, expliquant ainsi la plus grande contribution des voisins plus éloignés. Enfin, les caractéristiques du problème expliquent aussi le fait que la représentation des contributions ne soit pas symétrique. En effet, la contribution d'un voisin situé en amont du nœud observé est plus prononcée que celle d'un nœud en aval, puisque l'information est convectée par la vitesse c. Et cet effet est d'autant plus amplifié que le CFL augmente.

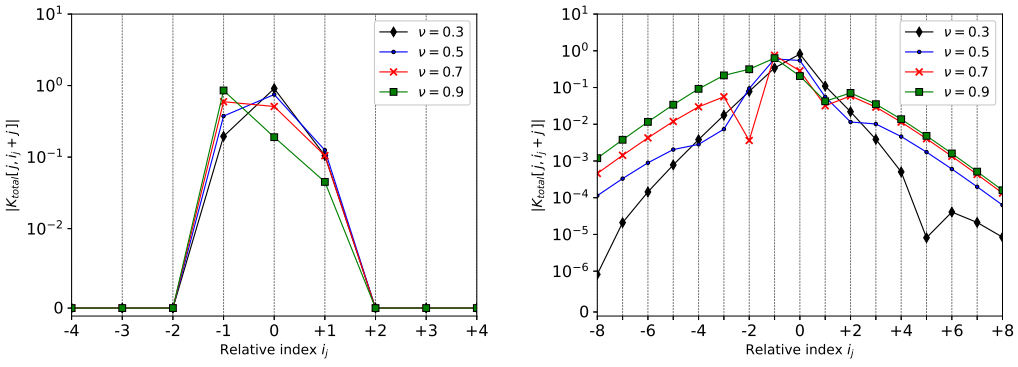


(a) LW. (b) TTG4A.

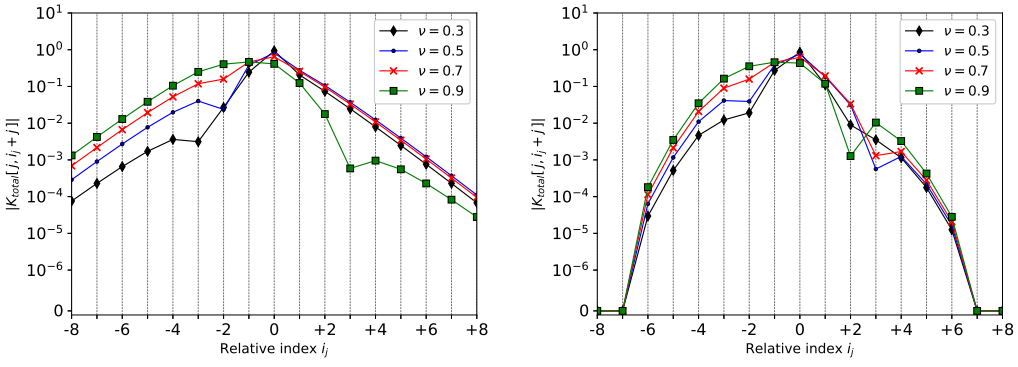


(c) TTGC. (d) TTGC-J.

Figure 4.5: Valeurs absolues des contributions des voisins dans la matrice globale pour différentes valeurs de ν.



(a) LW. (b) TTG4A.



(c) TTGC. (d) TTGC-J.

Figure 4.6: Valeurs absolues des contributions des voisins dans la matrice globale pour différentes valeurs de ν avec une échelle logarithmique.

Dans la suite, Pour calculer l'ordre spatial de chaque schéma, les solutions de chaque cas après un passage d'onde (l'onde se retrouve à sa position initiale) sont comparées avec le signal initial pour différentes valeurs de Δx à CFL constant. La norme L_2 pondérée par le volume de l'erreur de la solution $\boldsymbol{U_N}$ au temps $T = 10L/c$ est par conséquent introduite pour comparer les différents cas à la solution exacte (qui est aussi la solution initiale dans ce cas précis),

$$L_2(U) = \left[\frac{\sum_{j=0}^{J-1} V_j \left(U_{\text{j,exact}} - U_j\right)^2}{\sum_{j=0}^{J-1} V_j} \right]^{1/2}, \tag{4.29}$$

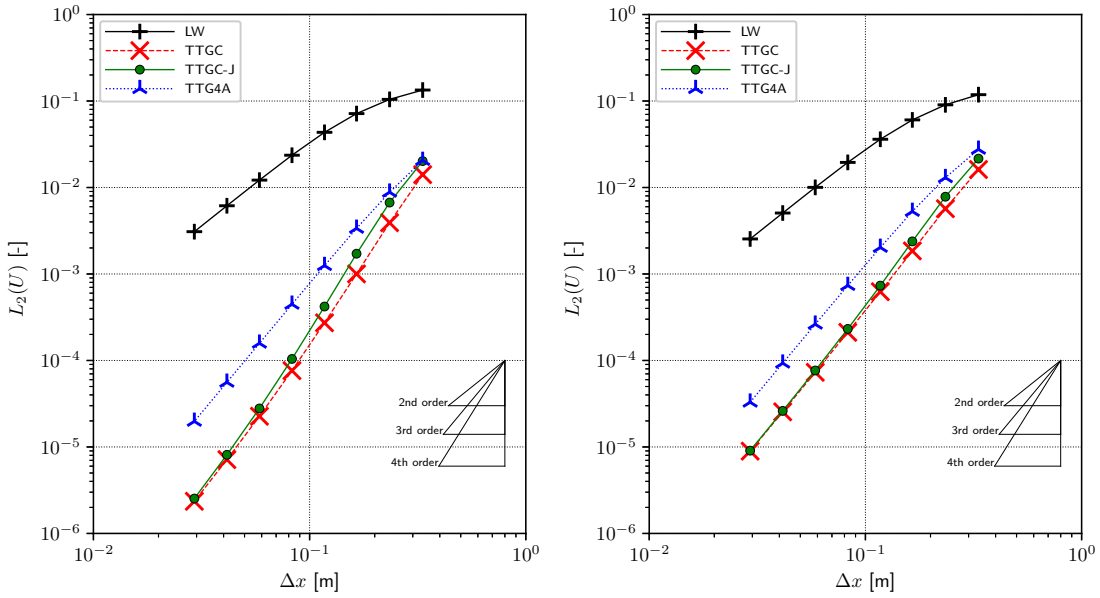
où V_j est le volume de la cellule duale associée au nœud j et $U_{\text{j,exact}}$ correspond à la solution analytique associée au nœud j, *i.e.* résultant de la convection parfaite de la perturbation initiale comme montré sur la Fig. 4.4 pendant un temps de $T = 10L/c$, telle que,

$$U_{\text{j,exact}} = U_{\text{initial}}(x_0 + cT \bmod L), \tag{4.30}$$

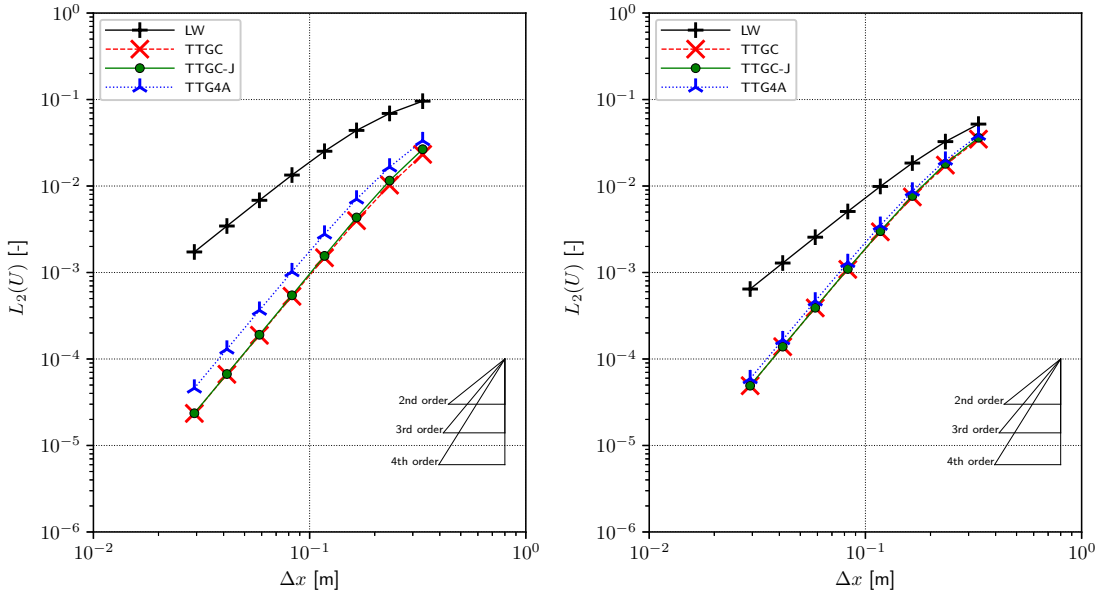
avec U_{initial} le profil de la solution initiale.

Les ordres spatiaux des cas **LW**, **TTG4A**, **TTGC** et **TTGC-J** sont présentés en Fig. 4.7 pour quatre valeurs de CFL différentes dans une configuration avec un domaine unique. Le CFL reste constant pour chaque valeur de Δx, le pas de temps Δt est donc adapté en conséquence. Comme attendu, LW est d'ordre 2 en espace alors que TTG4A/TTGC sont d'ordre 3 en espace. Les résultats confirment aussi que l'approximation de l'inversion de la matrice de masse par la méthode de Jacobi avec deux itérations ne détériore pas la précision spatiale des schémas.

Cette section a permis d'utiliser l'écriture des schémas numériques LW et TTG sous la forme $\boldsymbol{U_{N+1}} = \boldsymbol{K_{\text{total}}}\boldsymbol{U_N}$ pour les analyser dans le cas d'un domaine unique. Toutefois, l'objectif des méthodes de pas de temps local est de permettre le couplage entre plusieurs sous-domaines tout en conservant les propriétés des schémas numériques utilisés. L'idée de la section qui suit est de poursuivre l'analyse qui a été faite dans le cas d'un domaine unique pour une configuration composée de deux sous-domaines. Les pas de temps et d'espace sont encore considérés comme constants. L'objectif est dans un premier temps de comprendre l'impact de la division en sous-domaines et de déterminer des contraintes sur la région d'interface pour assurer une dégradation minimale de l'ordre de convergence des schémas. Une fois ces contraintes définies dans un contexte pas d'espace/pas de temps identiques, elles pourront par la suite être étendues à des cas tests avec des pas de temps différents, ce qui est le but principal des méthodes de pas de temps local.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.5$.



(c) $\nu = 0.7$. (d) $\nu = 0.9$.

Figure 4.7: Ordres spatiaux de **LW**, **TTG4A**, **TTGC** et **TTGC-J** pour différents ν avec un domaine unique.

4.3.2 Représentation matricielle dans le cas à deux domaines

Dans la configuration avec deux domaines, le domaine Ω est divisé en deux parties égales et en ajoutant une région de superposition au centre du domaine initial. Dans la suite, le nombre de nœuds dans la superposition est désigné par N_{overlap}, comme illustré sur la Fig. 4.8 sur laquelle il est montré une configuration avec deux domaines pour $N_{\text{overlap}} = 2$ (deux nœuds récepteurs et deux nœuds émetteurs dans chaque domaine). À noter que comme pour le cas avec un domaine unique, la configuration est aussi périodique, *i.e.* l'onde qui quitte le deuxième sous-domaine par la droite, ré-rentre par le côté gauche du premier sous-domaine.

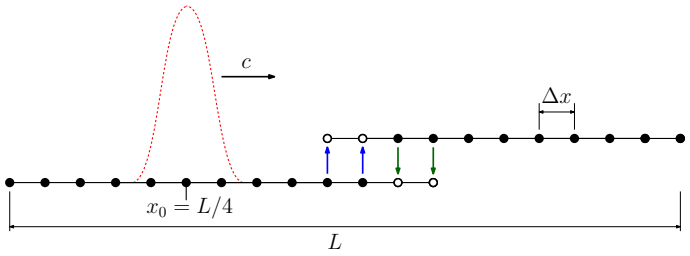


Figure 4.8: Illustration du problème avec deux domaines et $N_{\text{overlap}} = 2$.

Schéma LW

Pour le schéma LW, le passage d'un domaine unique à une configuration avec deux domaines est assez direct. Comme il n'y a pas d'inversion de matrice dans le calcul de $\boldsymbol{U_{N+1}}$, aucun traitement particulier n'est nécessaire pour les nœuds situés dans la région de superposition. Les valeurs des nœuds récepteurs d'un domaine sont simplement remplacées par les valeurs des nœuds émetteurs provenant de l'autre domaine. Le système d'équations est identique à l'Eq. (4.13) et une matrice est remplie pour chaque domaine. Comme mentionné, lors du processus d'échange, après le produit matrice-vecteur, les valeurs des N_{overlap} derniers nœuds du domaine 1 sont remplacées par leur vis-à-vis du domaine 2. De la même manière, les valeurs des N_{overlap} premiers nœuds du domaine 2 sont remplacées par leur vis-à-vis du domaine 1. Dans la configuration illustrée en Fig. 4.8, κ correspond au nombre total de nœuds dans le domaine 1 et W_j^n est la solution au nœud (x_j, t^n) dans le domaine 2. Le processus d'échange s'exprime comme,

$$\begin{aligned} U_{\kappa-1}^n &= W_2^n, \\ U_{\kappa}^n &= W_3^n, \\ W_0^n &= U_{\kappa-3}^n, \\ W_1^n &= U_{\kappa-2}^n. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Le processus d'échange est résumé sur la Fig. 4.9 en utilisant les indices de l'Eq. (4.31). Étant donné que la matrice $\boldsymbol{K_{\text{LW}}}$ ne contient que deux termes non nuls hors diagonale, le calcul de U pour un nœud donné à l'itération $n+1$ utilise seulement sa propre valeur ainsi que celles de ses deux plus proches voisins à l'itération n. Pour les configurations multi-domaines, cela signifie que $N_{\text{overlap}} = 1$ devrait être suffisant pour LW pour coupler les deux domaines sans altérer la solution à cause de la division. Cette intuition sera vérifiée dans la suite de l'étude.

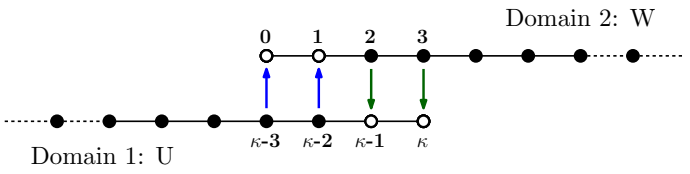


Figure 4.9: Zoom sur le processus d'échange dans la région de superposition de la Fig. 4.8.

Schémas TTG

Pour les schémas TTG, le cas avec deux domaines diffère de LW. À cause de l'inversion de la matrice de masse, contrairement aux nœuds de LW, les nœuds de la région de superposition doivent être traités correctement puisqu'ils vont aussi affecter le reste du domaine. Une première estimation de leur valeur est nécessaire dans chaque domaine de manière isolée, puis cette valeur sera ensuite corrigée lors de l'échange entre domaine au niveau de la superposition. Cette estimation est obtenue en modifiant les opérateurs centrés Δ_0 et δ^2 en opérateurs différences finies décentrés aval ou amont au niveau des deux extrémités des deux domaines. Les opérateurs des Eqs. (4.15) et (4.16) deviennent donc, pour le dernier nœud du domaine 1 (décentrement amont),

- $\Delta_0^B = (1 - E^{-1})$,
- $\delta_B^2 = (1 - 2E^{-1} + E^{-2})$,

et pour le premier nœud du domaine 2 (décentrement aval),

- $\Delta_0^F = (E - 1)$,
- $\delta_F^2 = (E^2 - 2E + 1)$,

où les indices et exposants (B) et (F) signifient *backward* et *forward* respectivement.

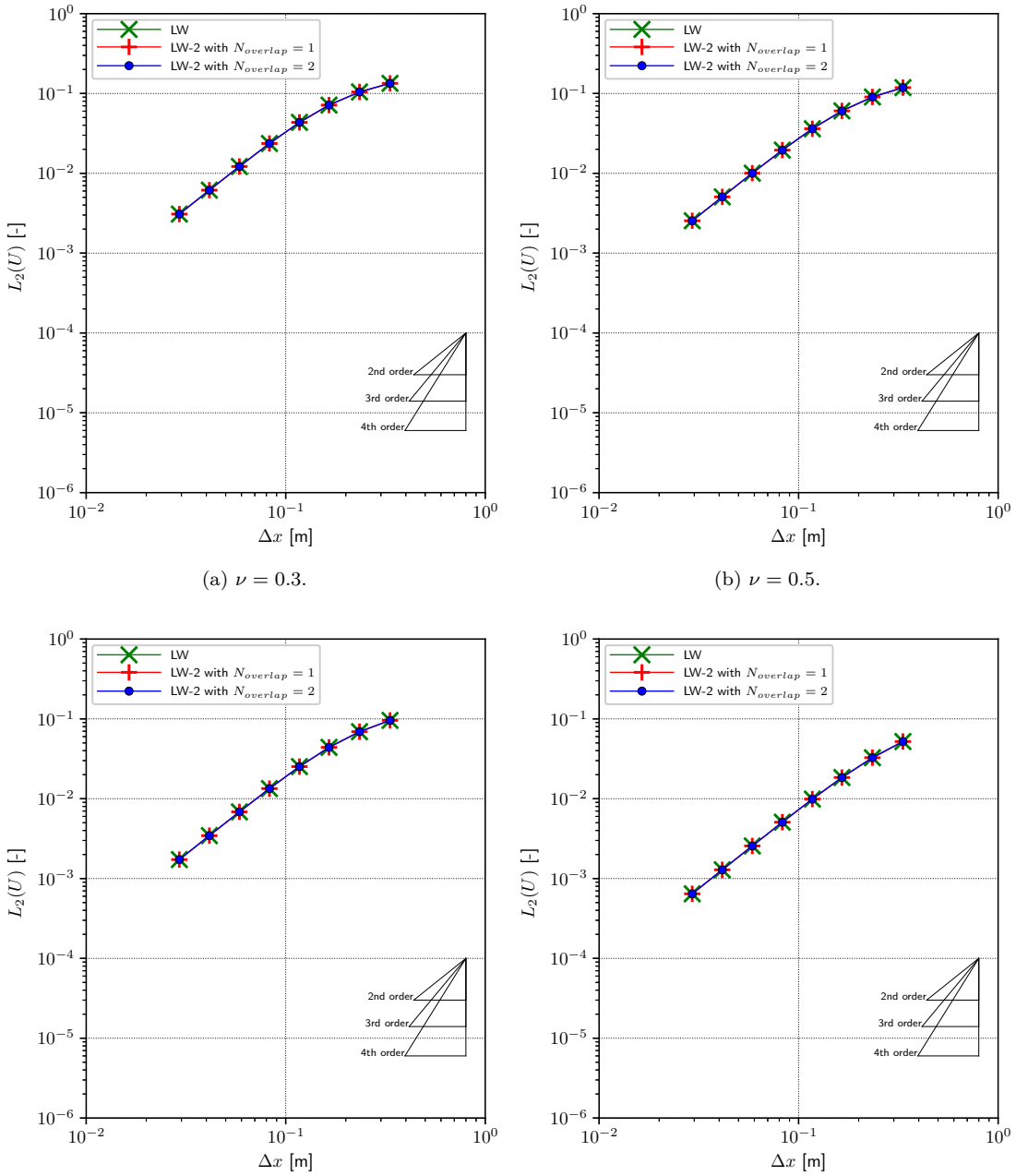
Analyse numérique de la formulation matricielle avec deux domaines

D'après les résultats présentés ci-dessus sur la contribution des nœuds voisins à la matrice globale, il est attendu que le nombre de nœuds devant être présents dans la région d'interface MISCOG soit très dépendant du schéma numérique. Le but de l'analyse présentée par la suite est en conséquence de quantifier l'impact de ce choix fait au niveau de la région de superposition sur la précision du schéma. Avec cet objectif, plusieurs cas sont ajoutés aux cas déjà définis,

- **LW-2** : schéma LW avec deux domaines et une région de superposition avec un N_{overlap} donné,
- **TTG4A-2** : schéma TTG4A avec deux domaines, une région de superposition avec un N_{overlap} donné et une inversion exacte de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$,
- **TTGC-2** : schéma TTGC avec deux domaines, une région de superposition avec un N_{overlap} donné et une inversion exacte de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$,
- **TTGC-2J** : schéma TTGC avec deux domaines, une région de superposition avec un N_{overlap} donné et utilisant la méthode de Jacobi avec deux itérations pour approximer l'inverse de la matrice de masse $\boldsymbol{M}$.

À noter que l'objectif de la discussion est à partir de maintenant d'évaluer l'impact de l'interface (et à terme l'impact du traitement introduit par la méthode MISCOG) sur l'ordre spatial des schémas numériques mais aussi d'apporter une compréhension du traitement de l'interface sur ces résultats. Comme pour le cas avec un domaine unique, la formulation matricielle permet d'évaluer l'ordre de convergence des schémas avec différents N_{overlap}.

Dans un premier temps, il est confirmé que la division en deux domaines n'a pas d'impact sur le schéma LW (Fig. 4.10). Cela montre aussi que pour LW, $N_{\text{overlap}} = 1$ est suffisant pour conserver l'ordre spatial du schéma quel que soit le CFL et qu'une valeur plus élevée de N_{overlap} n'est pas nécessaire.



(a) $\nu = 0.3$.

(b) $\nu = 0.5$.

(c) $\nu = 0.7$.

(d) $\nu = 0.9$.

Figure 4.10: Ordres spatiaux de **LW** et **LW-2** pour différents ν.

Pour valider cette conclusion, l'erreur relative du cas avec deux domaines est comparée à celle avec un domaine unique pour toute la plage de Δx (Fig. 4.11) à $\nu = 0.9$. Cela confirme que pour le schéma LW, $N_{\text{overlap}} = 1$ est satisfaisant puisque l'erreur est déjà égale à la précision machine. L'augmentation de la taille de la région de superposition à $N_{\text{overlap}} = 2$ ne réduit pas l'erreur obtenue.

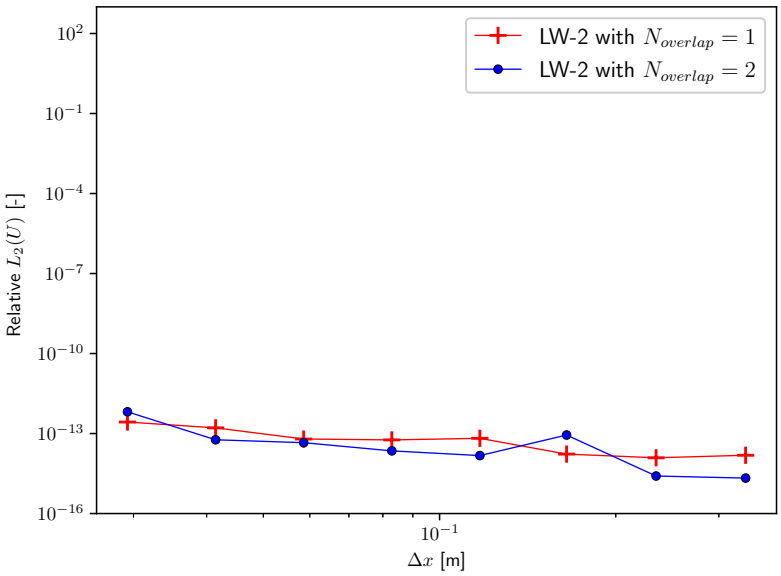
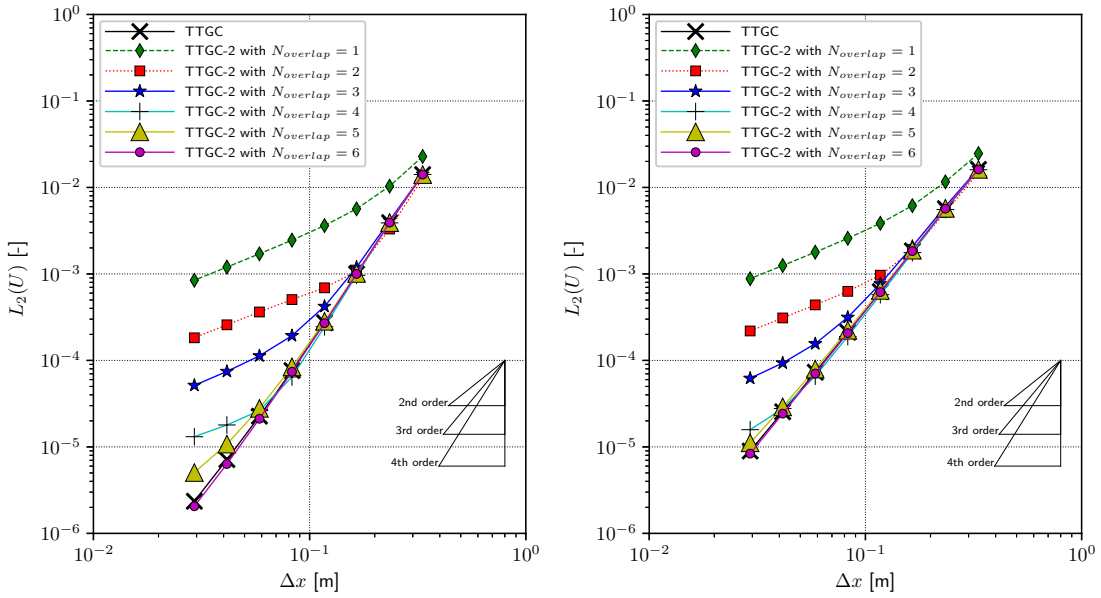


Figure 4.11: Évolution de l'erreur relative de **LW-2** en fonction de Δx pour différents N_{overlap} par rapport à **LW** à $\nu = 0.9$.

Pour les schémas de type TTG, le choix de la valeur de N_{overlap} s'avère être bien plus d'important. Par exemple, pour le schéma TTGC, la Fig. 4.12 montre que $N_{\text{overlap}} = 6$ est nécessaire pour reproduire complètement l'ordre 3 en espace du schéma à CFL bas, ici pour $\nu = 0.3$. Pour un CFL plus haut, à $\nu = 0.9$, la contrainte est moins stricte et $N_{\text{overlap}} = 4$ semble suffisant pour récupérer l'ordre 3 du schéma. À partir de ces graphiques, plusieurs observations et explications doivent être faites :

- Pour des valeurs élevées de Δx (*i.e.* pour une discrétisation faible), l'effet de choix de N_{overlap} s'atténue. Cela s'explique par la prédominance de l'erreur même du schéma par rapport à l'impact de N_{overlap}. En effet, dans ces cas, les erreurs sur le traitement introduit à l'interface devient négligeable.

- Le fait que la sensibilité à la valeur de N_{overlap} décroit quand le CFL augmente peut sembler contre-intuitif. À partir du graphique qui donnent les contributions des voisins pour TTGC (Fig. 4.6c), il est clair que les contributions des voisins entre les positions -6 et -2 augmentent quand le CFL augmente. Il serait donc naturel que l'effet du choix de N_{overlap} soit plus marqué à CFL élevé, puisque si ces voisins ne sont pas considérés dans l'échange, une part plus importante de l'information est omise. Or, la Fig. 4.12 montre l'effet inverse. L'explication réside dans les propriétés propres au schéma TTGC. L'erreur de troncature du schéma est plus grande quand le CFL augmente. Cet effet est d'ailleurs visible sur la Fig. 4.12 puisque l'erreur du cas de référence pour le maillage le plus raffiné se situe autour de $2 \cdot 10^{-6}$ à $\nu = 0.3$ alors qu'elle est de $5 \cdot 10^{-5}$ à $\nu = 0.9$. Ainsi, même si à CFL élevé, les contributions des voisins situés en amont du nœud considéré sont en effet plus grandes, cela ne se répercute pas sur l'impact de N_{overlap} puisque l'erreur commise est négligeable par rapport à l'augmentation de l'erreur de troncature du schéma.



(a) $\nu = 0.3$.

(b) $\nu = 0.5$.

(c) $\nu = 0.7$.

(d) $\nu = 0.9$.

Figure 4.12: Ordres spatiaux de **TTGC** et **TTGC-2** pour différents ν.

Au final, les observations précédentes donnent des informations importantes sur le schéma TTGC. Cependant, comme déjà mentionné plusieurs fois, dans le code AVBP, l'inversion de la matrice de masse n'est pas exacte. Il est donc très important d'analyser le comportement du schéma en prenant en compte l'approximation de l'inversion. Les mêmes comparaisons sont donc présentées en Fig. 4.14 pour le cas **TTGC-2J**, c'est-à-dire le cas qui utilise la méthode de Jacobi pour approximer l'inverse de la matrice de masse. Étonnamment et malgré le fait que le cas **TTGC-J** ait un stencil plus restreint que **TTGC**, dans une configuration avec deux domaines, **TTGC-J** est plus sensible au choix de la valeur de N_{overlap} pour retrouver l'ordre 3 en espace du schéma numérique.

Encore une fois, au premier abord, cela peut sembler contre-intuitif. En effet, un stencil plus large devrait exiger plus de nœuds dans la région de superposition pour récupérer l'information manquante à cause de l'interface. Ce qui n'est pas le cas ici. En fait, l'erreur additionnelle introduite dans le cas **TTGC-2J** vient de l'inverse de la matrice de masse. Comme mentionné au-dessus, deux itérations de la méthode de Jacobi sont suffisantes pour donner des résultats satisfaisants pour l'inversion. Et cette observation est vraie dans la partie centrale de la matrice. Cependant, l'erreur introduite par la méthode de Jacobi par rapport à l'inversion exacte est plus importante au niveau des extrémités qu'au centre. Pour illustrer ce phénomène, la Fig. 4.13 montre la différence relative entre les termes diagonaux de la matrice $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ entre celle obtenue par inversion exacte et l'autre par inversion par méthode de Jacobi, *i.e.* $(\boldsymbol{K_{\text{total,ii}}} - \boldsymbol{K^J_{\text{total,ii}}})/\boldsymbol{K_{\text{total,ii}}}$ en utilisant les notations précédentes. À noter qu'ici, $\boldsymbol{K^J_{\text{total}}}$ fait référence à la matrice $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ calculée à partir de l'inversion de la matrice de masse avec la méthode de Jacobi à deux itérations. À noter aussi que dans la Fig. 4.13, l'indice κ correspond au dernier terme de la matrice. Cela montre clairement que jusqu'au quatrième terme en partant du dernier terme, l'erreur de l'approximation est plus grande que pour les termes centraux.

Ainsi, l'erreur commise sur l'approximation de la matrice de masse s'ajoute à l'erreur générée par l'introduction de l'interface entre les deux domaines. C'est pourquoi, au final, le cas **TTGC-2J** est plus sensible à la valeur de N_{overlap} que son homologue **TTGC-2**, malgré la taille réduite de son stencil.

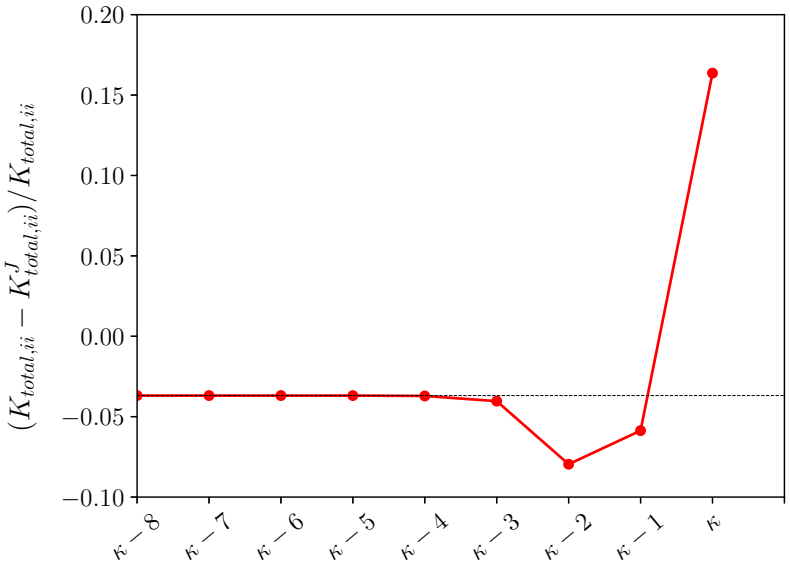
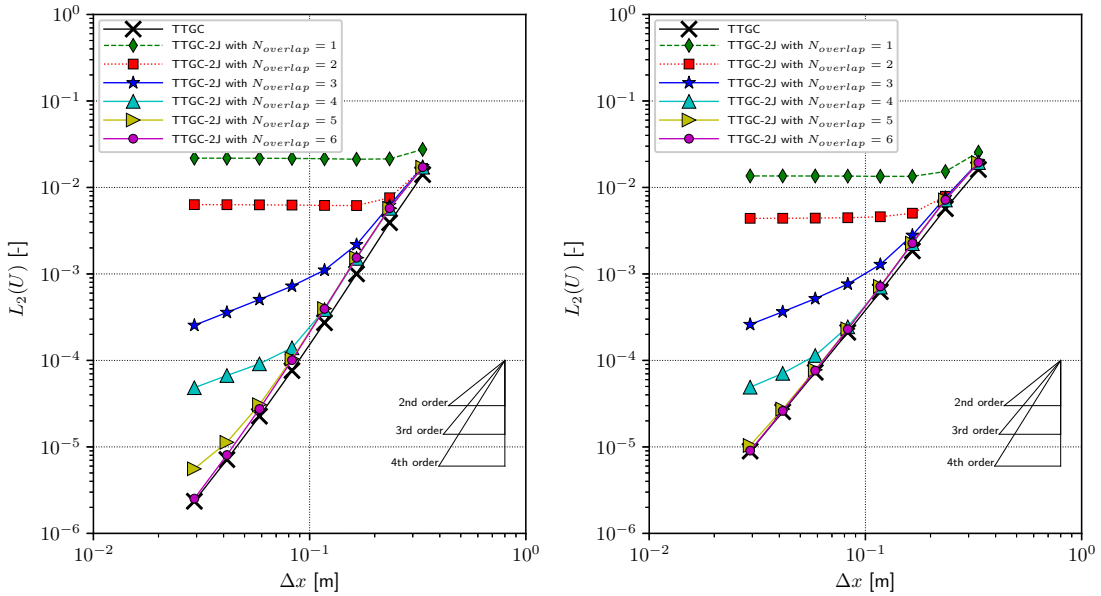


Figure 4.13: Différence relative entre les termes diagonaux de la matrice $\boldsymbol{K_{\text{total}}}$ avec inversion exacte de la matrice de masse et son approximation par la méthode de Jacobi.



(a) $\nu = 0.3$.

(b) $\nu = 0.5$.

(c) $\nu = 0.7$.

(d) $\nu = 0.9$.

Figure 4.14: Ordres spatiaux de **TTGC** et **TTGC-2J** pour différents ν.

Pour conclure sur TTGC et comme pour LW, l'erreur relative du cas avec deux domaines **TTGC-2J** est comparée à celui avec un domaine unique pour toute la plage de Δx à $\nu = 0.9$ (Fig. 4.15). Cela confirme aussi les observations faites précédemment : le stencil du cas **TTGC-2J** s'étend jusqu'au 6ème voisin. Il est donc logique d'atteindre la précision machine à $N_{\text{overlap}} = 6$ et le fait de rajouter un nœud supplémentaire n'améliore pas la précision.

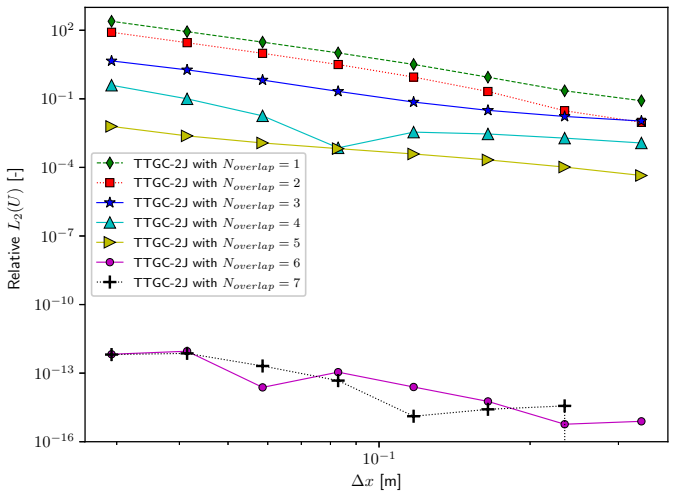
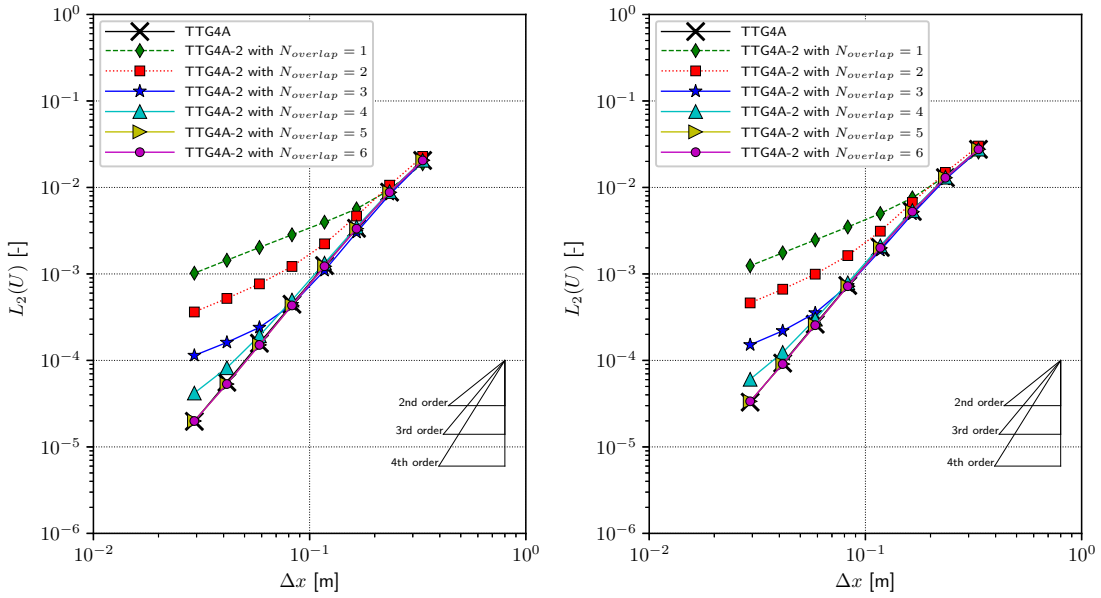


Figure 4.15: Évolution de l'erreur relative de **TTGC-2J** en fonction de Δx pour différents N_{overlap} par rapport à LW à $\nu = 0.9$.

Enfin, une analyse similaire montre que pour TTG4A (Fig. 4.16), la valeur de N_{overlap} nécessaire pour retrouver l'ordre 3 du schéma est beaucoup moins sensible au CFL. Cela s'explique aussi par l'erreur de troncature du schéma. Contrairement à TTGC, cette erreur varie linéairement avec le CFL, alors qu'elle varie en CFL à la puissance 3 pour TTGC.

Pour conclure cette étude matricielle associée à chaque schéma, l'approche détaillée ci-dessus confirme l'importance du paramètre $N_{overlap}$ introduit par la région de superposition entre les deux domaines. Une valeur particulière est requise en fonction du schéma numérique choisi pour retrouver l'ordre spatial du schéma considéré. Il a aussi été confirmé que ce paramètre est directement lié à l'équivalent 1D en différences finies de la notion de stencil du schéma numérique. À noter que jusqu'à présent, un pas de temps unique a été utilisé et que seules des considérations spatiales associées à la division en plusieurs domaines ont été abordées. La prochaine étape est donc de créer un cas test similaire avec AVBP (en LES donc) et d'appliquer la méthode de pas de temps local. Dans les différents cas détaillés par la suite, deux cas seront comparés : un cas avec un domaine et un pas de temps unique et un autre cas avec une configuration contenant deux domaines distincts avec des pas de temps différents ou non.



(a) $\nu = 0.3$.

(b) $\nu = 0.5$.

(c) $\nu = 0.7$.

(d) $\nu = 0.9$.

Figure 4.16: Ordres spatiaux de **TTG4A** et **TTG4A-2** pour différents ν.

4.4 Précision spatiale de MISCOG dans AVBP

La méthode MISCOG, qui permet un échange d'information en conservant un ordre élevé, discutée précédemment et étudiée grâce à un formalisme différences finies est implémentée au sein du code AVBP. Elle est dans un premier temps évaluée en termes de précision spatiale, avec des maillages uniformes et des pas de temps identiques. Ce n'est que dans un deuxième temps que l'utilisation de pas de temps différents (donc avec des pas de temps locaux) est abordée (toujours avec des maillages uniformes). Dans cette optique, chaque cas test est calculé deux fois : une première simulation en utilisant une procédure standard avec un maillage unique et une deuxième simulation composée de deux maillages avec une région de superposition et des pas de temps différents pour évaluer la méthode MISCOG ainsi que la méthode de pas de temps local. À noter qu'en pratique, dans une configuration concrète, la différence de pas de temps entre sous-domaines est induite par une différence de taille de maille. Néanmoins, pour simplifier le problème et ainsi faciliter l'analyse, les maillages sont pour ces cas tests toujours uniformes.

4.4.1 Propagation d'une onde acoustique monodimensionnelle sur un maillage uniforme

Le premier problème pour permettre ces évaluations se base sur les équations d'Euler en 2D dans un domaine périodique simulé avec le code AVBP. Une onde acoustique monodimensionnelle est superposée à un écoulement moyen (avec une vitesse constante U_0). L'onde acoustique qui se déplace de la gauche vers la droite au sein du domaine est représentée par une perturbation Gaussienne sur la pression P' avec l'expression,

$$P'(x) = A.e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}. \tag{4.32}$$

La largeur de la Gaussienne λ est définie comme la largeur correspondant à 4 écarts-types (4σ) de la Gaussienne. A est l'amplitude de la perturbation et x_0 est la position initiale du maximum (Fig. 4.17).

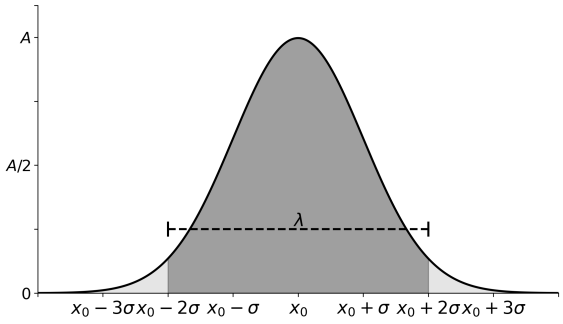


Figure 4.17: Visualisation de la fonction Gaussienne utilisée pour initialiser la perturbation.

Pour les tests décrits dans la suite, le domaine initial est divisé en 3 parts égales de longueur L avec une longueur totale de $3L$. La taille totale du domaine est fixée à 30 fois la largeur de la Gaussienne, soit $L = 10\lambda$. Enfin, pour tous les domaines et sous-domaines, une condition de périodicité est appliquée aux bords quand c'est applicable.

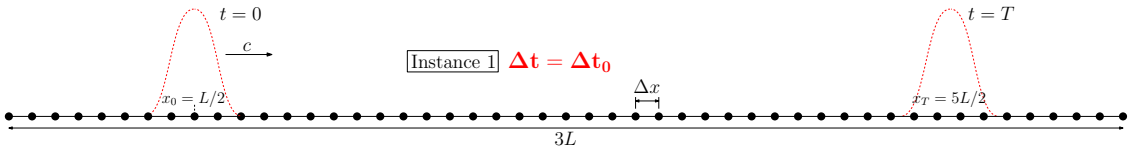
Au temps $t = 0$, un vitesse moyenne nulle de l'écoulement ($U_0 = 0$) et une pression constante ($P_0 = 101315$ Pa) sont imposées dans l'ensemble du domaine. La masse volumique est de $\rho_0 = 1.172$ kg/m^3 et la vitesse du son de $a_0 = 347.469$ m/s (conditions atmosphériques). Par dessus ce champ uniforme, les grandeurs conservatives sont modifiées par une perturbation Gaussienne, dont l'écart type σ est fixé à 0.02 et la position de son maximum est placée au centre du premier sous-domaine, c'est-à-dire en $x_0 = L/2$. Enfin, l'amplitude A de la perturbation acoustique en

pression est fixée à 200 Pa. Au niveau de la simulation, le temps total est choisi égal à $T = 5L/2a_0$, ce qui correspond à une position finale de l'onde au centre du troisième sous-domaine (Figs. 4.18 et 4.22 pour les deux cas tests qui vont suivre).

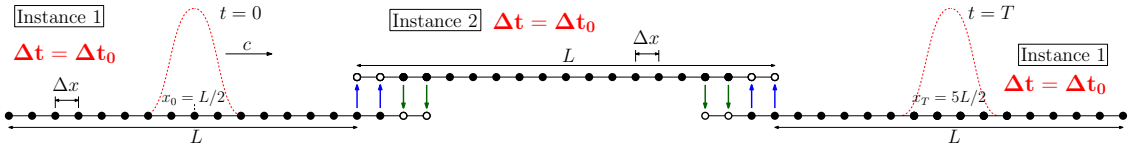
Cas test 1 : Pas de temps unique

Le premier cas de validation est similaire à celui présenté dans l'analyse matricielle des schémas, un cas proche ayant aussi été décrit dans [282]. Chaque domaine de longueur L est ici discrétisé avec la même résolution Δx, avec $\Delta x \in [\lambda/50, \lambda/5]$. Pour le cas de référence, les trois parties du domaine sont simulées au sein d'une instance unique, c'est-à-dire avec une méthode classique (Fig. 4.18a). Pour le cas MISCOG, les deux domaines des côtés partagent la même instance et la partie centrale est isolée dans sa propre instance, avec deux régions de superposition pour échanger de l'information entre les instances (Fig. 4.18b). Dans un premier temps, l'implémentation de la stratégie de couplage est validée en s'intéressant à l'erreur de discrétisation spatiale. Pour chaque valeur de raffinement de maillage Δx, le pas de temps Δt_0 est choisi pour correspondre à un nombre Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) de 0.8, *i.e.* $\Delta t_0 = 0.8 \cdot \Delta x/(U_0 + a_0)$.

À noter que pour ce cas test, les nœuds dans les deux domaines sont coïncidents au niveau de la région de superposition, ce qui signifie qu'aucune interpolation est nécessaire lors de l'échange d'information (Fig. 4.18). De la même manière que pour l'analyse de la formulation matricielle, le paramètre N_{overlap} sera utilisé pour faire référence au nombre de nœuds dans la région de superposition. L'information entre les nœuds receveurs et émetteurs est échangée à chaque itération.



(a) Domaine standard.



(b) Domaine MISCOG avec $N_{\text{overlap}} = 2$.

Figure 4.18: Propagation d'une onde acoustique monodimensionnelle dans un maillage uniforme simulée avec deux approches : l'approche standard avec une instance unique et l'approche couplée avec MISCOG.

L'erreur quadratique moyenne pondérée par le volume sur la pression nodale P_i au temps T est par la suite introduite pour comparer les différentes configurations à la solution exacte,

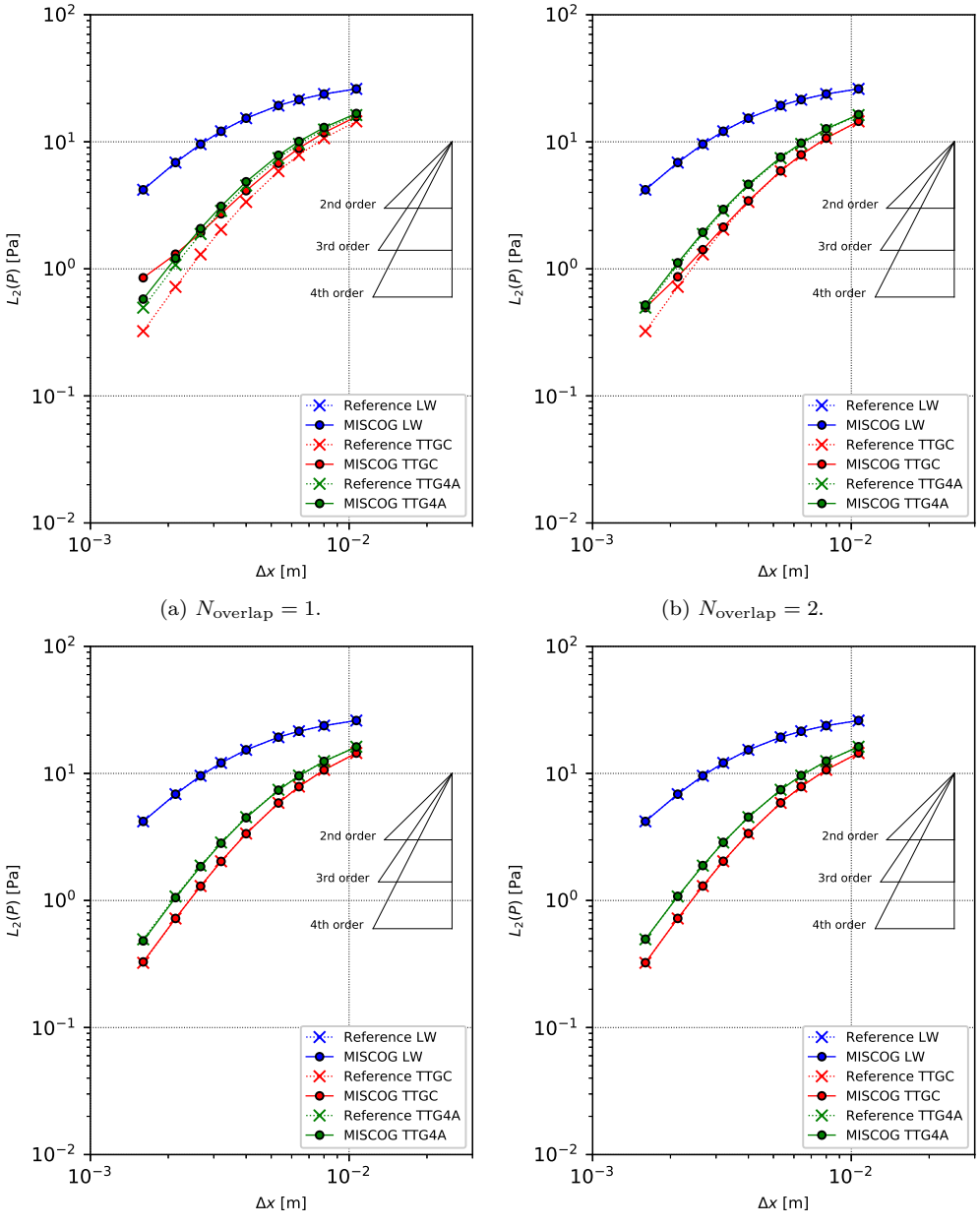
$$L_2(P) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{N} V_i \left(P_{\text{i,exact}} - P_i\right)^2}{\sum_{i=0}^{N} V_i} \right]^{1/2}, \tag{4.33}$$

où V_i correspond au volume dual de la cellule associée au nœud i et $P_{\text{i,exact}}$ est la pression analytique au nœud i. À noter que pour ce problème d'acoustique linéaire considéré, la solution exacte $P_{\text{i,exact}}$ est simplement le résultat de la convection de la perturbation initiale de pression par la vitesse acoustique $c = U_0 + a_0$ pendant le temps de simulation et qui s'exprime comme,

$$P_{\text{i,exact}} = P_0 + P'(x_0 + (U_0 + a_0)T), \tag{4.34}$$

avec $P'(x)$ donnée par l'Eq. (4.32).

L'erreur quadratique L_2 sur la pression obtenue pour les trois schémas avec la méthode standard et avec MISCOG pour différentes valeurs de N_{overlap} est présentée en Fig. 4.19. Ces premiers résultats montrent clairement que l'impact du paramètre N_{overlap} est moins prononcé par rapport à l'analyse différences finies précédente. Cependant, les conclusions restent proches : pour retrouver l'ordre de convergence de la solution standard avec la stratégie MISCOG, $N_{\text{overlap}} = 1$ est nécessaire pour LW et $N_{\text{overlap}} = 3$ au minimum pour TTGC et TTG4A. À noter que l'analyse différences finies précédente a montré que pour retrouver de manière exacte le résultat d'un domaine unique, une valeur de N_{overlap} supérieure à 4 était parfois requise. Cependant, comme l'indique ce cas test, dans un cas plus réaliste, l'effet n'est pas aussi marqué.



(a) $N_{\text{overlap}} = 1$. (b) $N_{\text{overlap}} = 2$.

(c) $N_{\text{overlap}} = 3$. (d) $N_{\text{overlap}} = 4$.

Figure 4.19: Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{overlap} à CFL = 0.8.

Il est notable de souligner à ce stade que même si sur le graphique de la Fig. 4.19d, les cas Référence et MISCOG semblent superposés, il existe néanmoins une erreur. Pour s'en convaincre, de la même manière que pour l'analyse différences finies, l'évolution de l'erreur relative des cas MISCOG par rapport au cas de référence est tracée en fonction de N_{overlap} sur la Fig. 4.20. Par cet intermédiaire, il apparaît que même si à $N_{\text{overlap}} = 3$, le cas MISCOG est déjà superposé à la référence au niveau de l'ordre spatial de convergence, l'augmentation de N_{overlap} diminue bien l'erreur relative. Ainsi, pour donner un bon compromis entre précision et contrainte sur la zone de superposition, c'est la valeur de $N_{\text{overlap}} = 4$ qui est retenue pour les schémas TTG. Ces valeurs (avec $N_{\text{overlap}} = 1$ pour LW) seront utilisées pour le reste des cas de cette étude.

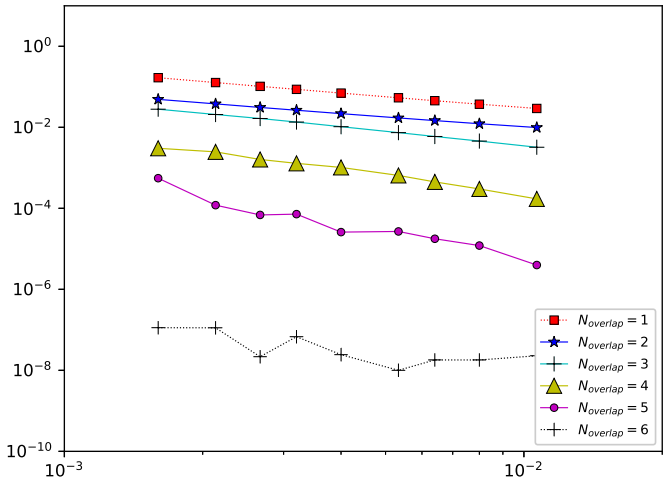


Figure 4.20: Évolution de l'erreur en fonction de N_{overlap} pour TTG4A à CFL = 0.8.

Enfin, pour valider une dernière fois les choix faits sur les valeurs de N_{overlap}, le même cas test est simulé à CFL = 0.2 avec les valeurs conseillées de N_{overlap}, *i.e.* $N_{\text{overlap}} = 1$ pour LW et $N_{\text{overlap}} = 4$ pour les schémas TTG (Fig. 4.21). Pour ce deuxième cas, les résultats des cas MISCOG sont aussi en parfait accord avec le cas de référence au niveau de l'ordre spatial des schémas.

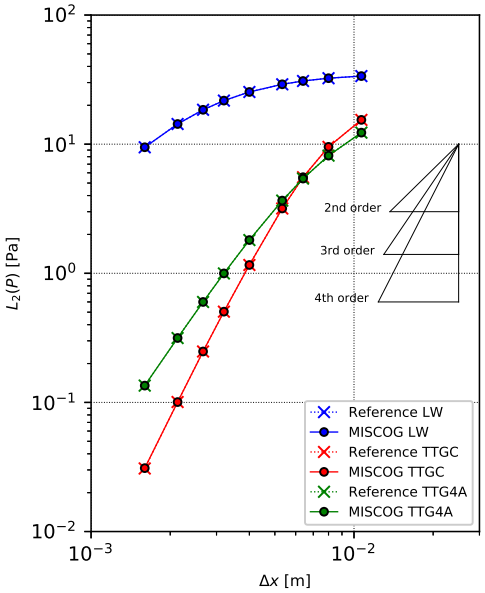


Figure 4.21: Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW avec $N_{\text{overlap}} = 1$, TTGC et TTG4A avec $N_{\text{overlap}} = 4$ à CFL = 0.2.

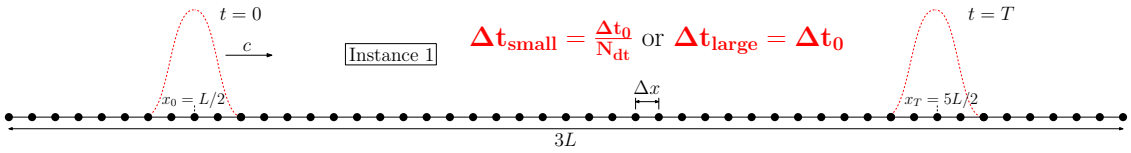
Cas test 2 : Pas de temps locaux

Le deuxième cas de validation marque l'introduction de la méthode de pas de temps local. Ici, des maillages uniformes sont de nouveau utilisés mais avec des pas de temps différents entre sous-domaines. Ainsi, le même cas que celui présenté dans la section précédente est exploité, mais avec une différence de pas de temps associé entre le domaine central et les côtés (Fig. 4.22). Comme dans la section présentant la théorie de la méthode de pas de temps local, le coefficient désigné par N_{dt} est introduit pour définir le facteur de pas de temps entre le domaine central et les deux domaines des côtés. Comme pour le cas précédent, la résolution du maillage Δx varie dans la plage $[\lambda/50, \lambda/5]$. À noter qu'ici, la méthode de pas de temps local est artificielle puisque des pas de temps différents sont utilisés alors que les maillages sont uniformes. Comme expliqué précédemment, ce choix est fait pour simplifier l'analyse qui suit.

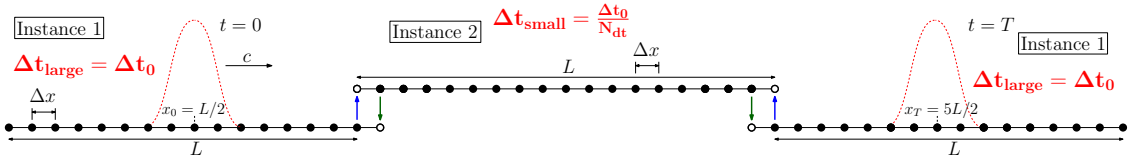
Dans ce cas de validation, trois configurations sont à distinguer :

- deux cas de référence pour lesquels les trois sous-domaines sont simulés au sein d'une instance unique du solveur. Les deux cas se différencient par le pas de temps utilisé :
  - le premier cas noté *Reference dt large* utilise un pas de temps Δt_{large} qui correspond au pas de temps fixé par la condition CFL de stabilité à CFL $= 0.8$ comme le cas précédent (obtenu par la relation classique $\Delta t_{\text{large}} = 0.8\Delta x/(U_0 + a_0)$).
  - le deuxième cas noté *Reference dt small* utilise un pas de temps plus petit défini par $\Delta t_{\text{small}} = \Delta t_{\text{large}}/N_{dt}$ et correspond donc à un CFL $= 0.8/N_{dt}$.
- le troisième cas correspond à l'utilisation du pas de temps local avec la méthode MISCOG. Les deux domaines des côtés qui partagent le même pas de temps Δt_{large} utilisent la même instance alors que la partie centrale est isolée dans sa propre instance avec un pas de temps $\Delta t_{\text{small}} = \Delta t_{\text{large}}/N_{dt}$. Pour ce cas, deux régions de superposition sont requises pour permettre l'échange d'information entre instances et les propriétés de la zone de superposition sont adaptées à chaque schéma numérique comme décrit précédemment.

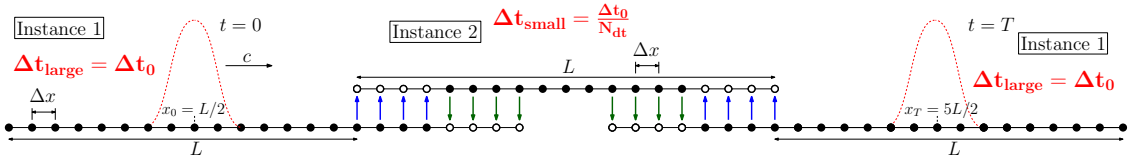
Les caractéristiques de ces trois cas sont résumées en Fig. 4.22. Le nombre de noeuds dans la région de superposition est choisi en fonction des observations faites à la section précédente, *i.e.* la Fig. 4.22b pour LW avec $N_{\text{overlap}} = 1$ et la Fig. 4.22c pour les schémas TTG avec $N_{\text{overlap}} = 4$. L'information stockée aux nœuds situés à l'interface est échangée à chaque Δt_{large}, ce qui correspond à chaque itération pour l'instance 2 et toutes les N_{dt} itérations pour l'instance 1. À noter que le cas de validation précédent composé d'un maillage uniforme avec un pas de temps unique, correspond naturellement à la situation $N_{dt} = 1$ pour ce cas test. Pour analyser l'effet de la méthode de pas de temps local, l'idée est de regarder comment évolue l'ordre spatial des schémas pour différentes valeurs de $N_{dt} > 1$.



(a) Deux cas de référence.



(b) Cas MISCOG pour le schéma LW ($N_{\text{overlap}} = 1$).



(c) Cas MISCOG pour les schémas TTG ($N_{\text{overlap}} = 4$).

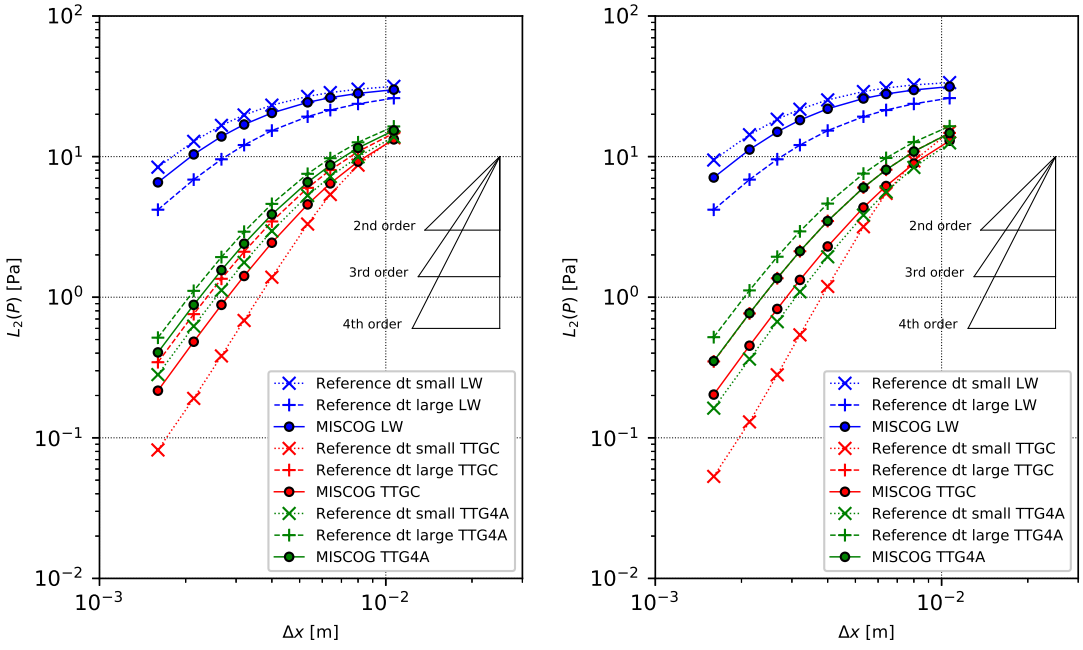
Figure 4.22: Propagation d'une onde acoustique 1D simulée à l'aide de deux approches : l'approche standard avec une instance unique et l'approche couplée avec MISCOG.

L'erreur quadratique sur la pression est donnée en Fig. 4.23 pour 4 valeurs de $N_{dt} > 1$ (ce qui veut dire que la méthode de pas de temps local est utilisée ici) à CFL = 0.8. Plusieurs observations et explications doivent être données ici :

- Premièrement, pour les 4 N_{dt} différents, les résultats sont bons pour le cas MISCOG puisque l'ordre spatial des schémas est en accord avec l'ordre théorique.

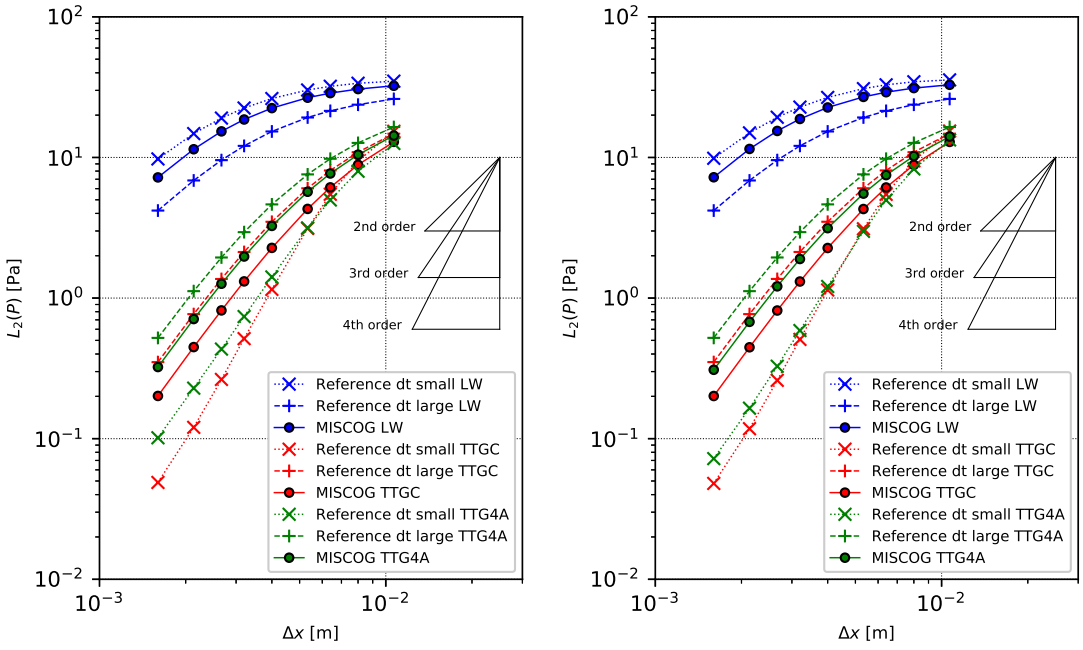
- Pour les deux cas de référence, un phénomène intéressant apparaît. Pour le schéma LW, les cas avec un pas de temps Δt_{small} ont toujours une erreur quadratique plus élevée que les cas avec le pas de temps Δt_{large}. Pour les schémas TTG, c'est le comportement inverse qui est observé. Ceci s'explique encore une fois par les propriétés des schémas numériques. En observant l'erreur de troncature de LW (Eq. (3.31)), il se trouve qu'elle augmente quand le CFL diminue (terme en $1-\nu^2$). C'est pourquoi les cas utilisant Δt_{small}, qui ont donc un CFL plus petit, ont une erreur plus élevée que ceux utilisant Δt_{large}. Pour les cas TTG4A et TTGC, les erreurs de troncature sont respectivement proportionnelles à ν et $\nu(\nu^2 - 2\gamma)$ (Eqs. (3.36) et (3.37)). Puisque ce sont deux fonctions croissantes, les deux erreurs de troncature augmentent donc quand le CFL augmente. Ainsi, les cas utilisant Δt_{large} se retrouvent au dessus de ceux utilisant Δt_{small} en termes d'erreur quadratique sur la pression.

- Le dernier élément d'explication justifie la position des cas MISCOG entre les cas *Reference dt small* et *Reference dt large*. Encore une fois, cela provient de l'erreur de troncature de chaque schéma. Pour le schéma LW, il a été expliqué que lorsque l'onde se propage dans un domaine utilisant le pas de temps Δt_{small}, l'erreur quadratique est plus grande que lorsqu'elle se propage dans un domaine utilisant le pas de temps Δt_{large}. Or, dans le cas MISCOG, l'onde parcourt une distance de $2L$ dans une instance utilisant Δt_{large} et seulement une distance de L dans une instance utilisant Δt_{small}. L'erreur quadratique est donc logiquement plus faible que le cas *Reference dt small* mais plus élevée que le cas *Reference dt large*. Pour les schémas TTG, c'est la situation inverse puisque les cas de référence sont échangés mais l'explication reste la même.



(a) $N_{dt} = 2$.

(b) $N_{dt} = 4$.

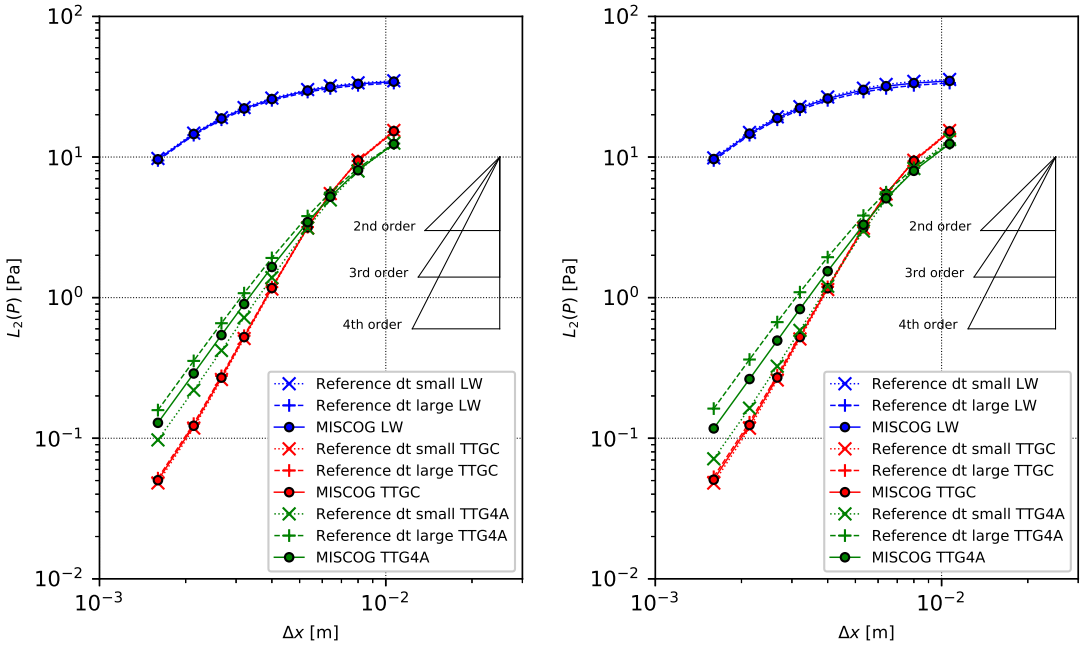


(c) $N_{dt} = 8$.

(d) $N_{dt} = 16$.

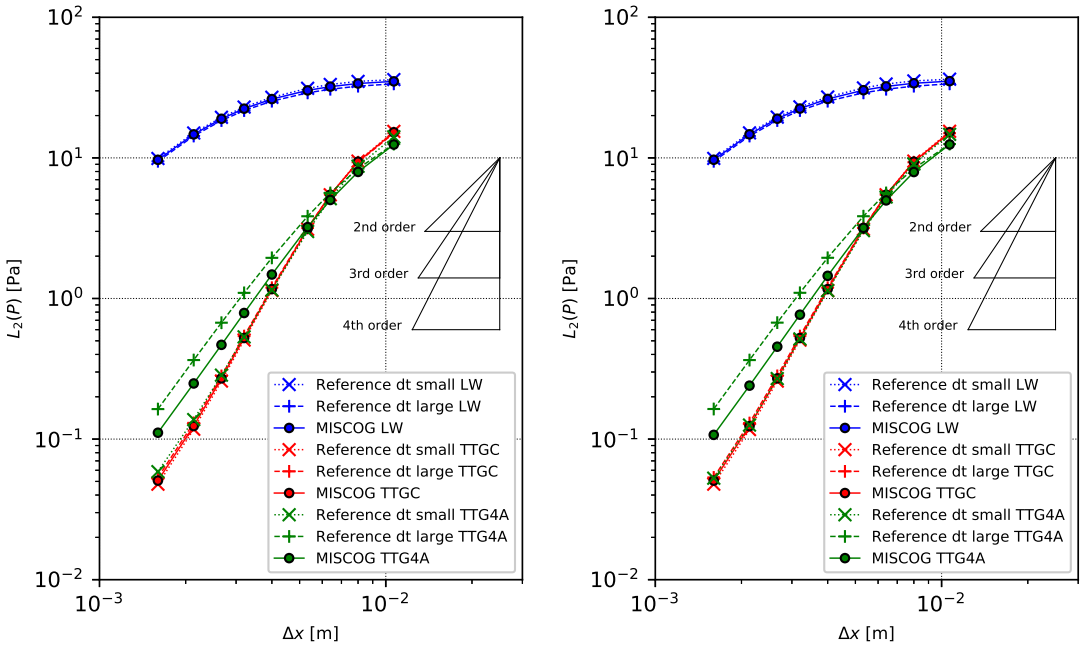
Figure 4.23: Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{dt} à CFL = 0.8.

Les mêmes graphiques sont donnés à CFL = 0.2 en Fig. 4.24. Les résultats sont aussi très satisfaisants puisque pour les cas MISCOG, les ordres des schémas numériques sont cohérents avec la théorie. Il est intéressant de remarquer une dernière fois qu'à CFL = 0.2, en accord avec les erreurs de troncature des schémas, le niveau d'erreur quadratique est plus élevé pour LW et plus faible pour les schémas TTG par rapport aux cas à CFL = 0.8.



(a) $N_{dt} = 2$.

(b) $N_{dt} = 4$.



(c) $N_{dt} = 8$.

(d) $N_{dt} = 16$.

Figure 4.24: Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{dt} à CFL = 0.2.

Remarque sur le choix de $N_{overlap}$ dans une configuration avec pas de temps local

Dans le cas d'un calcul avec pas de temps local, la question du choix de N_{overlap} peut se poser. Pour illustrer la différence entre un cas classique et un cas avec pas de temps local, l'illustration en Fig. 4.25 est donnée. Pour cet exercice, le domaine est constitué de deux instances, l'instance 1 avec le pas de temps $\Delta t_{\text{large}} = \Delta t_0$ et l'instance 2 avec un pas de temps 4 fois plus petit, $\Delta t_{\text{small}} = \Delta t_0/4$. Au temps $t = t_0$, l'échange des grandeurs au niveau de la région de superposition vient d'avoir lieu. Au temps $t = t_0 + \Delta t_{\text{small}}$, seule l'instance 2 effectue une itération. Dans une simulation classique (*i.e* sans pas de temps local), la valeur du nœud qui se situe à l'extrémité du domaine (marqué en rouge) aurait été écrasée lors de l'échange entre instances. Avec pas de temps local, l'instance 2 effectue une sous-itération pendant que l'instance 1 est en attente. Ainsi, la valeur du résidu calculé à ce nœud est faussée par l'absence de condition limite à l'extrémité du domaine. Il a été montré précédemment que pour un schéma TTG, lors de l'inversion de la matrice de masse par la méthode de Jacobi, la valeur finale d'un nœud implique les 6 voisins de chaque côté du nœud en question. Cela signifie que si la valeur du résidu du nœud rouge est faussée, elle va, en théorie, perturber les valeurs des 6 nœuds les plus proches. Ainsi, les valeurs des 7 premiers nœuds sont maintenant faussées et à la sous-itération suivante, l'erreur se propage encore de 6 nœuds supplémentaires.

Cette illustration montre clairement qu'en théorie l'étendue de la zone de superposition devrait dépendre du ratio des pas de temps entre les instances N_{dt} pour écraser les nœuds dont la valeur est perturbée par l'absence de condition limite. La zone réceptrice de la région de superposition de l'instance 2 devrait donc être de $N_{\text{overlap}} = 6N_{dt} + 1$ pour éviter ce phénomène. Ceci signifie que la région de superposition devrait rapidement être très importante dans un cas applicatif concret. Heureusement, en pratique, ce phénomène n'est pas si prononcé. Pour comprendre pourquoi, l'exemple de l'illustration en Fig. 4.25 se place dans le cas extrême (c'est-à-dire la valeur maximale possible) où le CFL de l'instance 1 est égale à 1.

Dans ce cas, étant donné que le pas de temps de l'instance 2 est défini comme $\Delta t_{\text{small}} = \Delta t_0/4$, le CFL de l'instance 2 est égal à 0.25. Dans ce cas, au pas de temps $t = t_0 + \Delta t_{\text{small}}$, l'information erronée générée à cause de l'absence de condition limite peut être vue comme une petite perturbation introduite à la position du nœud de l'extrémité du domaine (nœud rouge). À la sous-itération suivante, donc au pas de temps $t = t_0 + 2\Delta t_{\text{small}}$, comme le CFL est égal à 0.25, la perturbation se propage d'1/4 de la taille de maille. Au pas de temps $t = t_0 + 3\Delta t_{\text{small}}$, la perturbation se propage de nouveau d'1/4 de la taille de maille et se retrouve maintenant au centre de la maille. Et cela se produit encore une fois supplémentaire au pas de temps $t = t_0 + 4\Delta t_{\text{small}}$. Cependant, à la fin de cette itération, l'échange entre les instances intervient et écrase la valeur des nœuds récepteurs de l'instance 2, et donc la perturbation qui s'était propagée depuis l'extrémité du domaine.

Ce descriptif explique pourquoi l'impact de la condition limite est peu marqué dans le cas LTS et pourquoi le choix fait pour N_{overlap} dans le cas d'une simulation classique semble suffisant. Bien sûr, cet exemple ne prouve rien et reste très imagé puisque la perturbation introduite se propage par exemple au sein même de la cellule. Mais, elle fournit une courte justification pour mieux appréhender le problème.

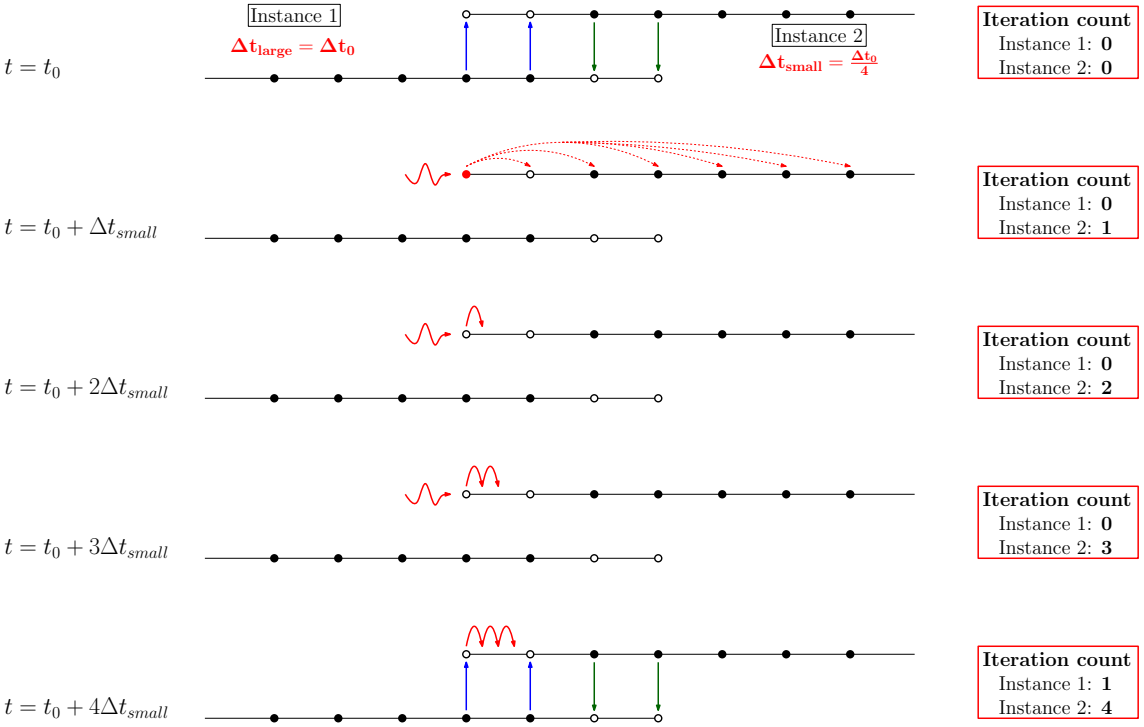


Figure 4.25: Illustration du problème lié à la condition limite dans une simulation avec pas de temps local.

4.4.2 Convection d'un vortex isentropique en deux dimensions

La combinaison MISCOG/AVBP/LTS ayant été qualifiée sur un cas test monodimensionnel, la suite s'attèle à valider la méthode LTS pour un écoulement 2D. Dans cette configuration, le traitement de la région de superposition avec des nœuds non coïncidents est abordé, *i.e.* en introduisant l'effet d'une interpolation dans la région d'interface. Pour ce cas test, un vortex isentropique est superposé à un écoulement uniforme avec une vitesse axiale (formulation identique au chapitre précédent). Pour ce faire, l'expression analytique du vortex utilise une formulation potentielle à l'aide d'une fonction circulation [293],

$$\Psi(x,y) = \Gamma e^{-r^2/2}, \tag{4.35}$$

avec Γ l'intensité du vortex et $r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}/R_c$ la distance adimensionnée entre (x,y) et le centre du vortex (x_c, y_c). La position initiale du vortex est fixée en $x_c = 10R_c$ et $y_c = 10R_c$, avec $R_c = L_x/20$ correspondant au rayon du vortex. Sous les hypothèses données, les champs de vitesse et de température initiaux qui résultent de cette expression sont,

$$u_0(x,y) = U_\infty + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty - \Gamma \frac{y-y_c}{R_c} e^{-r^2/2}, \tag{4.36}$$

$$v_0(x,y) = V_\infty - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = V_\infty + \Gamma \frac{x-x_c}{R_c} e^{-r^2/2}, \tag{4.37}$$

$$T_0(x,y) = T_\infty - \frac{1}{2C_p}\Gamma^2 e^{-r^2}, \tag{4.38}$$

avec $C_p = \gamma/(\gamma-1)R_{\text{gas}}$ la capacité thermique massique à pression constante, γ l'indice adiabatique et R_{gas} la constante des gaz parfaits.

L'expression du vortex étant solution d'un écoulement isentropique, le champ de pression initial peut être déterminé facilement et s'exprime comme,

$$P_0(x,y) = P_\infty \left(\frac{T_0(x,y)}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{4.39}$$

avec U_∞, V_∞, T_∞ et P_∞ la vitesse selon x et y, la température et la pression de l'écoulement uniforme.

Le champ de masse volumique initial est ensuite déterminé à partir des champs de pression et de température avec la loi des gaz parfaits,

$$\rho_0(x,y) = \frac{P_0(x,y)}{R_{\text{gas}} T_0(x,y)}. \tag{4.40}$$

Pour les simulations présentées par la suite, les différents paramètres sont fixés à $R_c = 0.015$ m, $P_\infty = 101\,325$ Pa, $T_\infty = 300$ K et une vitesse uniforme constante selon la direction x, *i.e.* $U_\infty = 100$ m/s et $V_\infty = 0$ m/s.

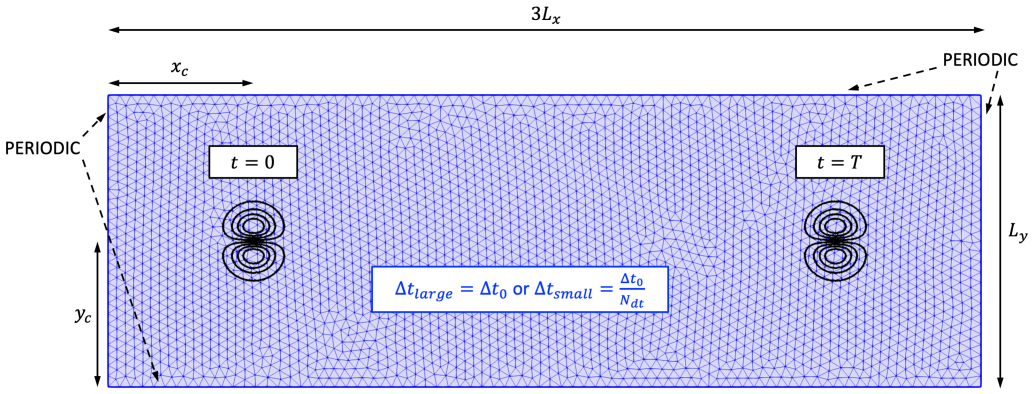
La méthodologie choisie pour valider la méthode LTS sur ce cas 2D est similaire à celle utilisée pour la propagation de l'onde acoustique 1D. Le domaine initial de taille $3L_x \times L_x$ est divisé en 3 sous-domaines de taille $L_x \times L_x$ avec $L_x = 20R_c$. Le même coefficient N_{dt} est utilisé pour définir le facteur de pas de temps entre le domaine central et les deux domaines des côtés. De la même manière que pour le cas de l'onde 1D, pour les deux cas de référence, les trois sous-domaines font partie de la même instance et ils partagent donc le même pas de temps $\Delta t_{\text{small}} = \Delta t_0/N_{dt}$ ou $\Delta t_{\text{large}} = \Delta t_0$ en fonction du cas (*Reference dt small* et *Reference dt large* respectivement). À noter que le pas de temps Δt_0 correspond au pas de temps contraint par la condition de stabilité à CFL = 0.7 associé à chaque Δx.

Avec la méthode LTS, grâce à MISCOG, le domaine central est isolé du reste du domaine et peut par conséquent utiliser le pas de temps plus petit Δt_{small}. Les deux domaines des côtés partagent eux la même instance avec un pas de temps Δt_{large}. Quatre valeurs de N_{dt} sont examinées : 1, 2, 4 et 8. $N_{dt} = 1$ correspond au cas sans différence de pas de temps entre les trois domaines. Par conséquent, la méthode de pas de temps local n'est pas utilisée pour $N_{dt} = 1$. Mais elle est utilisée pour $N_{dt} = 2$, $N_{dt} = 4$ et $N_{dt} = 8$. Enfin, le nombre de nœuds récepteurs dans la région d'interface est fixé en fonction du schéma numérique comme démontré précédemment, *i.e.* $N_{\text{overlap}} = 1$ pour LW et $N_{\text{overlap}} = 4$ pour TTGC/TTG4A. La définition des domaines et des pas de temps est rappelée sur la Fig. 4.26. Pour finir, pour évaluer la précision spatiale de la méthode de pas de temps local, le paramètre Δx varie de $L_x/270$ à $L_x/45$ et chaque Δt est calculé en fonction des conditions CFL détaillées ci-dessus.

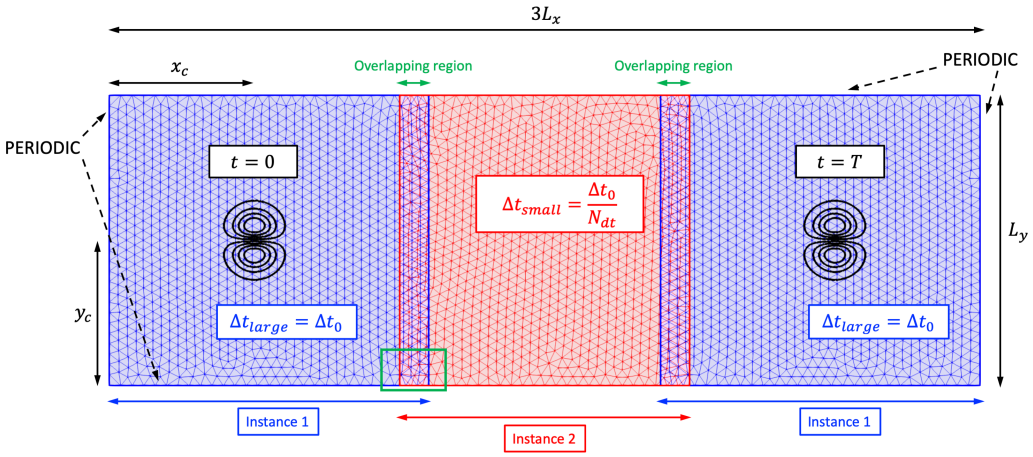
À noter que les quatre conditions limites sont choisies comme périodiques. De plus, dans ce cas test, des maillages non structurés sont utilisés. Ce qui signifie que les nœuds sont non coïncidents au niveau de la région de superposition et pour éviter la situation dans laquelle un nœud serait à la fois donneur et récepteur, un petit intervalle est ajouté dans l'interface comme montré sur la Fig. 4.27. Enfin, comme décrit dans la Section 2.5, une interpolation d'ordre 3 est utilisée pour communiquer les variables conservatives entre les sous-domaines pour les trois schémas numériques [71]. Il est important de préciser que même si LW n'est que d'ordre 2 en espace et en temps, l'utilisation d'une interpolation d'ordre 3 permet de réduire au minimum l'erreur introduite par l'interpolation entre les sous-domaines.

Par ailleurs, à cause du fait que le maillage n'est pas régulier, de la viscosité d'ordre 4 est aussi ajoutée au calcul pour éviter l'apparition de *wiggles*. Comme l'a montré le Chapitre 3, ce phénomène est en particulier très prononcé pour le schéma TTGC et sans viscosité artificielle, les simulations

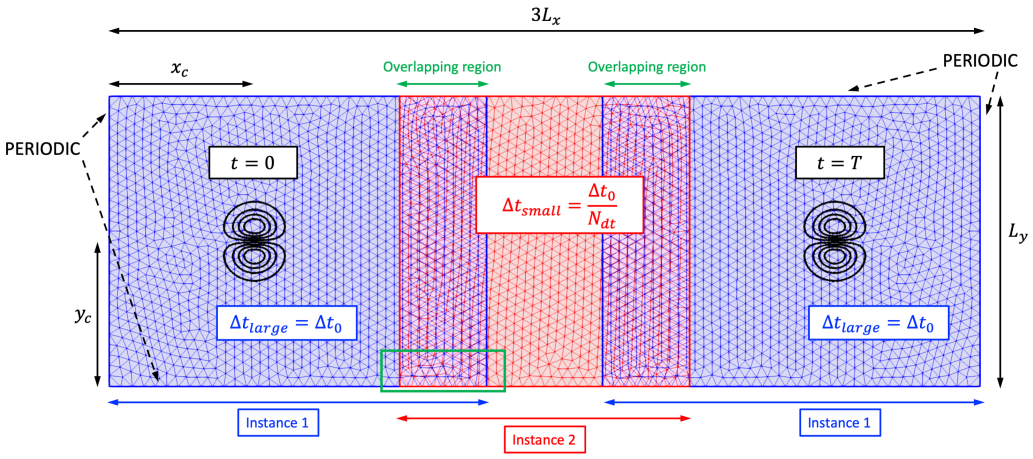
ne convergent pas pour ce schéma. La viscosité artificielle n'était pas nécessaire pour assurer la convergence des autres schémas, mais elle est tout de même ajoutée dans un souci de cohérence. Les valeurs $\epsilon^{(2)} = 0$ et $\epsilon^{(4)} = 0.01$ sont utilisées dans la suite.



(a) Cas de référence avec un domaine unique et sans interface.

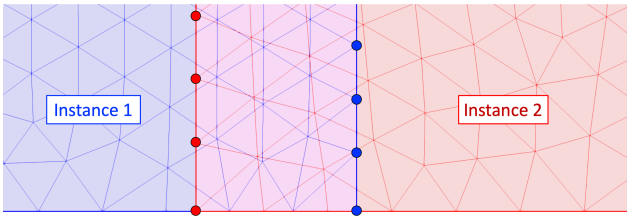


(b) Cas couplé avec deux maillages et une région d'interface adaptée au schéma LW.

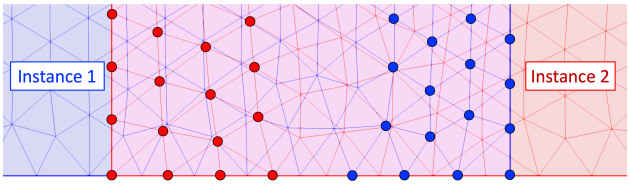


(c) Cas couplé avec deux maillages et une région d'interface adaptée aux schémas TTG.

Figure 4.26: Représentation du domaine de calcul pour le cas de la convection d'un vortex isentropique.



(a) Schéma LW.



(b) Schémas TTG.

Figure 4.27: Zoom sur la région d'interface des cas couplés. Les cercles bleus correspondent aux nœuds récepteurs de l'instance 1 et les cercles rouges aux nœuds récepteurs de l'instance 2. La région rouge met en évidence la zone ajoutée pour éviter qu'aucun nœud ne soit à la fois donneur et récepteur.

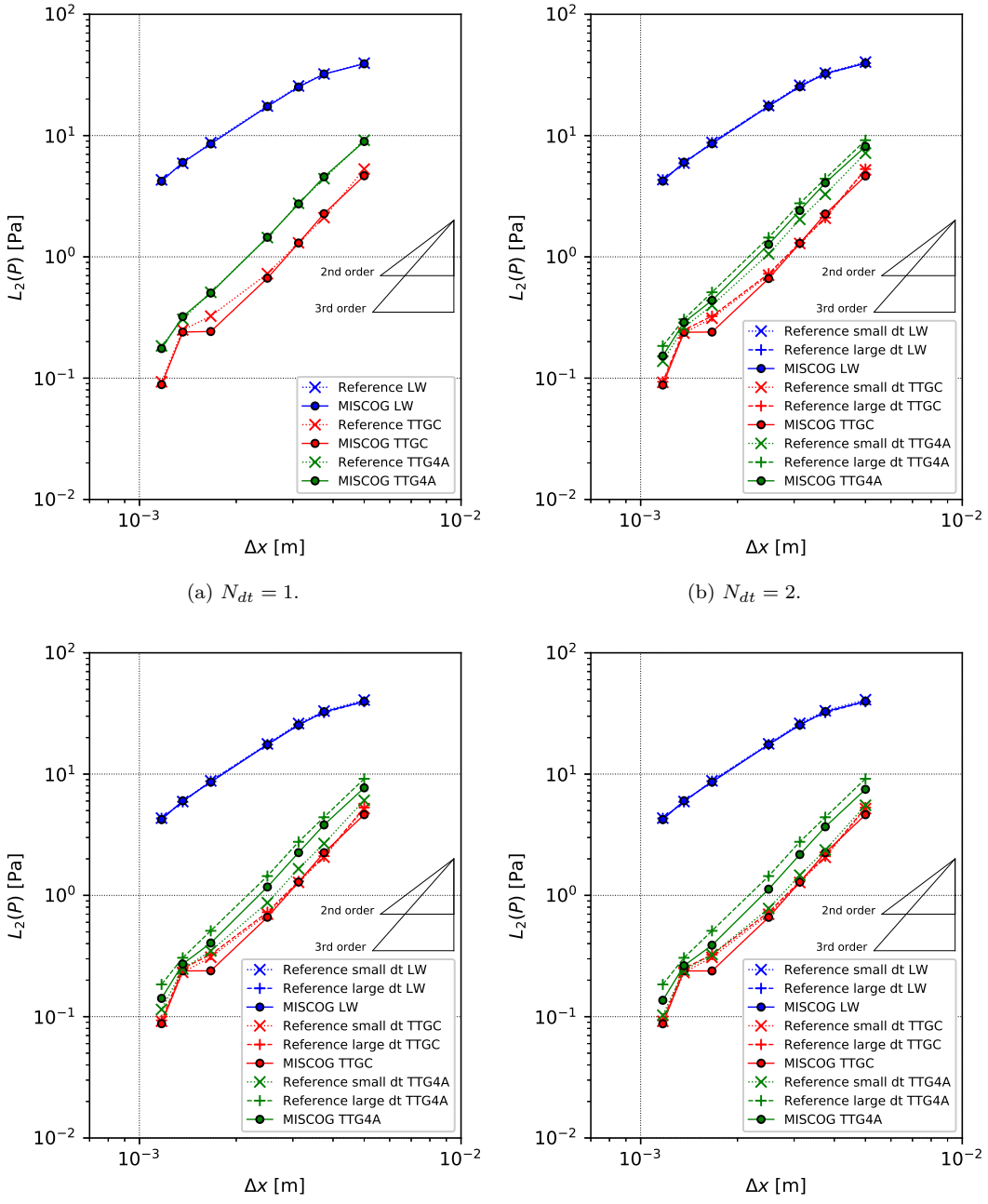
Pour valider la convergence spatiale de la méthode LTS sur ce cas 2D, le champ de pression de chaque cas à $t = T = 2L_x/U_0$ (la position finale du vortex est indiquée en Fig. 4.26) est comparé à la solution analytique au même temps. De la même manière que pour l'onde acoustique, la solution exacte correspond au champ de pression initial (ici donnée par l'Eq. (4.39)) convectée à la position $x_c + U_0 T$. Les erreurs quadratiques associées à chaque schéma sont tracées en fonction de la taille de maille Δx du domaine (Fig. 4.28).

Pour $N_{dt} = 1$ (*i.e.* sans utilisation de la méthode LTS), les résultats sont très similaires à ceux présentés dans [71]. L'ordre spatial obtenu pour chaque schéma correspond à la valeur théorique (Fig. 4.28a).

Pour $N_{dt} > 1$, les résultats sont aussi très satisfaisants et l'ordre spatial des schémas est ainsi correctement retrouvé par la méthode LTS. Les valeurs d'erreur quadratique sont très proches des deux cas de référence. Et, le même effet que pour l'onde acoustique est aussi visible, en particulier pour le schéma TTG4A. L'erreur du cas MISCOG est comprise entre les cas *Reference dt small* et *Reference dt large*, avec le cas *Reference dt large* qui a l'erreur la plus importante puisque l'erreur de troncature augmente avec le CFL pour TTG4A.

Pour les différentes valeurs de N_{dt}, la sensibilité au maillage de TTGC est une fois de plus mise en évidence (pente non monotone sur la Fig. 4.28). Cela s'explique par la type de maillage utilisé. Contrairement au Chapitre 3 pour lequel les maillages étaient purement réguliers (lorsqu'ils n'étaient pas perturbés), les maillages utilisés ici sont générés à partir d'un logiciel de maillage non structuré. La caractère non structuré des maillages agit ainsi de manière similaire aux perturbations introduites dans le Chapitre 3 modifiant l'ordre de convergence de TTGC qui est très sensible à la qualité du maillage. Néanmoins, cette modification de pente est présente à la fois dans les simulations de référence et les simulations MISCOG. Elle n'est pas donc causée par l'utilisation de la méthode de pas de temps local.

En conclusion, sur un cas 2D plus complexe, la méthode de pas de temps local est capable de conserver les propriétés des schémas numériques utilisés. À condition qu'au niveau de l'interface, un nombre de nœuds suffisant soit présent. Ce nombre de nœuds est dépendant du schéma numérique utilisé comme discuté en Section 4.3.2. Ces résultats concluent la validation de la méthode LTS sur des cas tests simples.



(a) $N_{dt} = 1$.

(b) $N_{dt} = 2$.

(c) $N_{dt} = 4$.

(d) $N_{dt} = 8$.

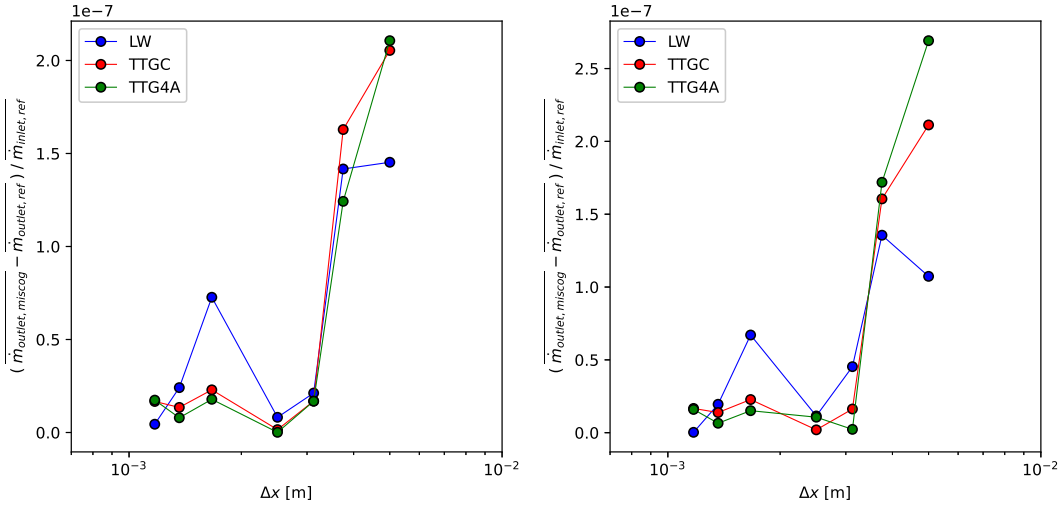
Figure 4.28: Erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différents N_{dt}.

Conservativité de la méthode

Comme mentionné plus tôt, la conservativité de la méthode pour chaque schéma doit être vérifiée. Cette dernière n'étant formellement pas assurée par la méthode LTS utilisée, ce cas test permet toutefois de quantifier cet effet. Pour cela, la moyenne du débit qui traverse le plan de sortie du cas MISCOG/LTS est comparée à celle obtenue au plan de sortie du cas de référence (*Référence large dt* pour les cas $N_{dt} > 1$). Dans les cas de référence, l'écoulement traverse simplement le domaine de longueur $3L$ et le débit est conservé (puisque le schéma est en lui-même conservatif). Dans le cas couplé, l'écoulement passe à travers deux interfaces et subit donc deux interpolations. À noter que

pour un $N_{dt} > 1$, la différence d'avancement temporel peut également introduire des erreurs au niveau de la conservativité.

Dans un cas idéal, ces deux débits devraient être strictement identiques, ce qui signifierait que le débit est complètement conservé pour les cas MISCOG/LTS. Pour le vérifier, la différence relative entre les deux débits est comparée sur toute la même plage de discrétisation que celle utilisée pour obtenir les ordres spatiaux des schémas. Cette comparaison est menée pour les quatre valeurs de N_{dt} et pour les trois schémas (Fig. 4.29). Il est clair que sur l'ensemble des valeurs présentées, la différence relative entre la référence et MISCOG reste inférieure à 0.00004 % quel que soit le cas. Il est aussi important de remarquer que lorsque le raffinement du maillage augmente, l'erreur relative sur le débit diminue. Ainsi, même si par construction de la méthode de pas de temps local, rien ne garantit la conservation du débit lors de la traversée d'une interface entre deux sous-domaines avec des pas de temps différents à cause de l'absence d'interpolation temporelle, en pratique, cette erreur reste très faible et proche de celle du cas sans interface.



(a) $N_{dt} = 1$. (b) $N_{dt} = 2$.

(c) $N_{dt} = 4$. (d) $N_{dt} = 8$.

Figure 4.29: Différence relative entre le débit massique moyen en sortie du cas MISCOG par rapport au cas *Reference large dt* pour $N_{dt} = 1$, $N_{dt} = 2$, $N_{dt} = 4$ et $N_{dt} = 8$.

Gain en temps de calcul

L'objectif initial de la méthode de pas de temps local est de réduire le temps de calcul d'une simulation tout en garantissant un résultat aussi proche que possible d'une simulation avec un pas de temps unique. Les validations précédentes ont permis de montrer que la méthode décrite ici ne dégradait pas l'ordre spatial des schémas utilisés, ce qui valide le deuxième point. Il reste maintenant à s'intéresser au gain qui découle de l'utilisation de la méthode. La Figure 4.30 présente l'évolution du gain en temps de calcul sur le cas du vortex pour les différentes valeurs de N_{dt} utilisées précédemment. Le gain théorique de la courbe bleue est calculé à partir de l'Eq. (4.5), en utilisant les caractéristiques des maillages à chaque N_{dt} pour obtenir les paramètres N_n et η. La valeur asymptotique du gain est indiquée en pointillés noirs. Les valeurs effectives de gain obtenues pour chaque N_{dt} sont tracées par la courbe verte.

Logiquement, les valeurs effectives sont inférieures à la courbe théorique. L'écart entre les deux courbes s'explique par la configuration elle-même. Dans les simulations du vortex, un nombre élevé d'itérations est fait sur un nombre assez faible de mailles. Le nombre d'itérations élevé a pour effet de multiplier le nombre d'échange entre les sous-domaines pour les cas LTS. À cause du faible nombre de mailles, les routines d'échange entre instances représentent une part plus importante du temps total de calcul par rapport à une simulation plus complexe, réduisant ainsi la valeur du gain. Cependant, les gains effectifs restent satisfaisants pour cette configuration très simple avec par exemple un *speedup* de l'ordre de 2.5 pour un cas avec $N_{dt} = 10$. Les gains effectifs seront plus proches des gains théoriques pour des configurations plus complexes, comme il sera montré dans la suite de ce chapitre.

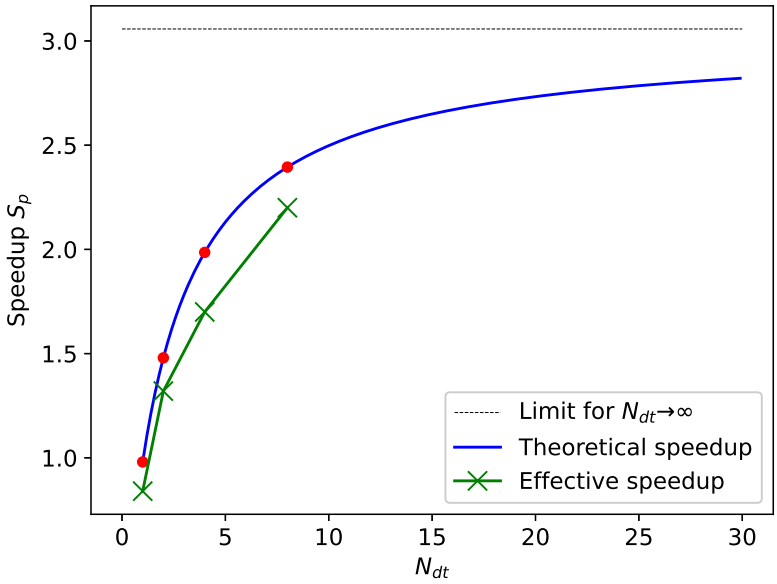


Figure 4.30: Comparaison entre le *speedup* théorique et le *speedup* effectif pour différentes valeurs de N_{dt} au raffinement $\Delta x = L_x/270$.

4.5 Évaluation de la méthode LTS sur des écoulements complexes

Les discussions précédentes se sont intéressées à l'intégration et la validation sur des cas simples de l'approche dite de pas de temps local dans un code LES à l'aide de la méthode MISCOG. Les résultats ont montré que la méthode LTS permet de conserver les propriétés des schémas numériques utilisés si des conditions spécifiques à chaque schéma sont satisfaites au niveau de la région d'interface. La suite de ce chapitre traite de l'application de cette méthode à des simulations instationnaires

plus complexes. Dans ce type de simulations plus coûteuses, le gain en temps de calcul peut être significatif, mais il est nécessaire de s'assurer que la physique n'est pas altérée par cette modification locale des pas de temps. L'objectif est donc de quantifier cet aspect sur des simulations plus concrètes.

Pour remplir cet objectif, plusieurs configurations d'écoulements turbulents de complexité croissante seront simulées à chaque fois à l'aide de deux approches : une approche standard avec un domaine unique et une approche avec pas de temps local grâce à une décomposition en plusieurs sous-domaines. Les deux approches seront ensuite comparées pour analyser les différences introduites par la méthode de pas de temps local. L'analyse de la méthode LTS sur des configurations complexes est divisée en trois parties : la première s'intéresse à un canal turbulent, suivie d'une étude sur la cascade de turbine haute pression LS89 et pour finir une simulation du banc FACTOR complet, incluant un simulateur de chambre de combustion et un étage de turbine haute pression.

La méthode LTS décrite ici a l'avantage de pouvoir être utilisée facilement sur un calcul existant pour avoir des gains immédiats en coût CPU. Le gain en coût CPU peut aussi être anticipé au préalable en identifiant les différents sous-domaines et les pas de temps locaux attendus. Les gains théoriques peuvent être calculés par la méthode décrite en Section 4.2.1.

À noter que depuis le début de cette étude, les ratios des pas de temps entre deux sous-domaines voisins ont toujours été définis comme des nombres entiers. La Figure 4.31a, déjà présentée dans l'introduction de ce chapitre, représente cette configuration avec la relation $\Delta t_{\text{large}} = 4\Delta t_{\text{small}}$ qui relie les pas de temps des deux instances. Cependant, dans le cas général, rien ne garantit que les pas de temps obtenus par les conditions CFL locales des deux sous-domaines ne soient reliés par un nombre entier. De plus, cela nécessite une analyse de la part de l'utilisateur pour déterminer au préalable le pas de temps local de chaque domaine pour ensuite mettre en place la simulation avec le ratio correct entre les instances. Il est ainsi plus confortable de simplement préciser une condition CFL dans chaque sous-domaine pour que le code détermine ensuite le pas de temps dans chaque sous-domaine, ce qui donne une fréquence d'échange associée.

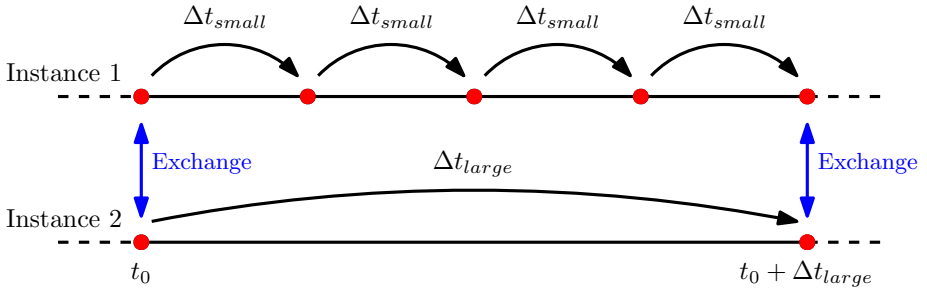
Ainsi, la Fig. 4.31a représente le cas idéal où les conditions CFL des deux sous-domaines imposent des pas de temps exactement reliés par un nombre entier. Ce cas est imaginaire et en pratique le ratio n'est pas entier, c'est-à-dire qu'en reprenant l'exemple précédent, les deux pas de temps seront reliés par,

$$\Delta t_{\text{large,CFL}} = 4\Delta t_{\text{small}} + \epsilon, \tag{4.41}$$

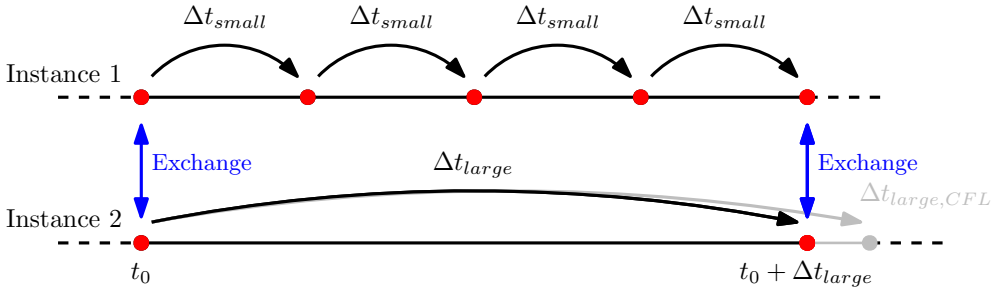
avec $0 \leq \epsilon < \Delta t_{\text{small}}$. Pour conserver un ratio entier entre les pas de temps, il est possible de fixer le pas de temps de l'instance 2 à une valeur plus faible pour tout de même obtenir la relation,

$$\Delta t_{\text{large}} = 4\Delta t_{\text{small}} < \Delta t_{\text{large,CFL}}. \tag{4.42}$$

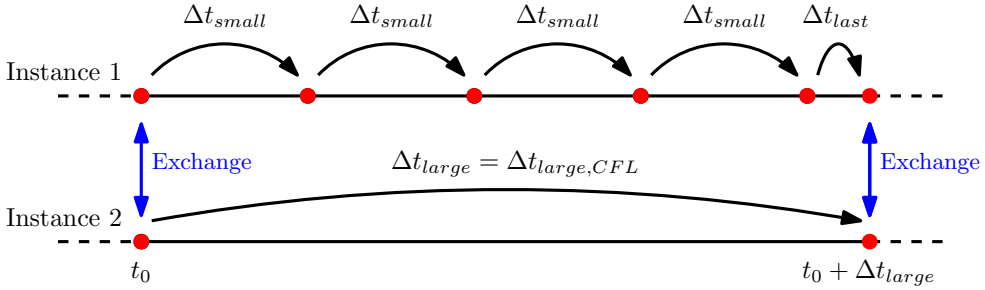
Cette situation, appelée option 1, est illustrée sur la Fig. 4.31b. La deuxième possibilité est de maintenir le pas de temps de l'instance 2 à la valeur imposée par la condition CFL. Dans ce cas, pour maintenir la synchronisation en temps entre les instances, il est nécessaire que l'instance 1 effectue une itération supplémentaire avec un pas de temps plus petit. Cette configuration est appelée option 2 et est représentée sur la Fig. 4.31c. Avec les notations de l'Eq. (4.41), le pas de temps de l'itération supplémentaire est égal à $\Delta t_{\text{last}} = \epsilon$.



(a) Ratio des pas de temps entre les instances entier.



(b) Option 1 : ratio des pas de temps maintenu égal à un nombre entier.



(c) Option 2 : ratio des pas de temps non entier (pour maintenir la synchronisation temporelle une itération supplémentaire est nécessaire).

Figure 4.31: Illustration de la relation entre les pas de temps de deux instances.

En termes de gain en temps de calcul, aucune des deux solutions n'est optimale. L'option 1 force l'instance 2 à utiliser un pas de temps plus petit que celui imposé par sa condition CFL et augmente donc le coût de la simulation. Alors que l'option 2 oblige l'instance 1 à réaliser une itération supplémentaire pour maintenir la synchronisation en temps. Les équations analytiques du *speedup* associé à chaque option sont les suivantes, en utilisant les notations de la Section 4.2,

$$S_{\text{p,option 1}} = \frac{\lfloor N_{dt} \rfloor (1 + \eta + N_n)}{\lfloor N_{dt} \rfloor (1 + \eta) + \eta + N_n}, \tag{4.43}$$

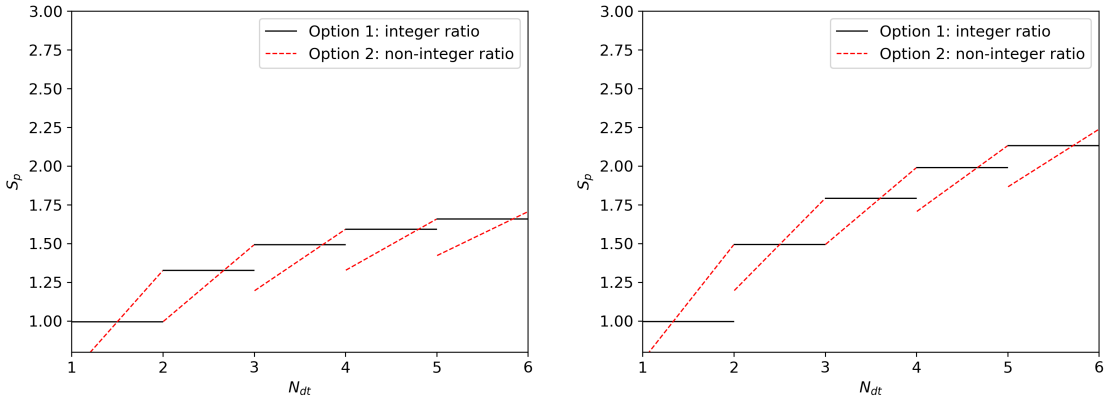
$$S_{\text{p,option 2}} = \frac{N_{dt} (1 + \eta + N_n)}{\lceil N_{dt} \rceil (1 + \eta) + \eta + N_n}, \tag{4.44}$$

avec $\lfloor \bullet \rfloor$ l'opérateur partie entière et $\lceil \bullet \rceil$ l'opérateur partie entière supérieure.

La Figure 4.32 présente l'évolution du *speedup* pour les deux options en fonction du ratio des pas de temps N_{dt} des deux instances, pour deux valeurs de N_n, *i.e.* le rapport entre le nombre des cellules des deux sous-domaines et pour $\eta = 0.01$. Le cas $N_n = 1$ correspond à une situation où les deux domaines contiennent le même nombre de cellules et le cas $N_n = 2$ à la situation où l'instance

2 contient deux fois plus de cellules que l'instance 1. Entre deux nombres entiers, le *speedup* de l'option 1 reste constant puisque quelle que soit la valeur du pas de temps de l'instance 2, celui-ci est maintenu à la valeur $N_{dt} \times \Delta t_{\text{small}}$. Il n'y a donc aucun gain en temps de calcul. Pour l'option 2, le comportement est différent. La fonction est strictement croissante par morceau. Et la valeur du *speedup* à $N_{dt} = 2.9$ est par exemple plus élevée qu'à $N_{dt} = 3.1$, puisqu'à partir de $N_{dt} > 3$, il est nécessaire d'effectuer une itération supplémentaire pour l'instance 1, ce qui augmente le coût calcul. Par conséquent, l'option 2 ne devient plus intéressante en termes de coût de calcul que lorsque l'inégalité suivante est vérifiée (obtenue à partir des expressions de $S_{\text{p,option 1}}$ et $S_{\text{p,option 2}}$),

$$N_{dt} > \frac{\lfloor N_{dt} \rfloor \left(\lceil N_{dt} \rceil (1+\eta) + \eta + N_n \right)}{\lfloor N_{dt} \rfloor (1+\eta) + \eta + N_n}. \tag{4.45}$$



(a) $N_n = 1$. (b) $N_n = 2$.

Figure 4.32: Évolution de S_p en fonction de N_{dt} pour les deux options décrites et pour deux valeurs de N_n.

Malgré le fait que l'option 2 ne soit pas optimale dans toutes les situations, elle reste néanmoins plus accessible du point de vue de l'utilisateur. En effet, elle ne nécessite pas de connaître au préalable le pas de temps des deux instances pour fixer le ratio entre les sous-domaines. L'instance 1 effectue simplement des itérations pour retomber sur le pas de temps de l'instance 2, en effectuant une itération avec un pas de temps plus petit en fin de cycle si besoin. À noter qu'en pratique, l'option 2 permet d'utiliser des pas de temps variables sans choisir des valeurs constantes puisque la dernière itération du cycle permet de conserver la synchronisation temporelle (Fig. 4.31c).

Dans la suite, le cas du canal turbulent et des deux points de fonctionnement de la cascade de turbine haute pression LS89 sont simulés avec l'option 1, alors que la simulation du banc FACTOR complet est faite avec l'option 2.

4.5.1 Canal turbulent

Le canal turbulent est le premier cas 3D utilisé pour évaluer la méthode LTS. Ce cas test constitue une référence pour l'étude de la turbulence en paroi à l'aide de la LES ou de la Simulation Numérique Directe ou *Direct Numerical Simulation* (DNS) [189, 153, 2]. De nombreuses DNS de ce type de configuration ont été faites pour différentes valeurs de nombre de Reynolds turbulent. Parmi ce nombre important de base de données disponibles dans la littérature, la DNS d'Iwamoto à $Re_\tau = 395$ est ici utilisée comme référence [137].

Configuration

Le domaine de calcul de ce cas test est présenté en Fig. 4.33. Le schéma numérique utilisé est Lax-Wendroff [165] avec le modèle σ [196, 266] pour modéliser les termes de sous-maille.

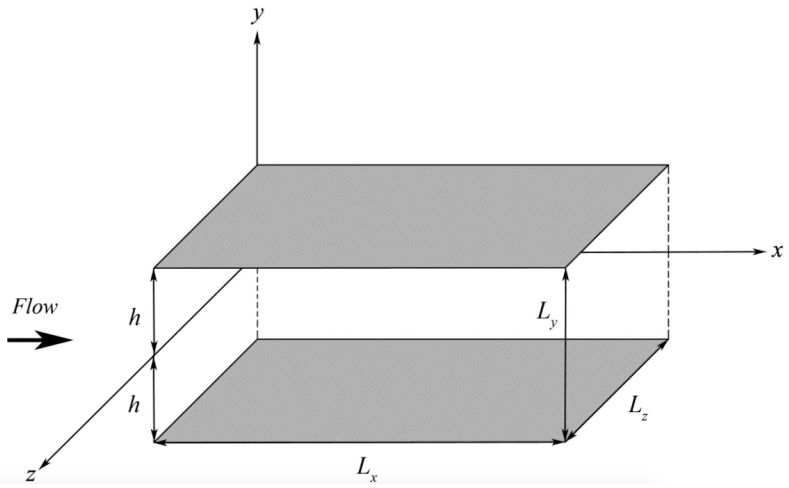


Figure 4.33: Domaine classique pour une simulation de canal turbulent [13].

Re_τ	395
Demi-hauteur du canal h	0.002 m
Volume du domaine (L_x, L_y, L_z)	$2\pi h \times 2h \times \pi h$

Table 4.1: Dimensions du domaine de simulation.

Dans cette configuration, le nombre de Reynolds turbulent Re_τ est égal à,

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu_{wall}}, \tag{4.46}$$

avec ν_{wall} la viscosité cinématique en paroi et u_τ la vitesse de frottement qui reste à déterminer. Pour atteindre la valeur $Re_\tau = 395$ de la simulation de référence, le nombre de Reynolds de l'écoulement est choisi comme,

$$Re_{\text{bulk}} = \frac{u_{\text{bulk}} h}{\nu_{\text{bulk}}} = 7280, \tag{4.47}$$

avec u_{bulk} la vitesse moyenne dans le canal et ν_{bulk} la viscosité cinématique moyenne dans le canal. Dans ce cas spécifique, le lien entre Re_τ et Re_{bulk} est obtenu par l'intermédiaire du coefficient de frottement C_f à la paroi qui est estimé à partir de la formule de Karman-Nikuradse [31],

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 1.737 \ln\left(Re_{\text{bulk}}\sqrt{C_f}\right) - 0.396. \tag{4.48}$$

En effet, sachant que la contrainte de cisaillement à la paroi τ_{wall} est [279],

$$\tau_{\text{wall}} = \frac{1}{2} C_f \rho_{\text{bulk}} u_{\text{bulk}}, \tag{4.49}$$

avec ρ_{bulk} la masse volumique moyenne dans le canal, la vitesse de frottement est calculée comme,

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{wall}}}{\rho_{\text{wall}}}}, \tag{4.50}$$

avec ρ_{wall} la masse volumique au niveau de la paroi.

Toutes ces relations mettent en lumière le lien entre le débit et la perte de pression dans le canal. Pour une simulation périodique, il est donc nécessaire d'imposer un terme source à ajouter à l'équation de quantité de mouvement selon x pour maintenir le Re_{bulk} souhaité. Ce dernier prend la forme suivante pour un canal de section $L_y \times L_z$ sur une longueur L_x,

$$S_{\text{qdm,x}} = \tau_{\text{wall}} \frac{2L_xL_z}{L_xL_yL_z}. \tag{4.51}$$

À noter que dans le cas présenté, $L_y = 2h$. Le temps diffusif t_{diff} de ce problème est estimé par,

$$t_{\text{diff}} = \frac{h}{u_\tau}. \tag{4.52}$$

Ce temps t_{diff} permet entre autres de déterminer le temps de simulation requis pour obtenir une bonne convergence des grandeurs moyennes dans le calcul. À titre d'information, pour toutes les quantités exploitées par la suite sur ce cas test, le temps de moyenne est fixé à $50t_{\text{diff}}$ [2].

Maillage et décomposition du domaine

Pour le cas test discuté, le maillage utilisé est adapté à une simulation LES résolue en paroi, avec un raffinement uniforme selon les directions x et z. Le long de la direction y (direction orthogonale aux parois), une loi d'évolution de la taille de maille de type tangente hyperbolique est imposée. La direction de l'écoulement moyen est parallèle à l'axe x et il est généré par un terme source appliqué sous la forme d'un gradient de pression dans la direction de l'écoulement et directement ajouté aux équations de Navier-Stokes. Des conditions de périodicité sont imposées dans les directions x et z et une paroi non glissante est utilisée pour les parois supérieure et inférieure. Les caractéristiques de la simulation et du maillage sont résumées dans la Table 4.2. Le domaine de calcul avec les conditions limites associées à chaque côté sont visibles sur la Fig. 4.34.

Volume du domaine (L_x, L_y, L_z)	$2\pi h \times 2h \times \pi h$
Volume du domaine en grandeurs paroi (L_x^+, L_y^+, L_z^+)	$2482 \times 790 \times 1241$
Nombre de points (N_x, N_y, N_z)	$252 \times 175 \times 252$
Résolution spatiale $(\Delta x^+, \Delta z^+)$	$9.89, 4.94$
Résolution spatiale $(\Delta y^+_{\text{wall}}, \Delta y^+_{\text{center}})$	$0.98, 6.43$

Table 4.2: Caractéristiques du maillage.

Pour cette configuration, le découpage en sous-domaines est justifié par un constat simple : pour atteindre un y^+ compatible avec une simulation résolue en paroi, une loi de raffinement en tangente hyperbolique dans la direction y est utilisée. Ainsi, les mailles les plus petites sont localisées dans la région proche paroi, et les mailles grossissent progressivement en s'éloignant des parois et en se rapprochant du centre du canal. Dans ce type de configuration avec une méthode de pas de temps local, l'idée est logiquement d'isoler la partie centrale du canal des deux régions proche paroi. Cela permet d'utiliser un pas de temps plus grand pour la partie centrale puisque les mailles sont plus grosses. Grâce à cette décomposition, les plus petites mailles seront donc

uniquement contenues dans le sous-domaine composé des deux régions proche paroi. L'utilisation de ce découpage est confirmée par la Fig. 4.36 qui montre une coupe du pas de temps local dans le plan (xy) pour la simulation de référence avec un domaine unique (le pas de temps 1.3×10^{-8} s correspond à un CFL $= 0.7$). Cela met en évidence un pas de temps quatre fois plus grand dans le centre du domaine par rapport aux côtés, *i.e.* $N_{dt} = 4$ avec la nomenclature utilisée jusqu'à présent.

À la suite de cette observation, pour le cas LTS, deux domaines sont donc créés avec la logique détaillée ci-dessus, comme représenté en Fig. 4.35. De la même manière que pour les cas tests précédents, une région de superposition entre les sous-domaines est nécessaire pour les coupler entre eux. Étant donné que le schéma LW est utilisé ici, deux nœuds dans la région d'interface sont suffisants, *i.e.* $N_{\text{overlap}} = 1$ avec la notation précédente, pour conserver les propriétés du schéma numérique. Une fois la décomposition réalisée, il est maintenant possible de définir deux pas de temps différents pour les deux sous-domaines dans le cas LTS. Les pas de temps correspondant à chaque cas sont rappelés dans la Table 4.3.

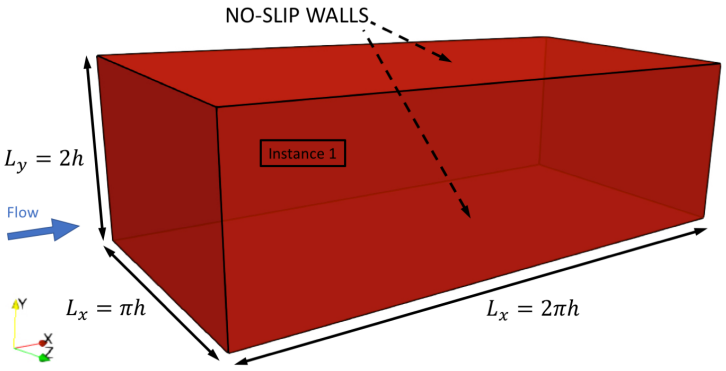


Figure 4.34: Domaine unique du cas de référence.

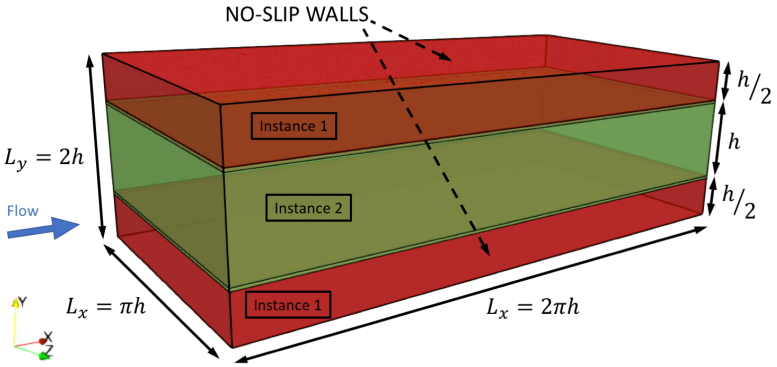


Figure 4.35: Deux sous-domaines avec une région de superposition pour le cas LTS.

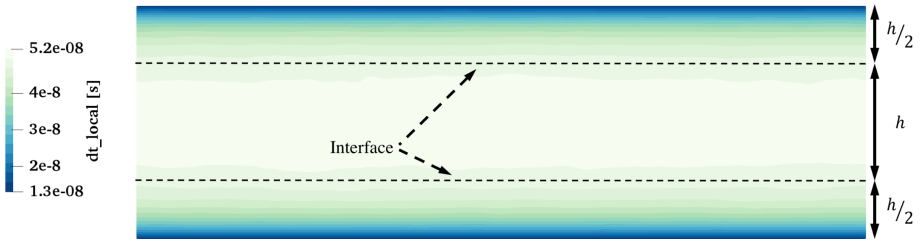


Figure 4.36: Pas de temps local instantané dans le plan xy pour le cas de référence.

Cases	Center	Sides
Reference	1.3×10^{-8} s	
LTS	5.2×10^{-8} s	1.3×10^{-8} s

Table 4.3: Pas de temps utilisés pour chaque domaine pour les cas de référence et LTS.

Avec la répartition de cellules présentée dans la Table 4.4 et le paramètre $N_{dt} = 4$ correspondant au ratio de pas de temps, le *speedup* théorique de la méthode LTS est,

$$S_p = \frac{11.1 \text{ M}}{8.13 \text{ M} + 3.37 \text{ M}/N_{dt}} = 1.237. \tag{4.53}$$

En pratique, le *speedup* mesuré est de $S_p = 1.214$.

Référence		11.1 M
MISCOG	Régions proche paroi	8.13 M
	Partie centrale	3.37 M

Table 4.4: Nombre de mailles pour les cas de référence et LTS.

Résultats

En termes de prédiction de l'écoulement dans le canal, les figures qui suivent présentent les résultats obtenus pour les cas de référence et LTS. Ces résultats sont également comparés avec la DNS d'Iwamoto comme mentionné dans l'introduction de ce cas de validation [137]. Le profil de vitesse moyenne de la Fig. 4.37 montre un accord excellent entre la DNS et les deux LES résolues en paroi (*Wall-Resolved LES* ou WRLES). De manière plus importante, les résultats des deux WRLES (référence et LTS) sont parfaitement superposés, ce qui signifie que la méthode de pas de temps local n'introduit pas d'erreur supplémentaire sur la vitesse moyenne dans ce cas.

Les valeurs de fluctuations de vitesse et de contraintes de cisaillement de Reynolds dans la région proche paroi sont également très satisfaisantes (Figs. 4.38 et 4.39). La contribution des différentes composantes des contraintes de cisaillement est aussi présentée en Fig. 4.40. Les courbes de τ_{total} sont en accord avec la pente théorique, ce qui confirme les propriétés de conservativité pour les deux approches (standard et avec pas de temps local). Enfin, à noter qu'à la position de l'interface, mise en évidence par la ligne noire pointillée sur la Fig. 4.40, aucune différence n'est observée entre les deux WRLES, ce qui montre une fois supplémentaire que la méthode de pas de temps local ne semble pas affecter les résultats.

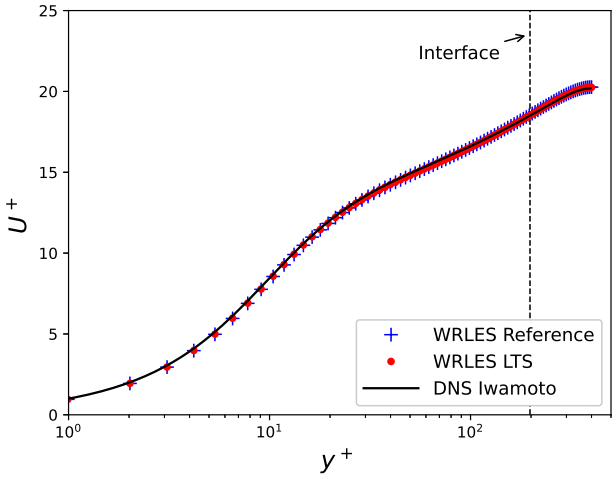


Figure 4.37: Profil de vitesse moyenne (grandeurs adimensionnées).

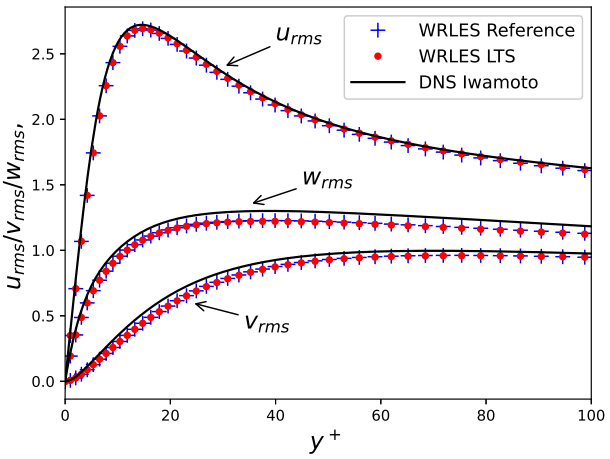


Figure 4.38: Profil de fluctuations de vitesse RMS (grandeurs adimensionnées).

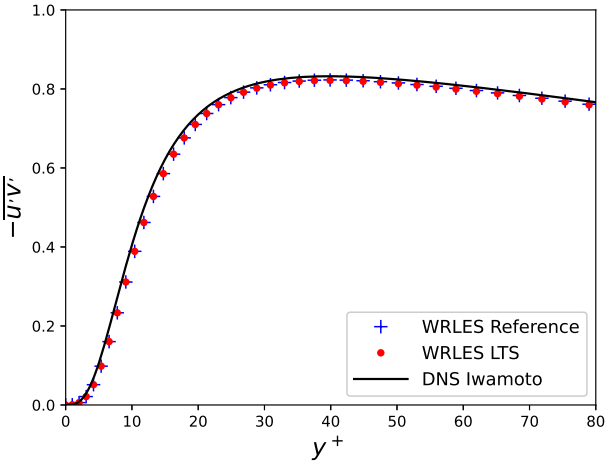


Figure 4.39: Contrainte de cisaillement de Reynolds (grandeurs adimensionnées).

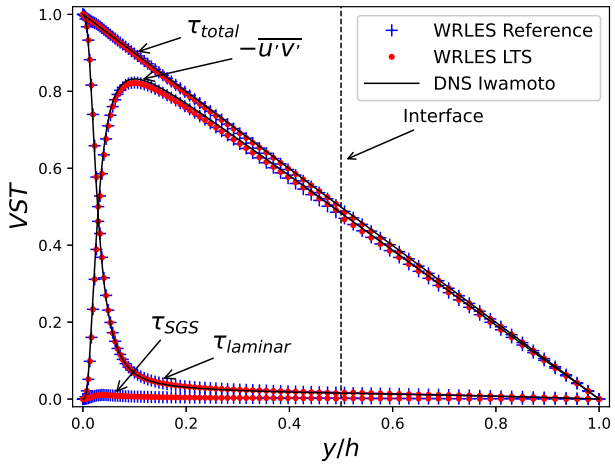


Figure 4.40: Distribution des contraintes de cisaillement (grandeurs classiques).

4.5.2 Turbine LS89

La prédiction des écoulements turbulents en proche paroi est un des problèmes les plus fondamentaux dans de nombreuses applications industrielles. Dans le contexte particulier d'écoulements au sein d'une turbomachine, la LES a démontré ses capacités en termes de prédictivité [269, 270]. Cependant, le coût de calcul peut être prohibitif dans un cadre industriel. C'est pour cette raison que la littérature reste assez peu fournie sur ce type de problématique. Une illustration typique de ce problème de prédiction de la turbulence en proche paroi est la cascade LS89 [19]. À ce jour, elle constitue une base de données précieuse, en donnant accès à des cas de validation d'écoulements dans une turbomachine avec mesure de transfert thermique [19]. La cascade de pales de turbine LS89 a été testée au sein de l'infrastructure expérimentale de l'Institut von Karman et est composée d'un ensemble de pales fortement chargées, transsoniques, agencées dans une configuration linéaire. La géométrie de la pale a été spécifiquement dessinée pour cette expérience et se compose d'un profil 2D extrudé (Table 4.5 et Fig. 4.41). Les points de fonctionnement de l'expérience sont comparables aux valeurs rencontrées dans les turbomachines actuelles, ce qui rend la base de données encore plus intéressante. Pour l'ensemble de ces raisons, la cascade LS89 a été étudiée numériquement grâce à la LES de nombreuses fois par le passé par plusieurs auteurs [33, 116, 289, 58, 95]. Pour cette étude, les points de fonctionnement MUR129 et MUR235 ont été sélectionnés et leurs détails respectifs sont fournis dans la Table 4.6. À noter que les variations de nombre de Reynolds, de nombre de Mach et d'intensité turbulente en entrée entrainent des différences importantes sur la topologie de l'écoulement dans la cascade, en particulier sur la transition ou l'apparition de choc.

c	67.674 mm
c_{ax}	38.81 mm
g/c	0.85
γ	55.0°
o / g	0.2597
$r_{LE/c}$	0.061
$r_{TE/c}$	0.0105

Table 4.5: Paramètres géométriques de la pale LS89.

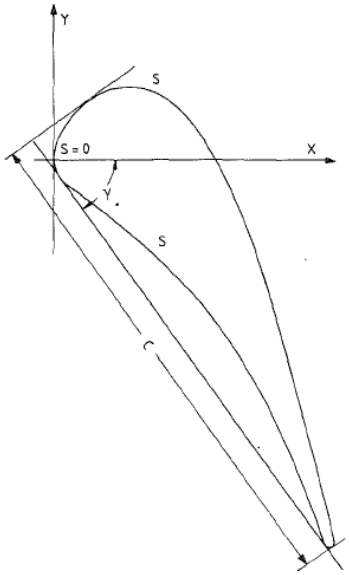


Figure 4.41: Visualisation du profil de la pale LS89.

	MUR129	MUR235
T_{t1} (K)	409.20	413.30
P_{t1} (bar)	1.849	1.828
P_1 (bar)	1.820	1.800
P_2 (bar)	1.165	1.049
P_2/P_{t1} (-)	0.63	0.57
T_w (K)	297.75	301.15
Intensité turbulente en entrée (%)	0.8	6.0
Nombre de Mach en entrée (-)	0.150	0.150
Nombre de Mach en sortie (-)	0.840	0.927
Nombre de Reynolds en entrée (-)	2.7098×10^5	2.6471×10^5
Nombre de Reynolds en sortie (-)	1.1352×10^6	1.1521×10^6

Table 4.6: Détails des deux points de fonctionnement.

Une visualisation du domaine de calcul utilisé pour la LES résolue en paroi de la configuration LS89 est donnée en Fig. 4.42. Le plan d'entrée est positionné 0.8 corde en amont du bord d'attaque de la pale. Le plan de sortie est situé 0.9 corde en aval du bord de fuite de la pale. Ces distances sont jugées suffisantes pour que le sillage de la pale se développe sans interaction avec la condition limite et pour que les ondes acoustiques puissent quitter le domaine sans réflexion et sans perturber l'écoulement autour de la géométrie. Les parois de la pale sont définies comme des surfaces isothermes. D'autre part, des conditions de périodicité sont imposées dans les directions y et z. À noter que l'impact de la taille du domaine dans la direction z a déjà été étudié dans [245] et a montré qu'une hauteur de 0.15 corde était suffisante pour retrouver un profil de coefficient de transfert de chaleur correct. Enfin, comme les mesures expérimentales auxquelles la LES sera comparée ont été effectuées au niveau de la partie centrale de la pale, la condition de périodicité dans la direction z semble justifiée.

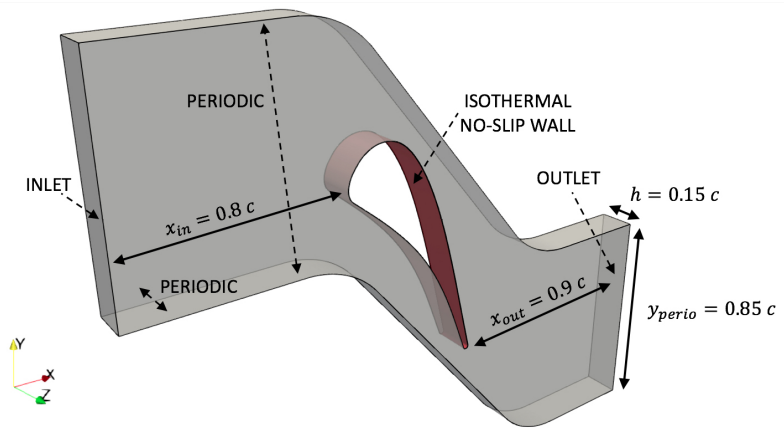


Figure 4.42: Domaine de calcul pour la configuration LS89.

Au niveau des conditions limites, les valeurs détaillées dans la Table 4.6 sont utilisées et sont imposées de façon différente :

- Au plan d'entrée, la pression et la température totales sont imposées grâce à une condition limite non réfléchissante (NSCBC) [208, 197] avec injection de turbulence synthétique générée à partir d'un spectre de Passot-Pouquet [204] pour le cas MUR235.
- Au plan de sortie, la pression statique est imposée de nouveau grâce à une condition NSCBC [118].
- La surface de la pale est définie comme une paroi isotherme avec une condition de non glissement.

Le schéma numérique TTG4A est utilisé pour garantir des propriétés de dissipation et de dispersion assez basses, en accord avec des applications LES haute fidélité. La viscosité de sous-maille est évaluée grâce au modèle σ [196], en accord avec les exigences de la LES résolue en paroi.

Pour les deux points de fonctionnement, la procédure est identique pour appliquer la méthode de pas de temps local. Pour le cas LTS, le domaine initial présenté en Fig. 4.42 est décomposé manuellement en deux parties, qui auront chacune un pas de temps différent, contraint par la condition CFL locale. La première partie contient la région proche paroi, alors que la seconde est composée du reste du domaine, comme il est visible sur la Fig. 4.44. Comme les cas précédents, la méthode requiert la présence d'une zone de superposition pour permettre l'échange entre les sous-domaines. Cette zone de superposition est mise en évidence en rouge sur la figure précédente. Dans le cas LTS, cette zone est donc dupliquée pour permettre la superposition. À noter que la région de superposition n'est pas remaillée séparément dans les deux sous-domaines. Elle est dupliquée, donc strictement identique. Ainsi, de la même manière que pour le canal turbulent, les nœuds de la zone d'échange sont parfaitement coïncidents et il n'est pas nécessaire d'interpoler les grandeurs conservatives pour les échanger entre les domaines. Comme déjà mentionné, dans cette étude, une LES résolue en paroi est visée. Par conséquent, un très grand nombre de cellules est requis dans la région proche paroi pour obtenir une valeur de y^+ compatible avec une WRLES. Cette caractéristique motive le choix d'appliquer une méthode de pas de temps local sur cette configuration et la décomposition en sous-domaines qui a été choisie.

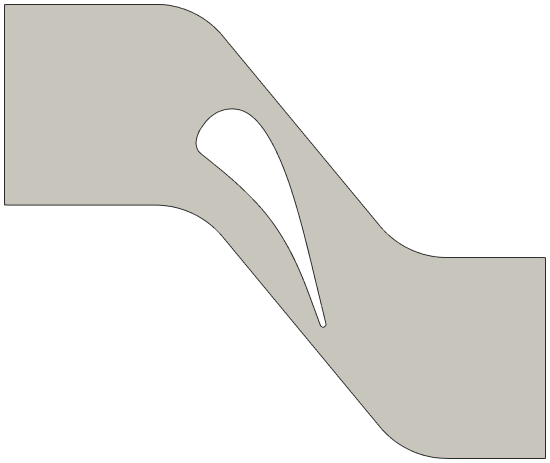
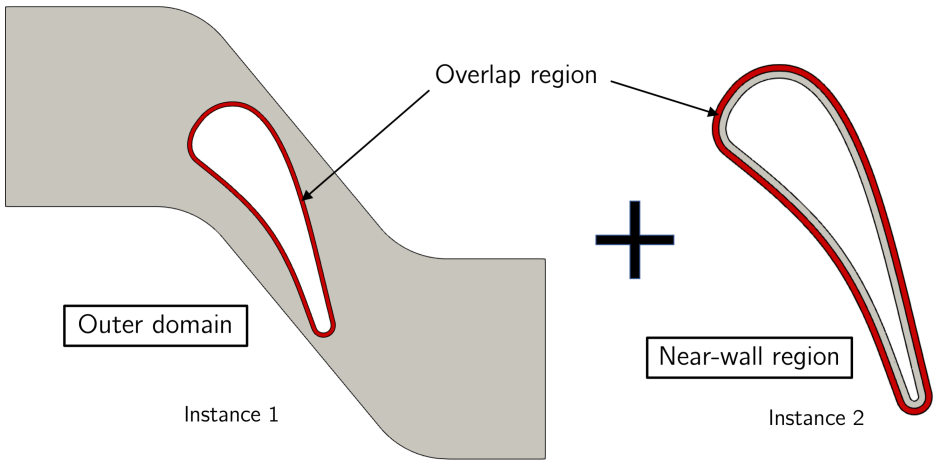
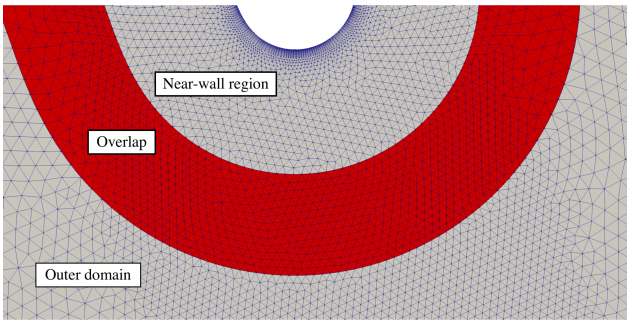


Figure 4.43: Domaine de la simulation de référence.



(a) Deux sous-domaines de la simulation LTS.



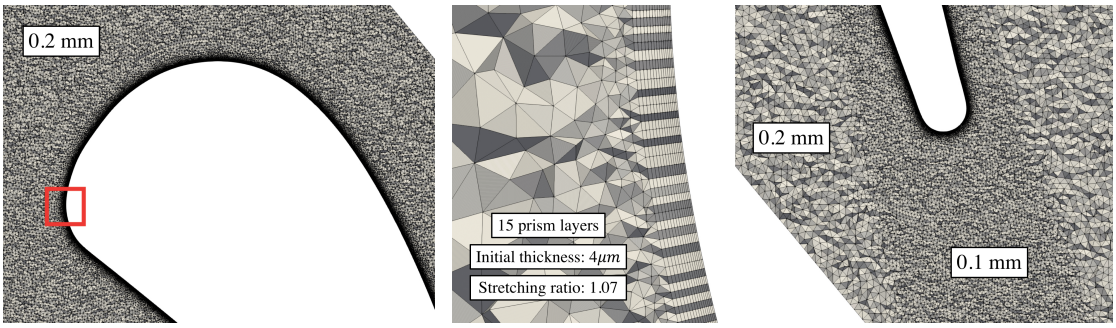
(b) Zoom sur la région de superposition dans le sillage de la pale.

Figure 4.44: Domaine de la simulation LTS.

Application de la méthode LTS à MUR129

Cette première section s'intéresse au point de fonctionnement MUR129. Les détails de ce point de fonctionnement sont donnés dans la Table 4.6. Pour une simulation LES, le cas MUR129 est le plus accessible puisqu'il n'y a pas de turbulence en entrée et l'écoulement reste subsonique dans l'ensemble du domaine.

Le maillage utilisé est hybride et est composé de tétraèdres dans l'ensemble du domaine, à l'exception de la surface de la pale qui est maillée avec 15 niveaux de prismes. Ces caractéristiques du maillage sont visibles sur la Fig. 4.45b. À cause de la présence de prismes autour de la surface de pale, la condition de stabilité CFL restreint le pas de temps à une valeur très faible, rendant cette configuration attractive pour appliquer une méthode de pas de temps local. Par ailleurs, le maillage est aussi raffiné autour du bord d'attaque de la pale et dans la région du sillage pour prédire avec précision les vortex générés en aval (Fig. 4.45c).



(a) Bord d'attaque de la pale.

(b) Zoom sur la région proche paroi au niveau du carré rouge de la Fig. 4.45a.

(c) Bord de fuite et sillage de la pale.

Figure 4.45: Aperçu du maillage avec les tailles de mailles ciblées pour le cas MUR129.

Pour mettre en évidence les bénéfices potentiels d'une méthode LTS sur cette configuration, un contour de pas de temps local dans le sillage de la pale est présenté en Fig. 4.46. Cette prédiction est obtenue à partir de la simulation de référence, *i.e.* sans décomposition en plusieurs domaines et à titre indicatif, la position de la région de superposition utilisée dans la simulation LTS est ajoutée à la Fig. 4.46. Pour le cas LTS, il est clair que dans le premier domaine contenant seulement la région proche paroi, le pas de temps est contraint par les prismes de petites tailles autour de la surface de la pale. Cela conduit à un pas de temps minimum de 7.0×10^{-9} s.

En dehors de la région proche paroi, le volume des cellules est beaucoup plus important et par conséquent, le pas de temps minimum dans le reste du domaine se situe autour de 4.0×10^{-8} s, *i.e.* plus de 5 fois plus grand que dans la région proche paroi. Un ratio entre les deux pas de temps égal à 5 peut donc être utilisé ($N_{dt} = 5$ avec la notation introduite précédemment). Cela donne donc un $\Delta t_{\text{small}} = 7.0 \times 10^{-9}$ s pour la région proche paroi et un $\Delta t_{\text{large}} = 3.5 \times 10^{-8}$ s pour le reste du domaine (Table 4.7). Comme le cas de référence n'est composé que d'un seul domaine, contraint par la présence des prismes, le plus petit pas de temps $\Delta t_{\text{small}} = 7.0 \times 10^{-9}$ s doit être utilisé.

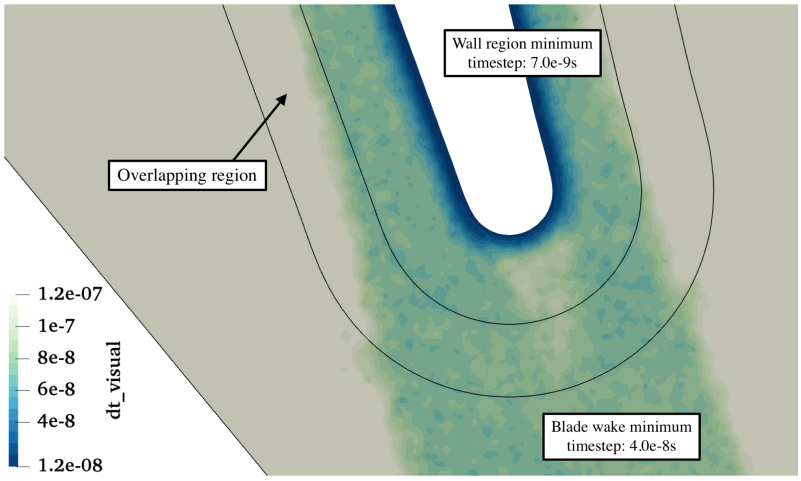


Figure 4.46: Pas de temps local instantané dans la région de sillage de la pale pour le cas MUR129.

Cas			Pas de temps [s]
Référence		Δt_{small}	7.0×10^{-9}
LTS	Domaine hors proche paroi	Δt_{large}	3.5×10^{-8}
	Région proche paroi	Δt_{small}	7.0×10^{-9}

Table 4.7: Pas de temps pour les simulations de référence et LTS du cas MUR129.

Le nombre de mailles et le type d'éléments de chaque région pour les deux cas, celui de référence et LTS, sont donnés dans la Table 4.8. Dans le cas LTS, à cause de la duplication de la zone d'interface pour créer la région de superposition, le total contient 2 millions de cellules supplémentaires par rapport à la référence. Dans cette configuration, pour atteindre une valeur de y^+ compatible avec une LES résolue en paroi tout en gardant un taux d'étirement (*stretching ratio*) suffisamment bas, un nombre relativement important de prismes est nécessaire. Avec ce maillage, le y^+ moyen sur l'ensemble de la pale est approximativement égal à 2.5 (Fig. 4.47) avec des valeurs correspondantes de $x^+ = z^+ = 5y^+$. Ces propriétés confirment que la maillage est satisfaisant pour réaliser une simulation résolue en paroi [147].

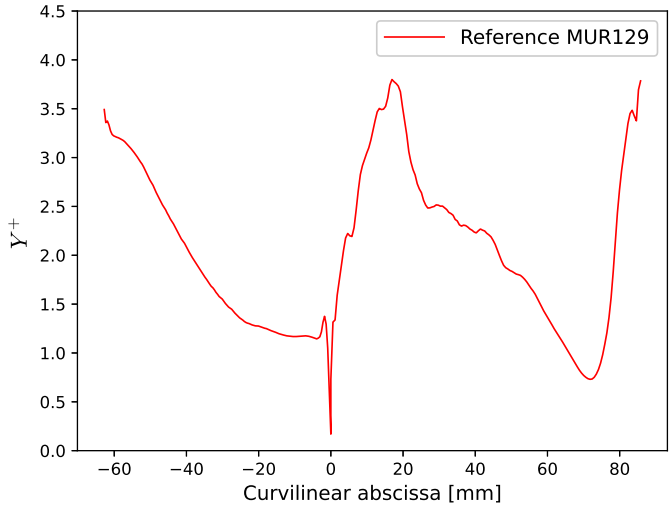


Figure 4.47: Évolution de y^+ le long de l'abscisse curviligne (MUR129).

Référence		tétraèdre	123.2M	210.8M
		prisme (15 niveaux)	87.6M	
LTS	Domaine hors région proche paroi + interface	tétraèdre	69.6M	212.8M
	Interface + région proche paroi	tétraèdre	55.6M	
		prisme (15 niveaux)	87.6M	

Table 4.8: Nombre de cellules des cas de référence et LTS pour le point de fonctionnement MUR129.

À partir du nombre de mailles de la Table 4.8 et du ratio de pas de temps fixé à $N_{dt} = 5$ pour ce cas d'application, il est facile d'estimer le gain théorique en temps de calcul grâce à l'Eq.(4.5),

$$S_p = \frac{Load_{\text{Ref}}}{Load_{\text{LTS}}} = 1.342. \tag{4.54}$$

En pratique, le gain obtenu est de $S_p = 1.327$, ce qui est très proche de la valeur attendue. Cela prouve la capacité de la méthode MISCOG à coupler efficacement plusieurs sous-domaines tout en limitant le coût additionnel introduit par l'échange entre les sous-domaines et par la procédure d'interpolation.

Pour valider les résultats des deux simulations qui vont suivre (référence et LTS), un temps caractéristique ainsi qu'une grandeur physique à analyser doivent être déterminés pour confirmer la convergence du calcul. Dans ce type de configuration, le temps caractéristique $t_c = c/u_0$ est souvent utilisé, avec c la corde de la pale et u_0 la vitesse axiale moyenne au plan d'entrée. Pour la grandeur physique, c'est le coefficient de transfert de chaleur qui est retenu puisque cette grandeur est disponible dans la base de données expérimentale pour ce point de fonctionnement. La thèse de Segui [245] a montré que pour cette configuration, un temps de convergence de $0.5t_c$ donne un bon compromis entre convergence du coefficient de transfert de chaleur et coût de calcul. C'est donc cette valeur qui sera choisie pour fixer le temps de moyenne des calculs qui vont suivre. À noter que puisque la pale est construite comme un profil 2D extrudé, les grandeurs de l'écoulement seront aussi moyennées dans la direction d'extrusion pour améliorer la convergence.

La seule grandeur expérimentale disponible pour le point de fonctionnement MUR129 est le coefficient de transfert de chaleur [19], qui s'exprime comme,

$$h = \frac{q_n}{T_{t1} - T_w}, \tag{4.55}$$

avec q_n le flux de chaleur en paroi, T_{t1} le température totale en entrée et T_w la température de la paroi. La comparaison entre l'expérience, les cas de référence et LTS le long de l'abscisse curviligne de la pale est présentée en Fig. 4.48. Le bord d'attaque correspond à $s = 0$, une valeur de $s > 0$ à l'extrados et une valeur de $s < 0$ à l'intrados. Il est clair que les deux simulations ont un accord excellent avec les données expérimentales. Sur l'ensemble de la pale, le coefficient de transfert de chaleur moyen est légèrement sous-estimé par les deux simulations et le pic au niveau du bord d'attaque est environ 5 % plus faible que l'expérience. D'autre part, la position de la transition turbulente à l'extrados située à $s = 80$ mm est très bien capturée par les deux simulations. Enfin, en ce qui concerne la comparaison entre les cas de référence et LTS, la superposition entre les deux courbes est quasiment parfaite, confirmant la capacité de la méthode LTS à réduire le temps de calcul sur ce type de simulation sans dégradation des résultats.

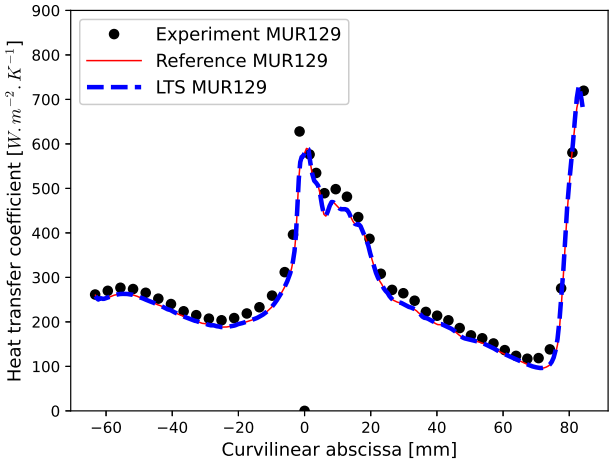
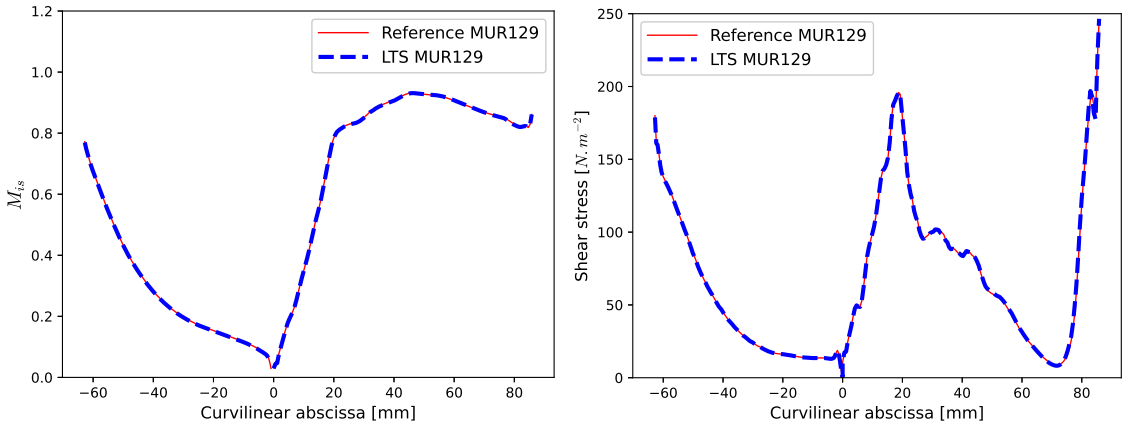


Figure 4.48: Coefficient de transfert de chaleur moyen pour le cas MUR129. Comparaison entre l'expérience et les simulations de référence et LTS.

Pour poursuivre la comparaison entre les simulations de référence et LTS, les profils de nombre de Mach isentropique et de contrainte de cisaillement en paroi sont présentés en Fig. 4.49. L'expression du nombre de Mach isentropique est donnée par la formule,

$$M_{is} = \sqrt{\left(\left(\frac{P_{t,0}^{\text{frestream}}}{P_{\text{wall}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)\frac{2}{\gamma-1}}, \tag{4.56}$$

avec $P_{t,0}^{\text{frestream}}$ la pression totale loin de la pale (choisie ici égale à la pression totale au plan d'entrée), P_{wall} la pression statique locale en paroi et γ le rapport de chaleur massique. Le profil de Mach isentropique met en évidence une accélération rapide de l'écoulement du côté extrados, caractéristique des géométries de ce type. Après le passage du col aux alentours de $s = 20$ mm, la vitesse de l'écoulement reste stable. Pour la contrainte de cisaillement, une certaine ressemblance avec le profil de coefficient de transfert de chaleur est à remarquer. Il est logique d'observer par exemple une forte augmentation de la contrainte de cisaillement au niveau de la transition laminaire-turbulent, qui entraine aussi une augmentation des échanges thermiques. Comme pour le coefficient de transfert de chaleur, les profils des deux simulations sont parfaitement superposés, ce qui montre que malgré l'utilisation de la méthode de pas de temps local, les grandeurs moyennes sont conservées.



(a) Mach isentropique M_{is}.

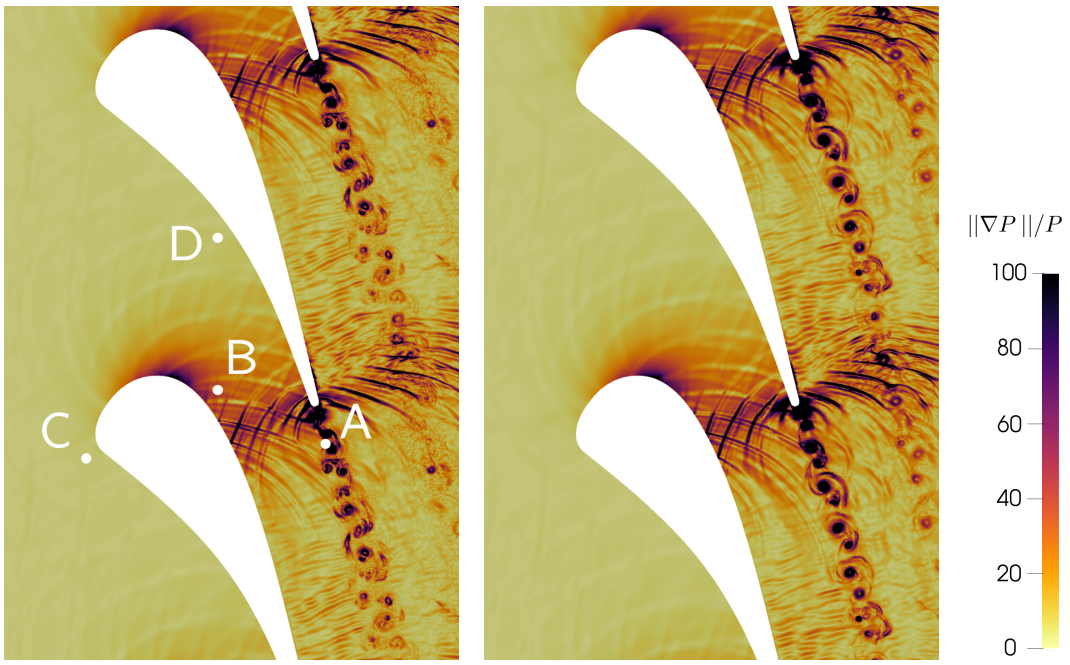
(b) Contrainte de cisaillement.

Figure 4.49: Mach isentropique et contrainte de cisaillement moyens pour le cas MUR129.

Pour fournir une meilleure compréhension de la topologie de l'écoulement à la traversée de la turbine, la Fig. 4.50 présente un contour instantané de $|\nabla P|/P$ pour les deux simulations de référence et LTS. Pour faciliter la visualisation, le domaine est dupliqué dans la direction y de manière à afficher plusieurs pales. Des structures cohérentes dans le sillage de la pale, générées par le décollement tourbillonnaire au niveau du bord de fuite, sont clairement visibles. Ce décollement est une source importante de bruit acoustique comme l'illustre le contour de $|\nabla P|/P$. Les ondes acoustiques générées par le décollement tourbillonnaire impactent directement l'extrados de la pale inférieure et interagissent avec le sillage de la pale supérieure.

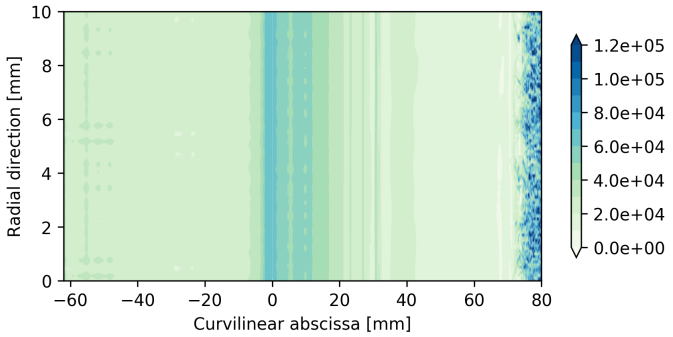
Au niveau de l'extrados, malgré la perturbation induite par les ondes acoustiques, la couche limite reste attachée et aucune transition turbulente n'est observée. Par ailleurs, au niveau de l'intersection entre les ondes acoustiques et les vortex du sillage, les tourbillons sont fortement atténués, perdent en cohérence et disparaissent quasiment peu après la rencontre. Cet effet est aussi accentué par la modification du raffinement du maillage dans cette région. Enfin, en termes de comparaison entre les deux cas, l'accord est très bon. Les ondes acoustiques du sillage des deux simulations semblent d'intensité comparable. À noter encore une fois que des champs instantanés sont comparés en Fig. 4.50. Il est donc normal de ne pas retrouver des structures parfaitement identiques entre les deux cas. Dans l'ensemble, la topologie de l'écoulement est toutefois la même.

Comme pour la figure précédente, la seconde partie de cette section consiste à analyser et à comparer des champs instantanés et instationnaires. Dans ce but, la Fig. 4.51 montre une distribution instantanée de flux de chaleur sur l'ensemble de la surface de pale dépliée pour les deux cas. Puisque pour le point de fonctionnement MUR129, la couche limite reste laminaire le long de l'intrados et de l'extrados, le flux de chaleur instantané est uniforme dans la direction transversale des deux côtés. Le seul phénomène notable est la présence de lignes entre 30 et 35 mm causées par l'interaction entre la couche limite et les ondes acoustiques générées par le sillage de la pale voisine [58]. Une activité turbulente importante apparaît seulement au bord de fuite, à l'endroit où le flux de chaleur instantané devient non uniforme vers $s \sim 75$ mm. Pour les deux simulations, les niveaux de flux de chaleur et la position des phénomènes mentionnés sont identiques.

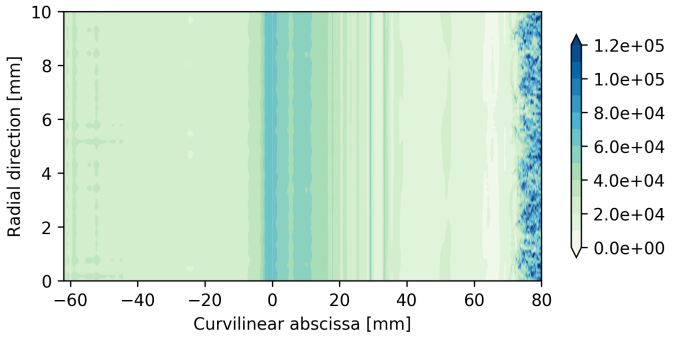


(a) Référence. (b) LTS.

Figure 4.50: Contour instantané de $|\nabla P|/P$ pour le cas MUR129.



(a) Référence.



(b) LTS.

Figure 4.51: Flux de chaleur instantané à la surface de la pale pour le cas MUR129.

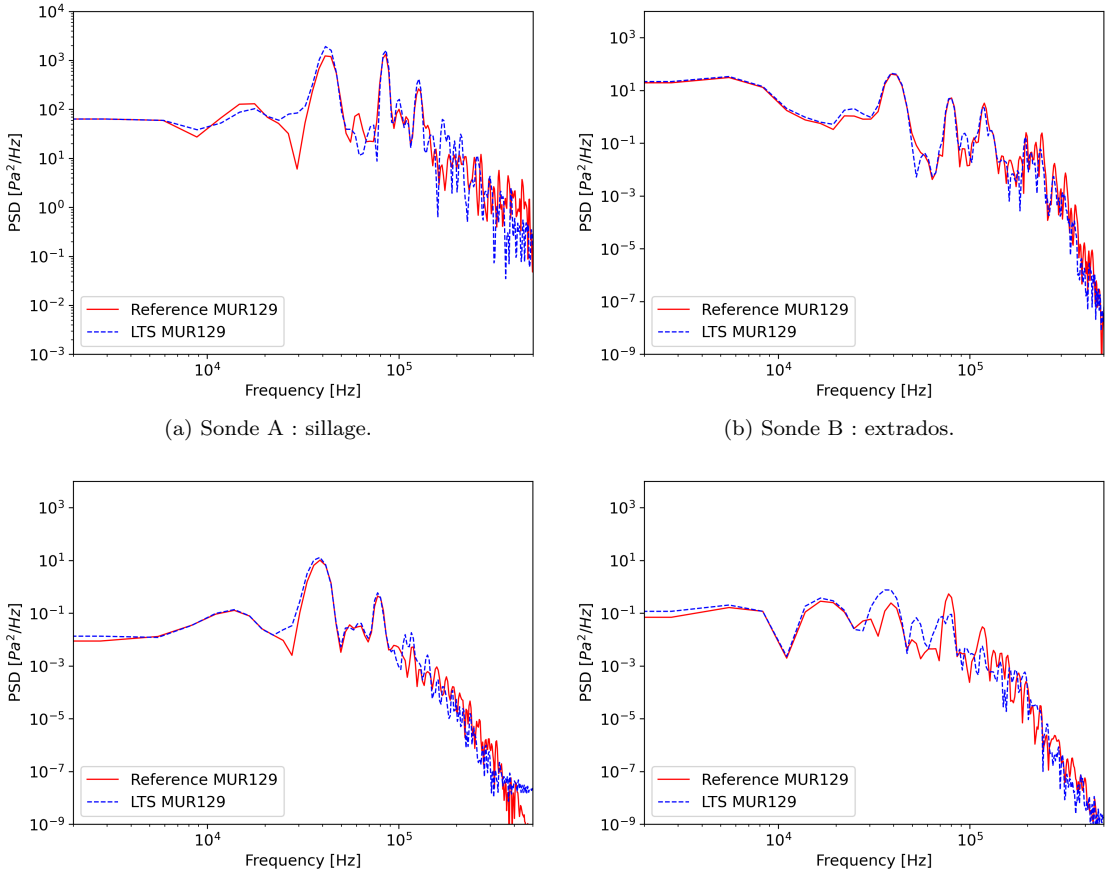
Enfin, des résultats plus quantitatifs sont apportés en Fig. 4.52 qui présente des densités spectrales de puissance du signal de pression des sondes indiquées sur la Fig. 4.50a. Pour la sonde A, située dans le sillage de la pale, une fréquence principale autour de 40 000 Hz domine avec plusieurs de ses premières harmoniques (Fig. 4.52a). Les ondes acoustiques générées à cette fréquence sont directement associées aux vortex du bord de fuite de la pale. Pour se convaincre que la fréquence à 40 000 Hz correspond en effet au phénomène de décollement tourbillonnaire du sillage, le nombre de Strouhal attribué à cette fréquence est évalué. Celui-ci s'exprime comme,

$$St = \frac{fL}{U}, \tag{4.57}$$

avec f la fréquence du décollement tourbillonnaire, L le diamètre du bord de fuite et U la vitesse moyenne de l'écoulement dans le sillage. La littérature indique que pour une valeur du nombre de Reynolds $Re \sim 1.1 \times 10^6$, le nombre de Strouhal doit être compris entre 0.2 et 0.22 pour un cylindre [11]. À partir des données de la simulation, le nombre de Strouhal est estimé autour de $St \sim 0.202$. Ce calcul confirme que l'activité acoustique observée à cette fréquence est bien générée par le décollement tourbillonnaire du bord de fuite.

En observant la densité spectrale de puissance de la sonde B située au niveau de l'extrados, la même fréquence avec ses harmoniques est aussi visible (Fig. 4.52b). Cela n'a rien d'étonnant puisque la Fig. 4.50 met clairement en évidence la présence des ondes acoustiques du sillage de la pale supérieure à la position de la sonde B. De même, au bord d'attaque, pour la sonde C, le contenu fréquentiel est très similaire (Fig. 4.52c). Les ondes acoustiques du sillage sont suffisamment intenses pour être visibles jusqu'au bord d'attaque de la pale. Les signaux des trois sondes précédentes est donc fortement corrélés. Enfin, pour la dernière sonde D, placée à l'intrados, le spectre est plus différent (Fig. 4.52d). Les fréquences du lâché tourbillonnaire sont toujours visibles mais moins marquées que sur les trois autres sondes.

De façon générale, les spectres obtenus aux différentes positions semblent plutôt logiques et plus intéressant encore, la simulation LTS reproduit avec précision la dynamique de la simulation de référence. Les données instationnaires sont très comparables entre les deux simulations, confirmant le bon comportement de l'approche LTS et le gain CPU.



(a) Sonde A : sillage.

(b) Sonde B : extrados.

(c) Sonde C : bord d'attaque.

(d) Sonde D : intrados.

Figure 4.52: Comparaison de la densité spectrale de puissance du signal de pression de différentes sondes pour le cas MUR129.

Application de la méthode LTS à MUR235

Pour la simulation LTS du point de fonctionnement MUR235, la même approche que celle décrite pour définir les pas de temps des deux sous-domaines du cas MUR129 est utilisée. La Figure 4.53 montre que le pas de temps local dans le sillage de la pale et les valeurs obtenues sont différentes par rapport à MUR129 puisque le maillage est plus raffiné. Ce raffinement accru est lié au point de fonctionnement qui est plus complexe à capturer en termes de dynamique pariétale. Le pas de temps de la région proche paroi est ici égal à 4.3×10^{-9} s, alors qu'il est de 2.8×10^{-8} s dans le sillage, hors région proche paroi. Par conséquent, le ratio de pas de temps $N_{dt} = 6$ est applicable, ce qui donne un $\Delta t_{\text{small}} = 4.3 \times 10^{-9}$ s et $\Delta t_{\text{large}} = N_{dt} \cdot \Delta t_{\text{small}} = 2.58 \times 10^{-8}$ s. Les pas de temps des différents domaines sont rappelés dans la Table 4.9.

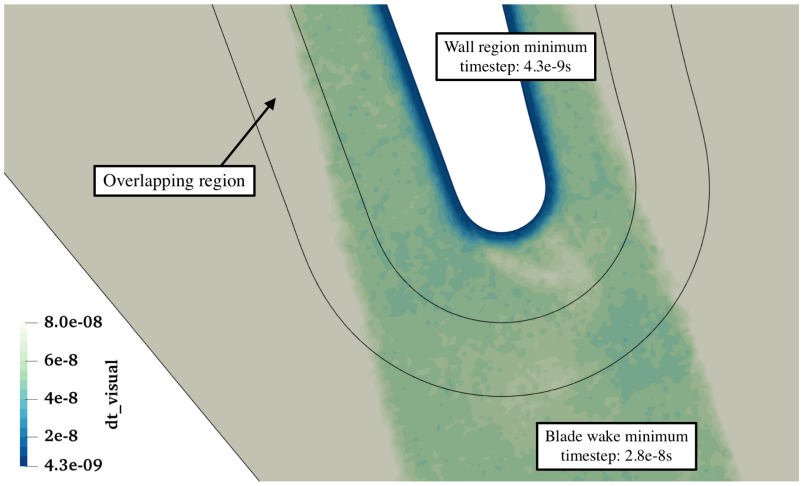
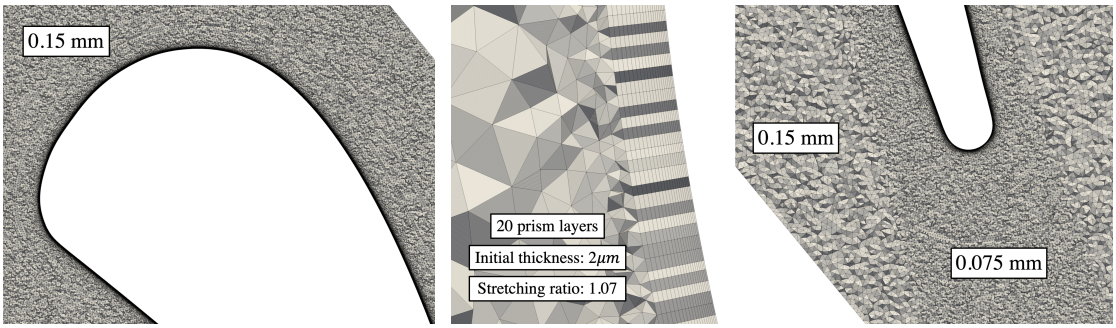


Figure 4.53: Pas de temps local instantané dans la région de sillage de la pale pour le cas MUR235.

Cas			Pas de temps [s]
Référence		Δt_{small}	4.3×10^{-9}
LTS	Domaine hors proche paroi	Δt_{large}	2.58×10^{-8}
	Région proche paroi	Δt_{small}	4.3×10^{-9}

Table 4.9: Pas de temps pour les simulations de référence et LTS du cas MUR235.

Un aperçu du maillage pour le cas MUR235 est donné en Fig. 4.54 et la Table 4.10 détaille la répartition en termes de nombre de mailles pour les simulations de référence et LTS. Comme pour le point de fonctionnement MUR129, le maillage utilisé est hybride, composé de tétraèdres dans la majeure partie du domaine et avec plusieurs niveaux de prismes pour la partie en contact avec la surface de la pale. La thèse de Segui [245] a déjà montré que ce point de fonctionnement était plus exigeant pour la LES, à cause de sa physique plus complexe. Cela explique le raffinement plus important employé ici par rapport au cas MUR129. Au final, le y^+ moyen est approximativement égale à 1.2 (Fig. 4.55) sur l'ensemble de la pale avec $x^+ = z^+ = 6y^+$ pour les autres directions. De la même manière, les deux simulations sont aussi moyennées pendant $0.5t_c$ (la valeur est plus petite par rapport au cas MUR129 puisque la vitesse est plus grande).



(a) Bord d'attaque de la pale.

(b) Zoom sur la région proche paroi au niveau du carré rouge de la Fig. 4.54a.

(c) Bord de fuite et sillage de la pale.

Figure 4.54: Aperçu du maillage avec les tailles de mailles ciblées pour le cas MUR235.

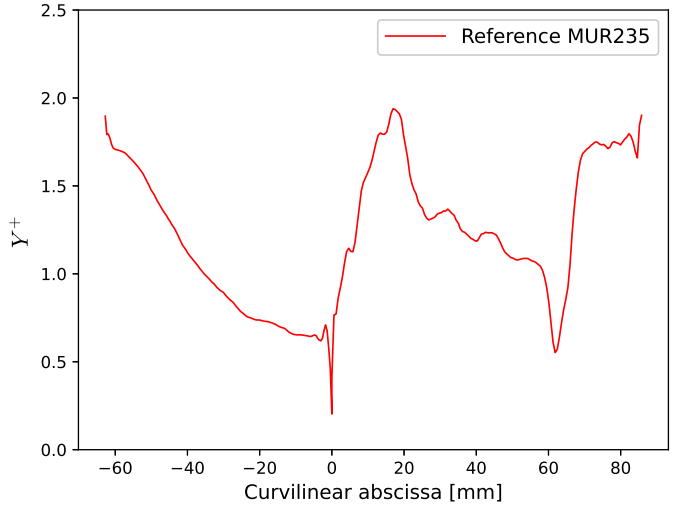


Figure 4.55: Évolution de y^+ le long de l'abscisse curviligne (MUR235).

Référence		tétraèdre	271.1M	530.8M
		prisme (20 niveaux)	259.7M	
LTS	Domaine hors région proche paroi + interface	tétraèdre	161.9M	535.8M
	Interface + région proche paroi	tétraèdre	114.2M	
		prisme (20 niveaux)	259.7M	

Table 4.10: Nombre de cellules des cas de référence et LTS pour le point de fonctionnement MUR235.

De même que pour le cas MUR129, l'Eq.(4.5) et la valeur retenue de N_{dt} indiquent un gain théorique en temps de calcul du cas LTS de,

$$S_p = \frac{Load_{\text{Ref}}}{Load_{\text{LTS}}} = 1.324. \tag{4.58}$$

En pratique, le gain obtenu est $S_p = 1.313$.

La Figure 4.56 compare le coefficient de transfert de chaleur moyen, exprimé par l'Eq. (4.55), entre les simulations de référence et LTS avec les données expérimentales (de [19]) pour le point de fonctionnement MUR235 le long de l'abscisse curviligne de la pale. Globalement, les deux simulations résolues en paroi ont un accord plutôt bon avec l'expérience. Cependant, dans les deux cas, les WRLES échouent à prédire correctement la position de la transition laminaire-turbulent. Dans la région pré-transition (entre $s = 35$ mm et $s = 60$ mm), le coefficient de transfert de chaleur est nettement différent par rapport aux valeurs expérimentales. Le même phénomène a été observé par Segui [245], démontrant le caractère plus délicat de ce point de fonctionnement, à cause de la sensibilité de la transition turbulente à l'intensité de la turbulence imposée en entrée. L'effet de l'intermittence des structures turbulentes sur le coefficient de transfert de chaleur a aussi été particulièrement étudié par Dupuy [95] sur ce même point de fonctionnement. Par ailleurs, pour le cas MUR235, la présence de structures turbulentes au plan d'entrée semble nécessiter un temps total de convergence plus important pour donner des résultats moyens satisfaisants. Cet effet est visible sur le graphique de coefficient de transfert de chaleur, puisque certaines régions semblent encore très irrégulières. Il est donc attendu qu'un temps de convergence plus élevé puisse améliorer les résultats présentés. Cependant, à cause du coût très important de ce type de simulation, la convergence

est arrêtée à $0.5t_c$. En prenant en compte ce manque de convergence complète, les simulations de référence et LTS sont en bon accord et les positions de la transition laminaire-turbulent et du choc sont identiques. En résumé, les résultats obtenus par la méthode de pas de temps local sont très encourageants puisque sur ce point de fonctionnement plus complexe, la solution n'est pas détériorée, tout en permettant un gain en temps de calcul de 31.3 %.

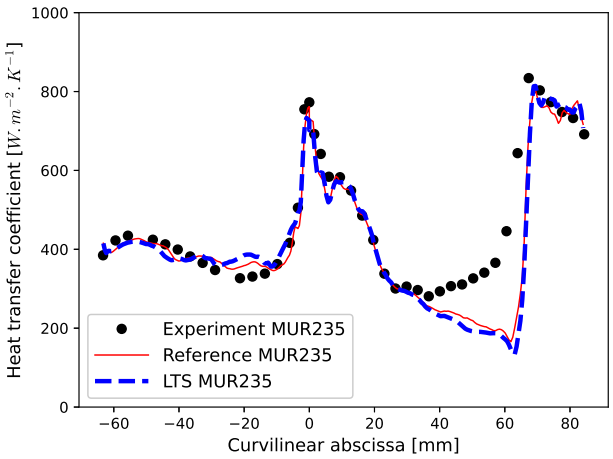
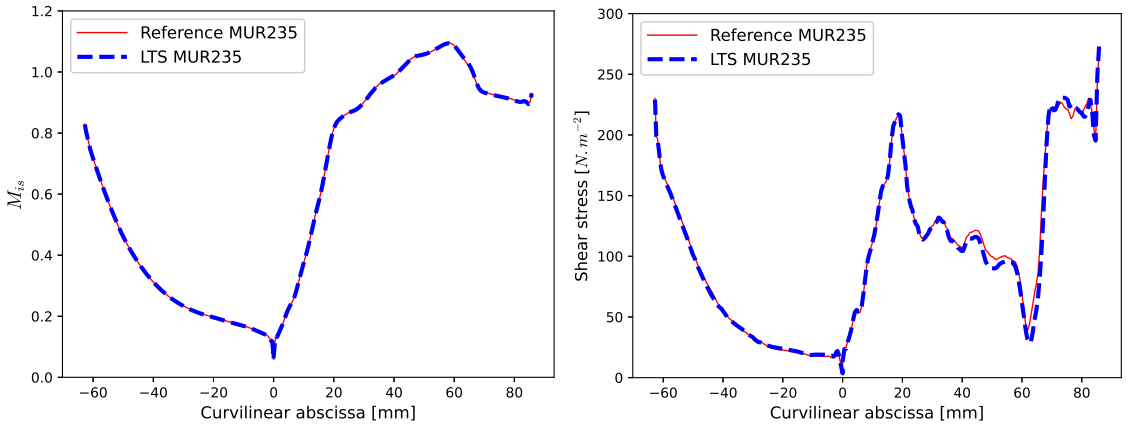


Figure 4.56: Coefficient de transfert de chaleur moyen pour le cas MUR235. Comparaison entre l'expérience et les simulations de référence et LTS.

Pour poursuivre la comparaison entre les deux simulations, les profils moyens de Mach isentropique et de contrainte de cisaillement sont présentés en Fig. 4.57. Les deux courbes de Mach isentropique sont en parfait accord. Contrairement au point de fonctionnement MUR129, l'écoulement devient supersonique au niveau de l'extrados et malgré cette complexité additionnelle de l'écoulement, la méthode de pas de temps local reproduit avec précision les résultats de la simulation de référence. Pour le profil de contrainte de cisaillement, plusieurs différences sont observées notamment au niveau de l'extrados dans la région supersonique. Elles peuvent s'expliquer par un temps de convergence trop faible lors de l'acquisition des moyennes.



(a) Mach isentropique M_{is}.

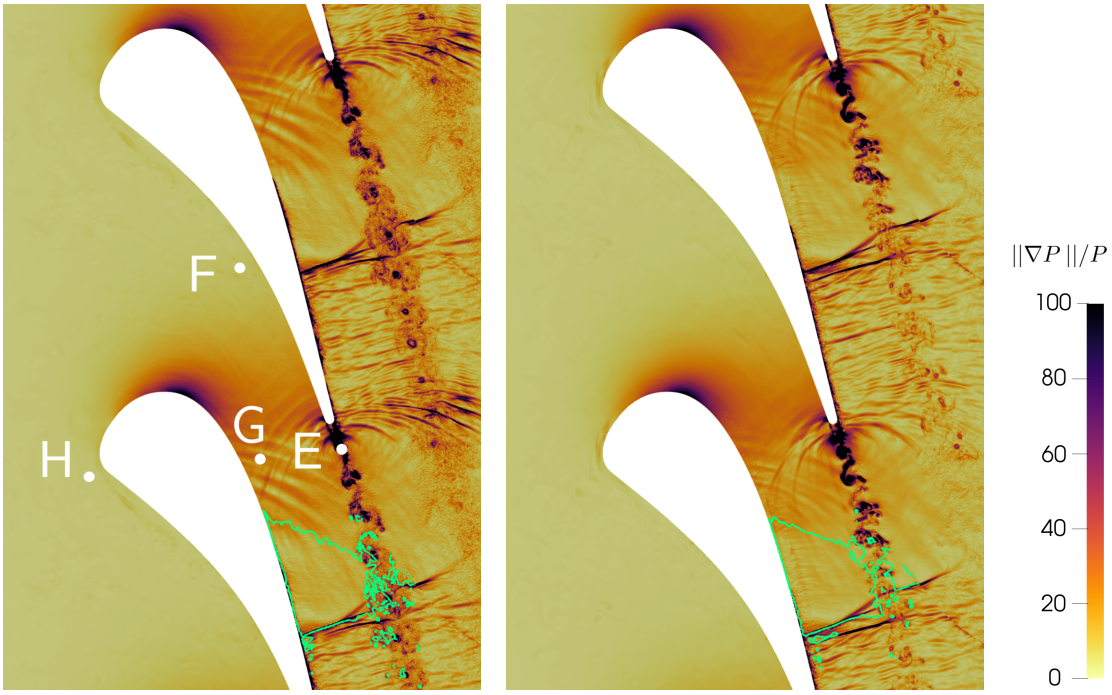
(b) Contrainte de cisaillement.

Figure 4.57: Mach isentropique et contrainte de cisaillement moyens pour le cas MUR235.

Comme mentionné dans la thèse de Segui [245], le point de fonctionnement MUR235 est beaucoup plus riche en termes de physique par rapport au point de fonctionnement précédent MUR129. Les différences dans la topologie de l'écoulement sont visibles sur les Figs. 4.58 et 4.59, qui présentent un contour instantané de $|\nabla P|/P$ avec un iso-contour à $Ma = 1$ et un contour

de $|\nabla\rho|/\rho$ respectivement. La différence principale entre MUR129 et MUR235 est la présence de turbulence injectée au niveau du plan d'entrée. Pour le cas MUR235, la turbulence d'entrée est convectée à partir du plan d'entrée et interagit avec la couche limite de la pale. Comme pour le cas MUR129, au niveau de l'extrados, des ondes acoustiques générées par le sillage de la pale voisine interagissent également avec la couche limite.

Par ailleurs, à cause du taux d'expansion plus élevé, la vitesse de l'écoulement est plus importante et un choc apparaît sur l'extrados qui interfère aussi avec le sillage de la pale supérieure. La région supersonique est mise en évidence par l'iso-contour à $Ma = 1$ en vert (Fig. 4.58). Contrairement au cas MUR129, la présence de la région supersonique et la vitesse de l'écoulement globalement plus élevée limitent la migration des ondes acoustiques en aval du canal. Comme le montre le contour de $|\nabla\rho|/\rho$, la transition laminaire-turbulent est initiée par la présence du choc et une couche limite turbulente se développe en aval du choc à l'extrados. À l'intrados, la couche limite est assez différente et ne reste pas laminaire. Les structures turbulentes produites par la condition d'entrée se déforment et interagissent avec la paroi. Ce phénomène explique le niveau plus élevé de coefficient de transfert de chaleur à l'intrados par rapport au point de fonctionnement MUR129. Enfin, des vortex sont produits par le décollement tourbillonnaire du bord de fuite et des ondes acoustiques sont générées de la même manière que pour le cas MUR129.

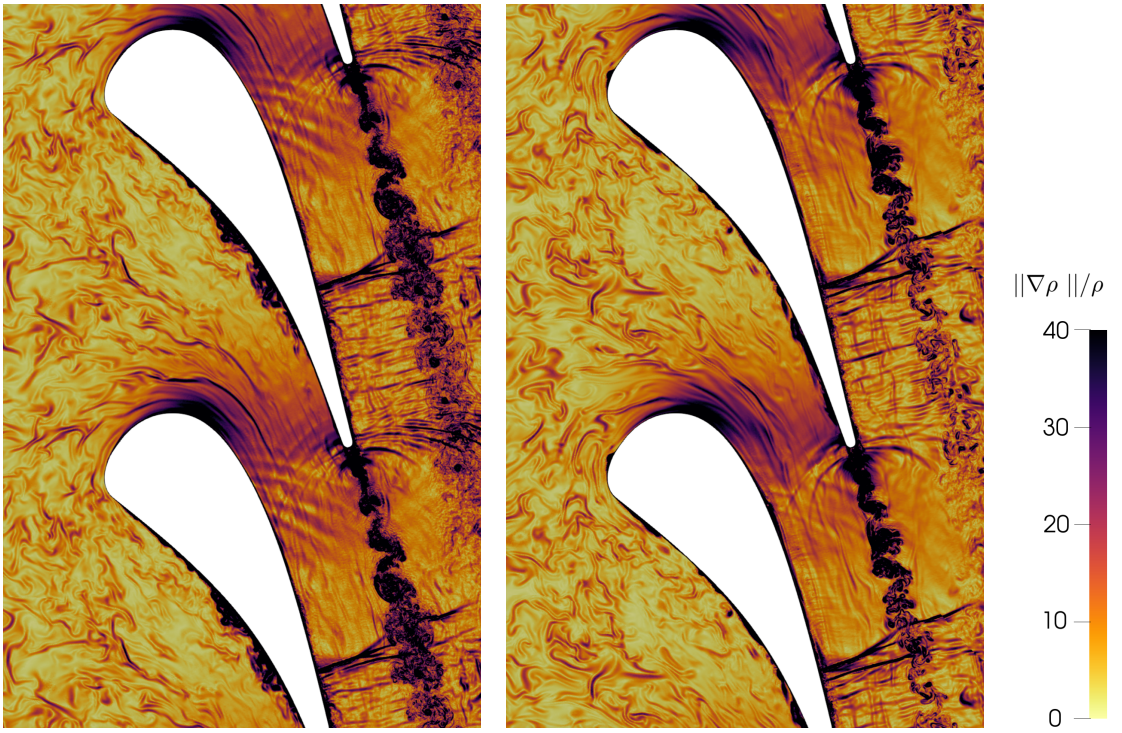


(a) Référence. (b) LTS.

Figure 4.58: Contour instantané de $|\nabla P|/P$ avec un iso-contour à $Ma = 1$ en vert pour le cas MUR235.

En ce qui concerne la comparaison entre les deux simulations, peu de différences sont visibles. La position du choc est la même dans les deux cas et les caractéristiques de l'écoulement semblent similaires. Un allongement des structures turbulentes est observé à cause de l'accélération à l'extrados des aubages. D'autre part, comme pour le cas MUR129, les ondes acoustiques semblent d'intensité plus faible pour la simulation LTS. Une explication possible est de relier cette observation aux propriétés du schéma numérique utilisé. Dans le Section 4.4.1, il est montré que pour le schéma TTG4A, à cause notamment de l'expression de l'erreur de troncature du schéma, l'erreur commise sur le cas de la convection du onde acoustique est plus faible avec un pas de temps plus petit, à maillage équivalent. La dissipation du schéma est aussi réduite quand le CFL diminue. Et, c'est ce phénomène qui est observé puisque la simulation de référence utilise le pas de temps $\Delta t_{\text{small}} = 4.3 \times 10^{-9}$ s alors

que dans la simulation LTS, les ondes acoustiques se propagent principalement dans le domaine qui utilise le pas de temps $\Delta t_{\text{large}} = N_{dt} \cdot \Delta t_{\text{small}} = 2.58 \times 10^{-8}$ s.

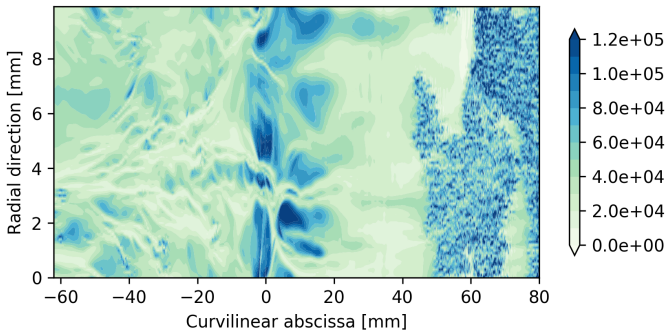


(a) Référence. (b) LTS.

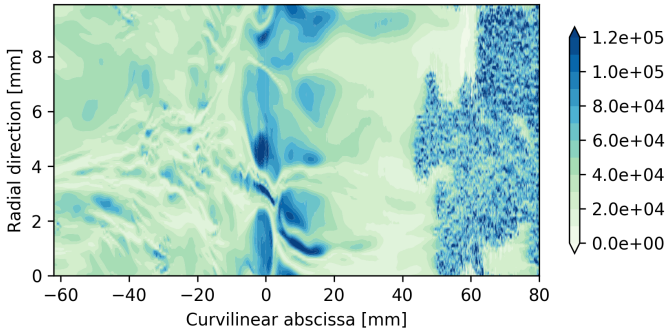
Figure 4.59: Contour instantané de $|\nabla\rho|/\rho$ seuillé par la valeur du plan d'entrée pour le cas MUR235.

De la même manière que pour le cas MUR129, la Fig. 4.60 montre le flux de chaleur instantané à la surface de la pale pour les simulations MUR235. Comme décrit précédemment, ce point de fonctionnement nécessite l'injection de turbulence au plan d'entrée qui impacte le bord d'attaque à $s = 0$ mm. Les structures turbulentes initialement isotropes générées à l'entrée sont ensuite étirées dans le sens de l'écoulement, ce qui produit les stries visibles sur l'intrados ($s < 0$ mm) du contour de flux de chaleur. Du côté extrados ($s > 0$ mm), à cause de la forte courbure de la pale, les structures turbulentes sont accélérées et rapidement déformées et atténuées (laminarisation de la couche limite). Les marques des vortex sont seulement visibles jusqu'à environ $s = 20$ mm. Entre $s = 20$ mm et $s = 50$ mm, les structures turbulentes ont complètement disparu et seules quelques petites zones turbulentes demeurent. La disparition de ces structures provoque la diminution du coefficient de transfert de chaleur observée sur la Fig. 4.56. La comparaison entre les simulations et l'expérience montre que la dégénérescence de ces structures est trop prononcée ou qu'elles sont trop peu nombreuses, ce explique la différence par rapport à l'expérience dans cette région. Comme dit précédemment, le papier de Dupuy [95] a étudié en détails ce phénomène, en montrant que l'intermittence de ces structures turbulentes a un effet direct sur le niveau de coefficient de transfert de chaleur atteint dans cette région. Ce manque d'intermittence des régions turbulentes s'explique probablement par un nombre trop faible de structures turbulentes générées au plan d'entrée ou une dissipation trop rapide de ces dernières, empêchant le déclenchement de ces lâchés à la surface de la pale. Ce phénomène n'est pas encore complètement compris et il n'est pour le moment pas possible de retrouver les niveaux de coefficient de transfert de chaleur de l'expérience dans cette région à l'aide de la simulation résolue en paroi. Après le choc (localisé approximativement autour de $s = 62$ mm), l'écoulement proche paroi a clairement transitionné en une couche limite complètement turbulente, d'où la forte augmentation du coefficient de transfert de chaleur visible sur la Fig. 4.56. Enfin, les deux simulations (référence et LTS) sont en très bon accord puisque les mêmes phénomènes

sont visibles sur les deux contours (Fig. 4.56). Les stries de l'intrados sont présentes dans les deux cas et la position de la transition laminaire-turbulent est comparable. À noter que les deux contours ne sont évidemment pas strictement identiques étant donné qu'il s'agit de contours instantanés.



(a) Reference.

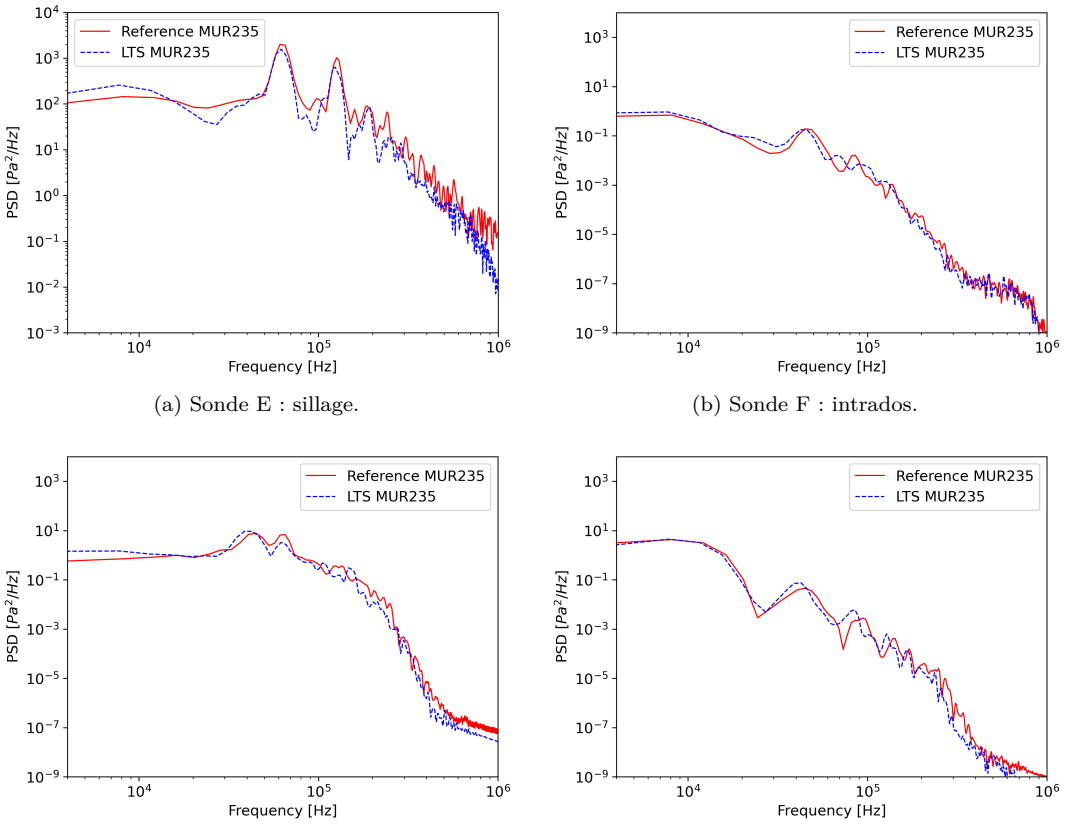


(b) LTS.

Figure 4.60: Flux de chaleur instantané à la surface de la pale pour le cas MUR235.

Pour finir la comparaison, la Fig. 4.61 fournit les densités spectrales de puissance du signal de pression des différentes sondes dont les positions sont indiquées sur la Fig. 4.58a. Pour la sonde située dans le sillage de la pale (Fig. 4.61a), une forte activité acoustique est clairement visible autour de 60 000 Hz et ses premières harmoniques pour les deux simulations. Comme pour le point de fonctionnement MUR129, le nombre de Strouhal associé à cette fréquence est évalué pour vérifier qu'elle correspond bien au phénomène de décollement tourbillonnaire de cette zone. En utilisant l'Eq. (4.57), la valeur $St \sim 0.243$ est obtenue, ce qui est cohérent avec la littérature pour l'écoulement autour d'un cylindre à $Re \sim 1.3 \times 10^6$ [11]. En termes de comparaison entre la référence et la simulation LTS, l'accord est excellent. La même fréquence de décollement tourbillonnaire est trouvée avec une amplitude comparable pour les deux simulations. Pour les sondes situées à l'intrados et à l'extrados (Figs. 4.61b et 4.61c), le contenu spectral est très différent de celui observé pour MUR129. À cause de la région supersonique dans le canal, les ondes acoustiques générées par le sillage ne peuvent pas remonter le canal aussi facilement que pour le point de fonctionnement précédent. La présence de la fréquence à 60 000 Hz est moins évidente et son intensité largement plus faible. Enfin, cette fréquence n'est quasiment pas présente sur le spectre de la sonde située au bord d'attaque de la pale (Fig. 4.61d). Dans l'ensemble, sur une comparaison de signal instationnaire et en tenant compte du manque de convergence mentionné précédemment, l'accord entre les deux simulations est satisfaisant, puisque les mêmes fréquences sont retrouvées dans les deux cas avec des intensités très comparables. À noter les différences observées peuvent aussi s'expliquer par la différence de pas de temps qui modifie les propriétés du schéma numérique. Les quatre sondes comparées ici sont en effet toutes situées en dehors de la région proche paroi. Ainsi, dans cette région, pour le cas de référence le pas de temps $\Delta t_{\text{small}} = 4.3 \times 10^{-9}$ s est utilisé alors que le pas de temps $\Delta t_{\text{large}} = 2.58 \times 10^{-8}$ s, 6 fois plus grand est utilisé pour le cas LTS. Or, la Section 3.2.2 a montré la forte dépendance des propriétés des schémas numériques, principalement en termes

de dissipation et dispersion, à la valeur du nombre CFL. Avec un rapport de 6 entre les deux pas de temps, il est donc attendu que cette modification de propriétés joue un rôle, notamment sur le transport d'ondes acoustiques, très sensible au schéma.



(a) Sonde E : sillage.

(b) Sonde F : intrados.

(c) Sonde G : extrados.

(d) Sonde H : bord d'attaque.

Figure 4.61: Comparaison de la densité spectrale de puissance du signal de pression de différentes sondes pour le cas MUR235.

En conclusion, l'application de la méthode de pas de temps local sur la turbine LS89 donne des résultats très satisfaisants. Les solutions obtenues par les LES résolues en paroi sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour les deux points de fonctionnement. Par ailleurs, la méthode LTS a montré sa capacité à réduire significativement le coût de calcul très important de ce type de simulation, tout en préservant les capacités de prédiction intéressantes d'une LES résolue en paroi.

4.5.3 Application de la méthode de pas de temps local à une simulation intégrée chambre de combustion et turbine

Introduction

Des mesures précises de l'écoulement à l'intérieur d'une turbomachine à un point de fonctionnement réaliste sont souvent difficiles et très coûteuses à obtenir. C'est pourquoi la CFD est un outil de choix pour fournir des observations à moindre coût. Dans ce contexte, le projet européen FACTOR (pour *Full Aero-thermal Combustor-Turbine interactiOn Research*) a eu pour but d'acquérir une meilleure compréhension des interactions entre chambre de combustion et turbine, ainsi de développer les connaissances actuelles sur la convection de points chauds à travers la turbine. Le projet consiste en une étude commune entre des mesures expérimentales et des simulations numériques d'un même banc de test annulaire complet et non réactif. D'un point de vue numérique, l'un des enjeux de l'étude est la simulation de plusieurs composants d'une turbomachine (avec le couplage entre des parties fixes et des parties tournantes) et la présence de régimes d'écoulement très

différents (bas Mach dans la chambre de combustion, haut Mach dans la turbine, refroidissement par multi-perforations). À cause de ces spécificités, seuls quelques codes CFD sont capables de simuler avec précision la configuration complète.

Au niveau expérimental, le projet FACTOR a généré une grosse base de données autour de deux montages expérimentaux : une chambre de combustion tri-secteur étudiée à l'UNIFI [21] et une chambre annulaire complète équipée de ses étages de turbine installée au DLR Göttingen [160]. Un des objectifs du projet est d'être capable de designer des chambres de combustion avec peu d'émission de NOx sans jets de dilution. Pour cette étude, c'est le banc installé au centre d'essais NG-Turb du DLR Göttingen qui est considéré. La configuration a l'avantage de pouvoir être facilement simulée numériquement grâce à ses propriétés naturelles de périodicité. La géométrie complète est composée de 20 secteurs identiques de 18°, chacun composé d'un injecteur, de deux pales de stator, de trois pales de rotor et d'une pale de redresseur basse pression (Fig. 4.62).

En termes de caractéristiques de l'écoulement, de l'air chauffé à 513 K est injecté par le plénum d'entrée et un cylindre de 55 mm est installé à la sortie du swirler pour éviter les interactions trop rapides entre le jet chaud et le système de refroidissement ou les injecteurs voisins. De l'air froid est injecté par des systèmes de multi-perforations dans la chambre de combustion et à la surface des pales du stator. Des écoulements de purge sont aussi présents entre les parties fixes et tournantes. Les détails du point de fonctionnement avec les différentes températures et débits sont donnés dans la Table 4.11. À noter que le banc de test FACTOR installé au DLR est aussi très bien instrumenté à différentes positions de la géométrie. Des mesures aux plans 40, 41 et 42 sont obtenues grâce à des sondes 5 trous avec une couverture de la hauteur du canal d'environ 95 % (Fig. 4.62).

Pression statique d'entrée (statique = totale)	[kPa]	143.0
Pression statique de sortie	[kPa]	53.7
Rapport de pression (totale sur statique)	[-]	2.7
Débit de l'injecteur	[kg/s]	3.09
Débit de refroidissement des parois internes de la chambre	[kg/s]	0.93
Débit de refroidissement des parois externes de la chambre	[kg/s]	0.95
Débit de la cavité amont rotor	[kg/s]	0.072
Débit de la cavité aval rotor	[kg/s]	0.072
Débit de refroidissement des NGVs	[kg/s]	0.36
Température de l'écoulement de l'injecteur	[K]	513
Température des écoulements de refroidissement	[K]	300
Vitesse de rotation du rotor	[rpm]	7700

Table 4.11: Détails du point de fonctionnement du banc de test annulaire FACTOR installé au DLR Göttingen (pour l'ensemble des 20 secteurs).

Mise en place des simulations

Pour le cas numérique, puisque le domaine est périodique, seulement un secteur de 18° est simulé avec la position de l'injecteur alignée avec le bord d'attaque du deuxième NGV (Fig. 4.62). Pour reproduire les données expérimentales, les entrées (plénum et purges du rotor) sont définies par des entrées à débit fixé et la pression du plan de sortie est imposée par une condition limite à pression constante. Pour permettre l'évacuation des ondes acoustiques du domaine, les conditions d'entrée et de sortie sont imposées par des NSCBC (*Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*) [208]. Les multi-perforations des parois de la chambre de combustion et à la surface des deux NGV sont simulées par un modèle d'injection hétérogène spécifiquement construit pour reproduire ce type d'écoulement [34]. Enfin, les murs sont considérés comme adiabatiques et la région proche paroi est modélisée par une loi de paroi logarithmique [140]. Les grandeurs imposées aux différentes conditions limites sont identiques à celles du banc de test rappelées dans la Table 4.11 (à diviser

par 20 pour un secteur de 18°). Les détails du domaine utilisé pour la simulation sont rappelés en Fig. 4.62. Pour limiter le coût des simulations, le schéma Lax-Wendroff est utilisé avec le modèle WALE pour modéliser le terme de sous-maille [90].

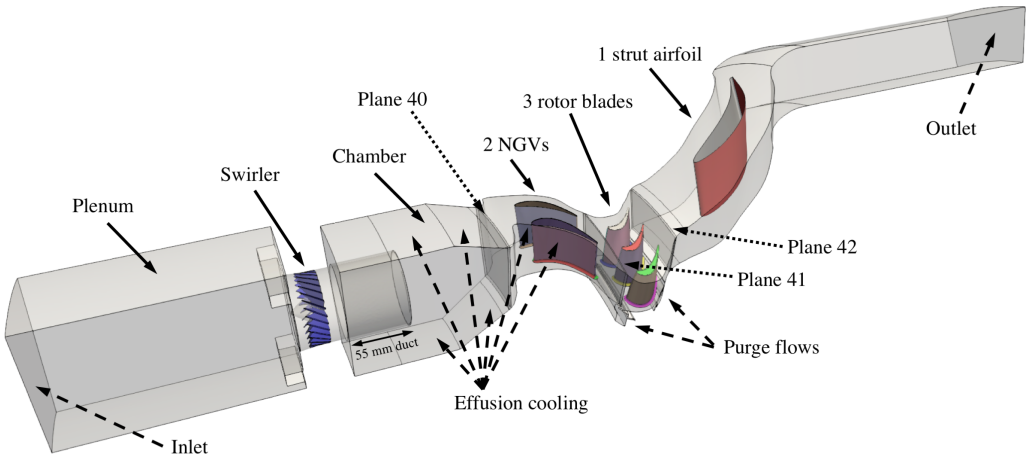


Figure 4.62: Domaine de simulation de la configuration FACTOR.

Les maillages de tous les composants de la configuration sont uniquement composés de tétraèdres. Le raffinement est similaire à celui utilisé dans les études précédentes réalisées sur la même configuration FACTOR [86, 155]. Les parois de la chambre sont raffinées avec des mailles d'environ 0.25 mm pour discrétiser les trous des multi-perforations avec au moins 4 mailles, en accord avec le modèle d'injection hétérogène utilisé [34]. La même taille de maille est utilisée pour les parois des deux NGVs, permettant d'obtenir un y^+ moyen compris entre 20 au niveau du bord d'attaque et 150 au bord de fuite des deux pales. La surface des pales du rotor est aussi discrétisée avec des mailles de 0.25 mm pour obtenir un y^+ moyen égal à 70. La taille de maille est réduite à 0.1 mm dans le jeu en tête de pale pour garantir la présence d'environ 9 mailles sur la hauteur du jeu. Le redresseur est quant à lui discrétisé avec des mailles de 0.35 mm pour un y^+ moyen de 120. Pour finir, en plus du jeu en tête des pales du rotor, les pales du swirler nécessitent aussi un raffinement particulier à cause de la taille réduite des pales du swirler.

Pour mettre en évidence les contraintes en termes de pas de temps imposées par les deux régions de raffinement important, le pas de temps local obtenu calculé à partir de l'Eq. (2.90) est représenté en Fig. 4.63 pour le domaine compris entre le swirler et le rotor. Un seuil à 3.0×10^{-8} s est appliqué pour désigner toutes les mailles ayant un pas de temps inférieur au seuil fixé. Les mailles en dessous de ce seuil sont visibles en rouge sur la Fig. 4.63. La grande majorité de ces cellules est localisée au niveau du swirler et du jeu en tête des pales du rotor.

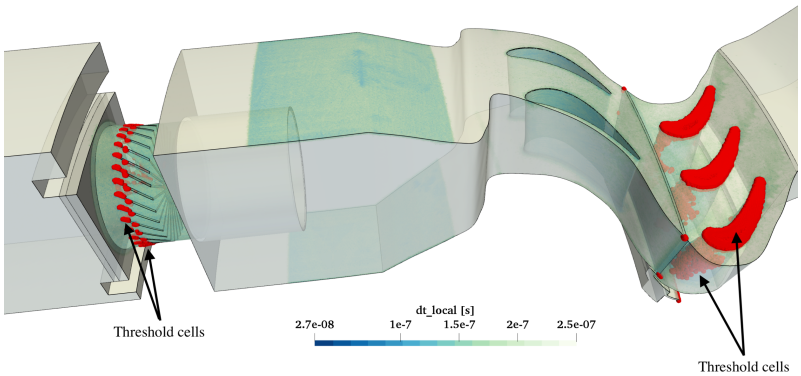


Figure 4.63: Contour des pas de temps locaux dans une simulation de référence. Les mailles mises en évidence en rouge correspondent à des mailles avec un pas de temps local inférieur à 3.0×10^{-8} s.

Ainsi, dans l'optique d'appliquer la méthode de pas de temps local à cette configuration, la configuration initiale est divisée en trois sous-domaines. Des régions de superposition sont générées entre les sous-domaines pour permettre leur couplage grâce à la méthode MISCOG décrite précédemment. L'instance 1 contient toutes les parties statiques de la configuration à l'exception du swirler (plénum, chambre de combustion, NGVs et redresseur) pour un total de 66.3 M de cellules. L'instance 2 est composée des pales du rotor avec les cavités inter-étages, en rotation à 7700 rpm, et contient 19.8 M de cellules. L'instance 3 correspond au swirler avec 16.5 M de cellules.

Dans une première simulation de référence, le CFL est fixé à 0.9 et sans méthode de pas de temps local, le pas de temps est identique pour les trois instances. Pour la simulation avec pas de temps local, c'est l'option 2 décrite au début de cette section qui sera utilisée. Cela signifie que le pas de temps de chaque instance ne sera pas fixé à une valeur constante. Il sera dépendant de la condition locale de stabilité à CFL = 0.9 de chaque sous-domaine. Ainsi, la valeur de N_{dt} ne sera pas un nombre entier. En pratique, le pas de temps moyen obtenu pour les instances 2 et 3 est d'environ 2.75×10^{-8} s, alors qu'il est d'environ 11.0×10^{-8} s pour l'instance 1. Ces deux valeurs donnent $N_{dt} \simeq 4$. La division en trois sous-domaines est représentée en Fig. 4.64 avec le pas de temps moyen associé à chaque sous-domaine pour le cas LTS. Les pas de temps de chaque instance des deux simulations comparées sont aussi rappelés dans la Table 4.12.

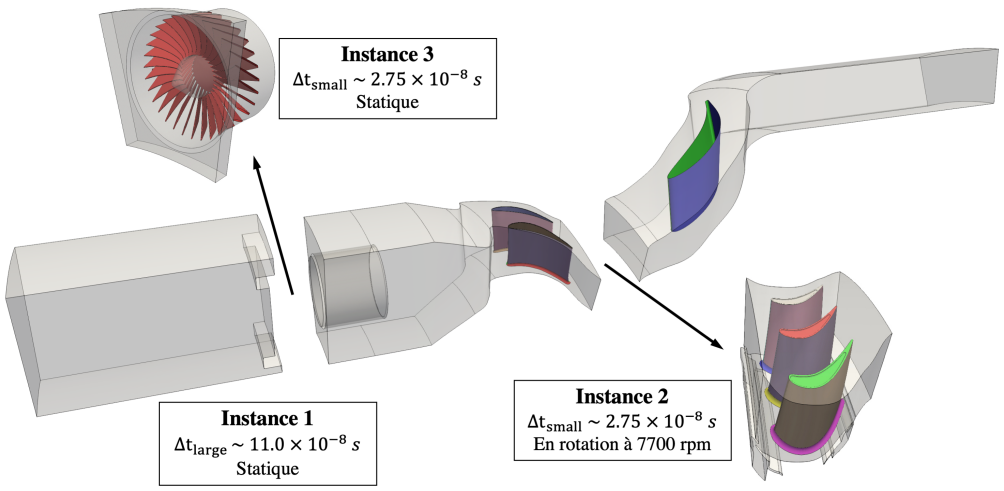


Figure 4.64: Découpage en sous-domaines de la configuration FACTOR avec les pas de temps moyens associés pour le cas LTS.

	Reference	LTS
Instance 1	Δt_{small}	Δt_{large}
Instance 2		Δt_{small}
Instance 3		Δt_{small}

Table 4.12: Pas de temps des trois instances pour les simulations de référence et LTS.

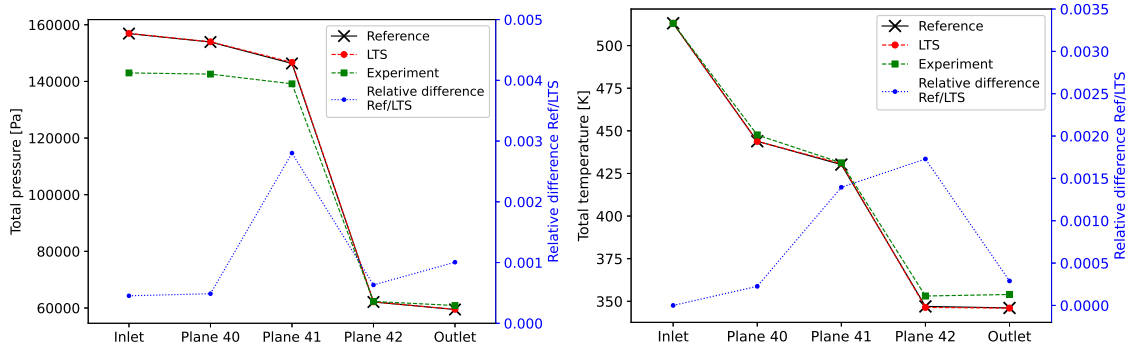
Avec la répartition du nombre de mailles de chaque instance décrite dans le paragraphe traitant du maillage et en choisissant une valeur de $N_{dt} = 4$, il est possible d'estimer le *speedup* théorique de l'utilisation de la méthode LTS sur cette configuration,

$$S_p = \frac{102.6 \text{ M}}{16.5 \text{ M} + 19.8 \text{ M} + 66.3 \text{ M}/N_{dt}} = 1.941. \tag{4.59}$$

En pratique, la valeur effective obtenue est de 1.922, soit un temps de retour effectif de simulation presque divisé par deux.

Comparaison des résultats

Pour comparer les cas de référence et LTS, les simulations sont moyennées pendant une durée de 50 ms, qui correspond à environ 6.5 révolutions du rotor. Pour les deux cas, les simulations sont initialisées à partir de la même solution instantanée provenant d'une simulation convergée avec un domaine unique. La pression totale et la température totale moyennées aux différents plans pour les données expérimentales et pour les deux simulations sont comparées en Fig. 4.65. La position des plans est donnée sur le Fig. 4.62. Cette comparaison met en lumière une différence au niveau du point de fonctionnement simulé par rapport à l'expérience. Des difficultés dans la réalisation des essais, en particulier pour les mesures de débit, ont été rencontrées, ce qui explique cette différence. C'est pourquoi les comparaisons qui seront présentées par la suite traiteront de grandeurs adimensionnées pour minimiser les effets de la différence de point de fonctionnement. En ce qui concerne la comparaison entre la simulation de référence et la simulation LTS, l'accord est excellent. Pour les deux grandeurs de la Fig. 4.65, la courbe bleue donne l'évolution de la différence relative entre les grandeurs de la référence et du cas LTS aux différents plans. Pour la pression totale, la différence relative ne dépasse pas 0.3 % et pour la température, elle reste inférieure à 0.2 %. Cette comparaison montre que l'utilisation de la méthode LTS n'a quasiment aucun impact sur le point de fonctionnement simulé.

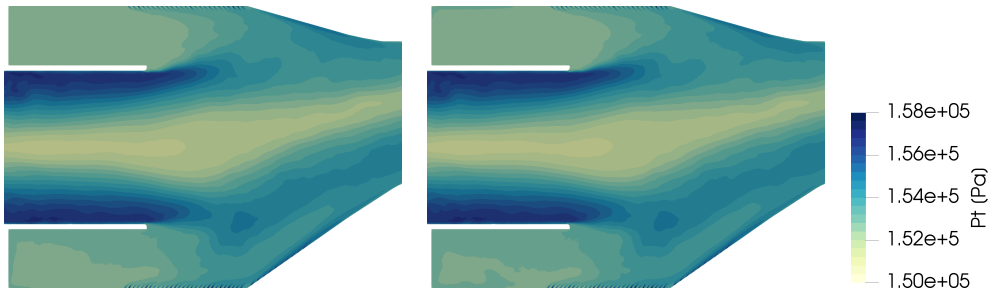


(a) Pression totale.

(b) Température totale.

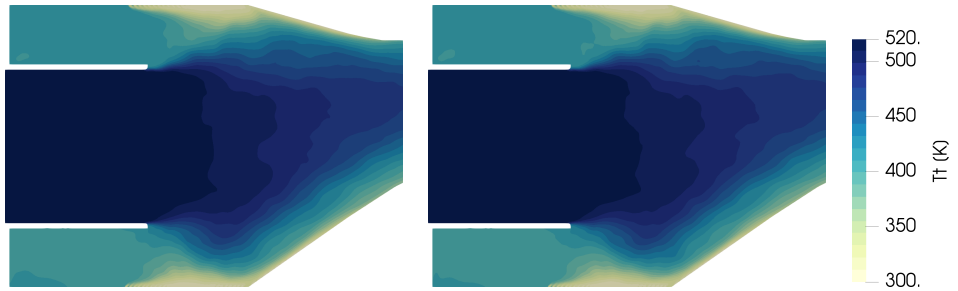
Figure 4.65: Évolution de la pression totale et de la température totale à différents plans de la configuration. La courbe bleue donne l'évolution de la différence relative entre la simulation de référence et le cas LTS pour les deux grandeurs.

Les Figures 4.66 et 4.67 présentent les contours moyens de pression totale et de température totale en coupe méridienne dans la chambre de combustion pour le cas de référence et le cas LTS. Pour la pression totale, la présence du tourbillon généré par l'injecteur est clairement visible avec une zone de pression faible au centre. Cette région basse pression est ensuite convectée jusqu'à l'entrée de la turbine. Pour la température totale, étant donné que l'écoulement provenant de l'injecteur est à température constante autour de 513 K, l'écoulement au centre du canal reste relativement uniforme. Sur les parois externes et internes, les films de refroidissement à 300 K sont aussi visibles et ils remplissent effectivement bien leur rôle puisque l'écoulement en proche paroi reste en dessous de 350 K jusqu'à l'entrée de la turbine. En termes de comparaison entre les cas de référence et LTS, aucune différence notable n'est visible. Dans les deux cas, la topologie de l'écoulement dans la chambre semble identique.



(a) Référence. (b) LTS.

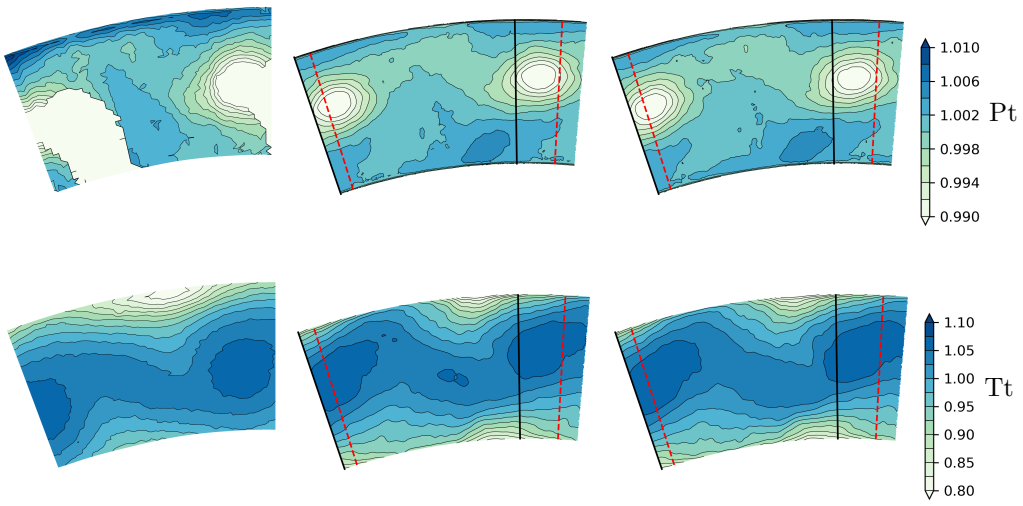
Figure 4.66: Coupe méridienne dans le chambre pour la pression totale moyenne.



(a) Référence. (b) LTS.

Figure 4.67: Coupe méridienne dans le chambre pour la température totale moyenne.

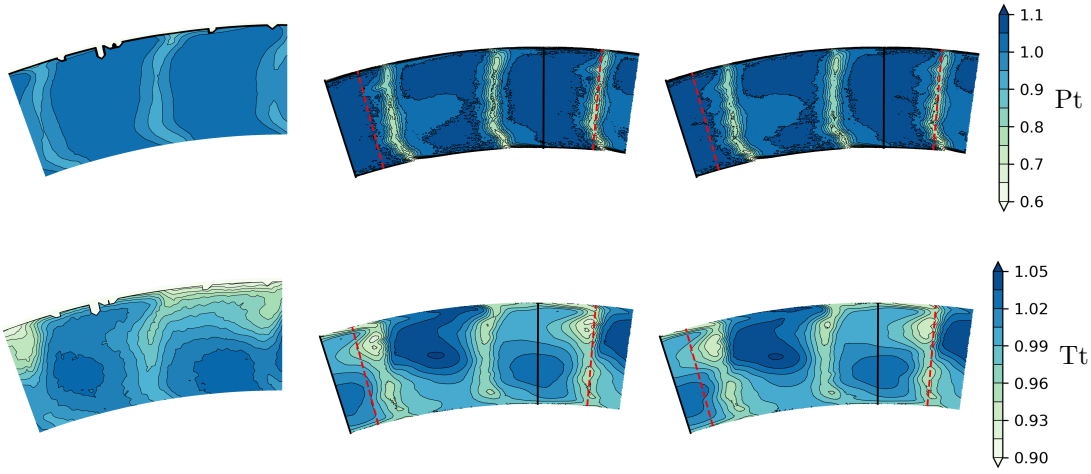
Pour poursuivre la comparaison entre les trois cas, la Fig. 4.68 présente les contours de pression totale et température totale adimensionnées par leur valeur moyenne respective au plan 40 (plan de sortie de la chambre). Sur le contour de pression totale provenant des données expérimentales, certaines valeurs sont manquantes. Sur les contours des simulations de référence et LTS, les lignes noires représentent les limites du secteur de 18°. Les contours sont répliqués avec la condition de périodicité du domaine pour faciliter la comparaison avec l'expérience. Les lignes rouges pointillées correspondent aux limites du domaine d'acquisition des mesures expérimentales. Globalement, par rapport à l'expérience, la topologie globale de l'écoulement est respectée. Une zone de faible pression est présente au centre du canal, générée par la giration induite par l'injecteur. De la même manière, tous les cas présentent la trace du point chaud sur les contours de température. Même si la position azimutale de ces régions correspond à celle de l'expérience, un décalage vers le haut de leur position radiale est observé. Cette différence est peut-être causée par la qualité du maillage et les zones de raffinement choisies dans le domaine. Ce commentaire s'appuie sur des résultats du chapitre suivant, où la même configuration est simulée comportant uniquement la chambre et les deux NGVs. La simulation est faite avec un nouveau maillage réalisé en tenant compte de ces problèmes et les résultats montrent une nette amélioration de l'accord avec l'expérience. Malgré cette déviation propre à la génération du maillage retenu ici, la comparaison entre les simulations de référence et LTS est excellente. Aucune différence notable n'est à signaler.



(e) Expérience. (f) Référence. (g) LTS.

Figure 4.68: Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 40.

De même, la Fig. 4.69 présente les mêmes grandeurs au plan 41, en aval des NGVs. Les différences entre les deux simulations numériques et l'expérience sont plus visibles. Dans le sillage des deux NGVs, la chute de pression est nettement plus marquée pour les simulations numériques. Cela peut s'expliquer par une turbulence trop faible à ce plan qui empêche la dissipation du sillage. À noter que la forme globale du sillage reste cependant correcte. De même, pour la température totale, des différences sont aussi visibles dans le sillage, mais également dans la région inter-sillage. Comme au plan 40, l'accord avec l'expérience est amélioré avec le nouveau maillage présenté dans le chapitre suivant. De manière plus importante, les contours des deux simulations sont quasiment identiques. Ceci montre que l'impact de la méthode de pas de temps local est très faible et qu'elle permet d'accélérer la simulation sans détériorer la solution.

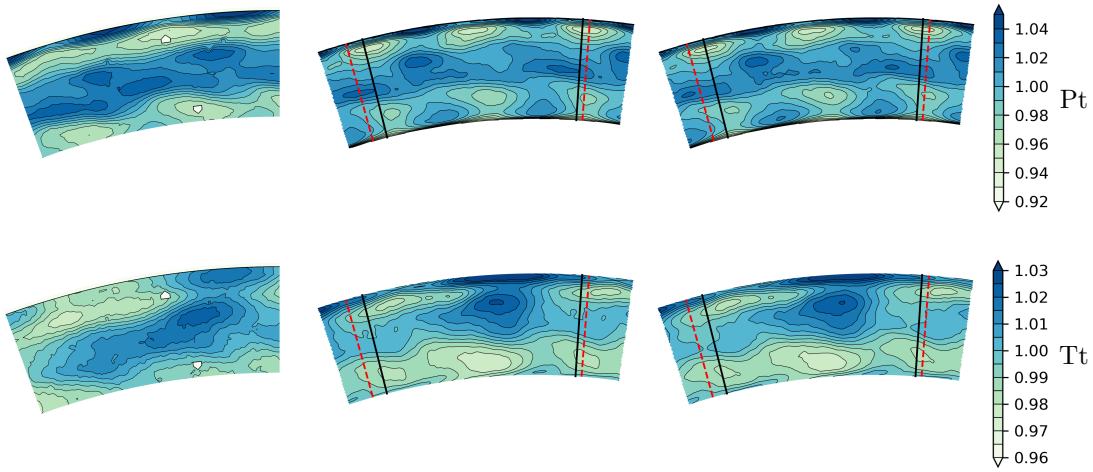


(e) Expérience. (f) Référence. (g) LTS.

Figure 4.69: Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 41.

Enfin, la Fig. 4.70 montre la pression totale et la température totale au plan 42, en aval de la roue mobile. Comme pour le plan 40, dans les deux simulations numériques, la position radiale des différentes régions semble décalée vers les hauts rayons. La zone de haute pression au centre du

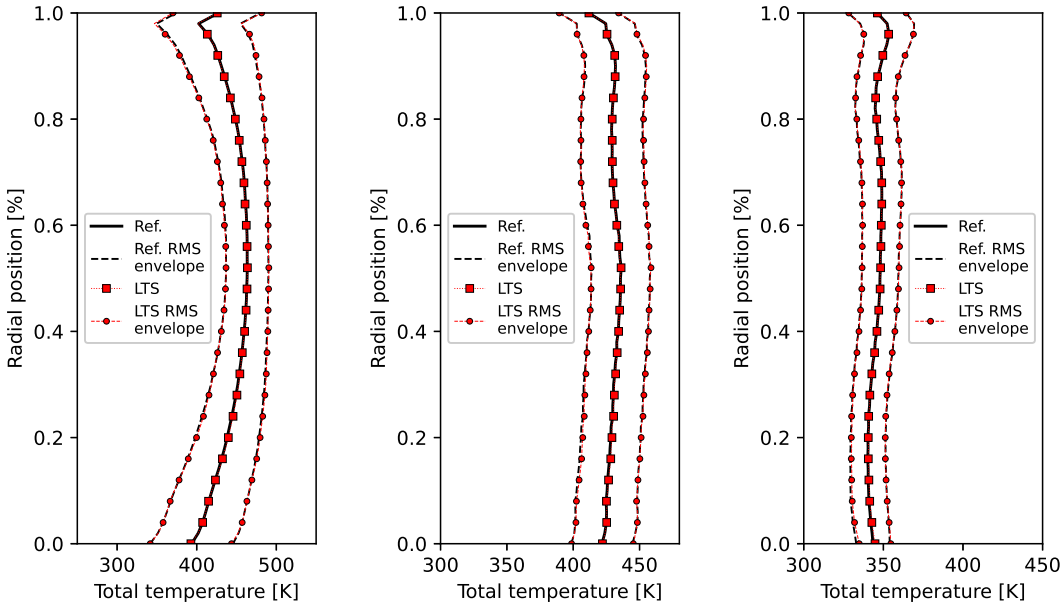
canal est plus haute que dans l'expérience. De la même manière, la région de température élevée proche du carter est plus marquée. Encore une fois, malgré ces différences avec l'expérience, l'accord entre les deux simulations est excellent.



(e) Expérience. (f) Référence. (g) LTS.

Figure 4.70: Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 42.

Pour réaliser une comparaison plus quantitative des deux simulations numériques, la Fig. 4.71 présente les profils radiaux de température totale avec une enveloppe RMS aux plans 40, 41 et 42 pour le cas de référence en noir et pour le cas LTS en pointillés rouges. Ces profils radiaux sont obtenus à partir des moyennes azimutales pondérées volume de T_t et $T_{t,RMS}$ issues des solutions moyennes précédentes. Il est clair que même si quelques différences étaient présentes sur les contours de température totale, cela n'est pas visible sur les profils radiaux. La superposition du profil moyen est quasiment parfaite et il en est de même pour l'enveloppe RMS.



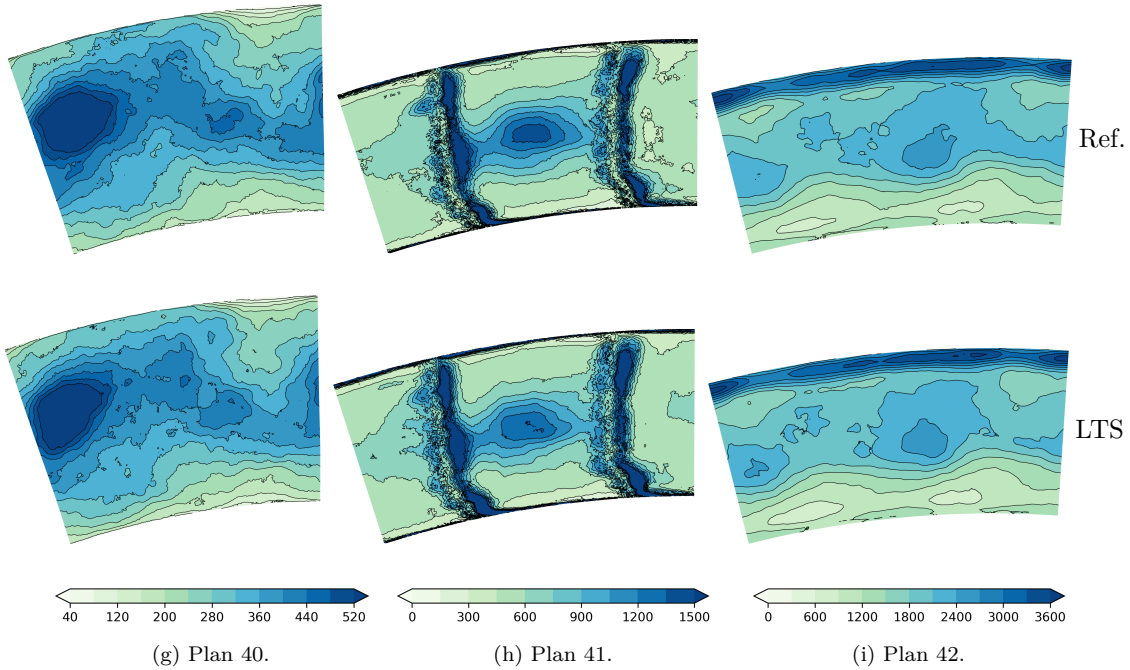
(a) Plan 40. (b) Plan 41. (c) Plan 42.

Figure 4.71: Profils radiaux de température totale avec enveloppe RMS aux plans 40, 41 et 42.

L'évolution de la turbulence au sein d'une turbomachine est aussi un paramètre important. C'est pourquoi les contours d'énergie cinétique turbulente (TKE) sont donnés en Fig. 4.72 aux plans 40, 41 et 42. Au plan 40, une zone de TKE élevée est visible au centre du canal et correspond à la position du point chaud provenant de la chambre. La giration induite par l'injecteur génère une turbulence très importante qui est toujours présente à l'entrée de la turbine. Dans les deux simulations comparées, cette caractéristique est bien présente avec une position et une intensité similaires.

Au plan 41, la majeure partie de la TKE est générée dans le sillage des deux NGVs. La couche limite turbulente et le décollement tourbillonnaire au bord de fuite sont les causes principales de cette agitation turbulente. En plus des sillages, une région de TKE élevée est aussi observée entre les deux sillages au centre du canal. Cette région correspond à un résidu du point chaud qui n'est pas complètement dissipé à la traversée des deux NGVs. Encore une fois, les deux contours sont très comparables. L'intensité de la TKE résiduelle du point chaud est cependant légèrement moins marquée dans le cas LTS.

De même, au plan 42, les deux simulations sont aussi similaires. Le niveau important de TKE proche de la paroi supérieure est présent dans les deux cas avec la même intensité. Enfin, au centre du canal et dans la partie inférieure du contour, les régions sont semblables.

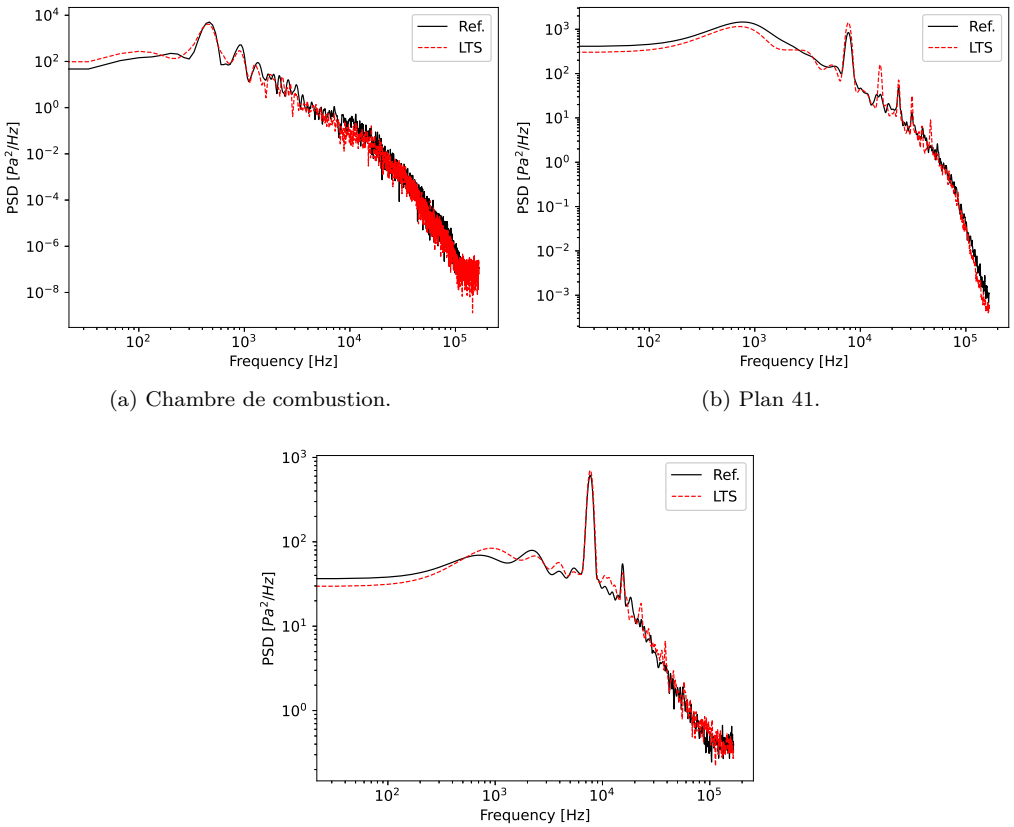


(g) Plan 40. (h) Plan 41. (i) Plan 42.

Figure 4.72: Contour d'énergie cinétique turbulent aux plans 40, 41 et 42.

Pour finir cette section de comparaison des résultats, la Fig. 4.73 montre les densités spectrales de puissance (PSD) du signal de pression statique de trois sondes du domaine. La première est située au milieu de la chambre de combustion dans la direction axiale, à mi-hauteur de veine et au centre de la veine en position azimutale. La PSD met clairement en évidence la fréquence de giration de l'injecteur à 500 Hz, ainsi que ses deux premières harmoniques. Cette dynamique de la chambre, pilotée par la giration de l'injecteur, sera analysée plus en détails dans le chapitre suivant. L'amplitude de la PSD des deux cas comparés est très proche et la fréquence est la même. Pour la deuxième sonde située sur le plan 41, à mi-hauteur de veine et au centre de la veine en position azimutale, une autre fréquence domine le spectre. La fréquence à 7 700 Hz correspond à la fréquence de passage des trois pales du rotor en rotation à 7 700 rpm ($f = 3$ pales $\times$ 20 secteurs $\times$ 7 700 rpm/60 = 7 700 Hz). Les premières harmoniques sont aussi visibles. Au niveau de la comparaison entre les cas, l'amplitude de la PSD

du cas LTS à ces fréquences est plus importante. Étant donné la complexité de l'écoulement, les causes peuvent être multiples. Mais, une explication probable réside, comme pour les applications précédentes, dans les propriétés de dissipation du schéma. Ici, c'est le schéma LW qui est utilisé. Or, ce dernier présente un niveau de dissipation plus élevé lorsque le pas de temps diminue. Et, c'est le cas ici puisque la sonde située dans l'instance 1 utilise le pas de temps Δt_{small} dans le cas de référence, mais Δt_{large} dans le cas LTS. D'où la dissipation des ondes acoustiques moins importantes pour la simulation LTS. Enfin, pour la troisième sonde située sur le plan 42, à mi-hauteur de veine et au centre de la veine en position azimutale, la fréquence du rotor est aussi prédominante. En comparant les deux simulations, peu de différences sont visibles et les amplitudes sont cette fois-ci plus proches.



(a) Chambre de combustion.

(b) Plan 41.

(c) Plan 42.

Figure 4.73: Densité spectrale de puissance des sondes de pression du domaine FACTOR.

Conclusion

Pour conclure, l'application de la méthode de pas de temps local à la configuration FACTOR composée d'une chambre de combustion et d'un étage et demi de turbine donne des résultats très satisfaisants. Sur ce type de configuration proche d'une application industrielle, avec un refroidissement hétérogène des parois de la chambre et les NGVs, une dynamique de l'écoulement fortement turbulente et de larges écarts de température, la méthode LTS ne détériore pas la solution, tout en permettant un gain en coût calcul de 1.922.

4.6 Bilan des gains réalisés par la méthode LTS et parallélisation de la méthode

Cette section donne un bref résumé des gains réalisés par la méthode LTS sur les trois applications considérées dans ce chapitre. La Table 4.13 liste les gains obtenus pour les quatre cas (deux points de fonctionnement pour la turbine LS89), avec les valeurs de N_{dt} et N_n associées. Les configurations sont aussi reportées sur la Fig. 4.74, qui correspond à la Fig. 4.3 présentée en début de chapitre décrivant les iso-lignes de *speedup* en fonction des paramètres N_{dt} et N_n. Dans l'ensemble, les gains effectifs sont très proches des gains théoriques, ce qui démontre la capacité de la méthode MISCOG à coupler efficacement plusieurs sous-domaines dans un contexte de pas de temps local. Pour donner une meilleure idée des gains réalisés par la méthode LTS, les temps de calcul et l'équivalent en heures CPU pour les applications sont présentées dans la Table 4.14.

	N_{dt}	N_n	Gain théorique	Gain effectif
Canal turbulent	4	0.38	1.237	1.214
LS89 MUR129	5	0.48	1.342	1.327
LS89 MUR235	6	0.43	1.324	1.313
FACTOR	4	1.83	1.941	1.922

Table 4.13: Gains en coût de calcul obtenus pour les différentes applications.

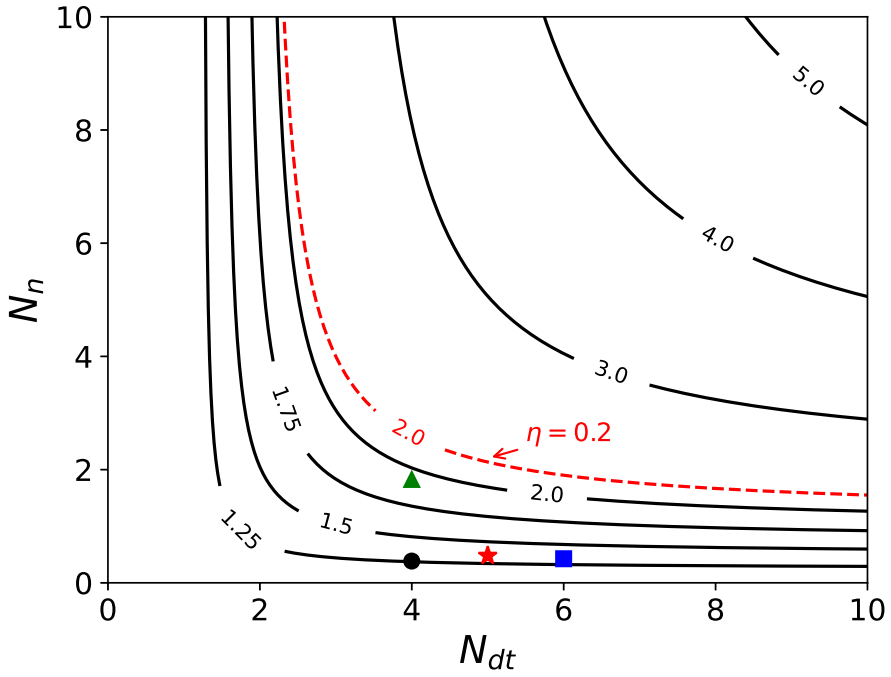


Figure 4.74: Iso-lignes de S_p dans le plan $N_{dt} - N_n$ en noir pour $\eta = 0.01$ et en rouge pontillé pour $\eta = 0.2$. Cette figure est identique à la Fig. 4.3 avec l'ajout des symboles correspondant aux applications présentées dans ce chapitre. Le cercle noir pour le canal turbulent, l'étoile rouge and le carré bleu pour la cascade LS89 pour les points de fonctionnement MUR129 et MUR235 respectivement et le triangle vert pour la configuration FACTOR.

	Supercalculateur	Ressources	Temps de simulation pour le cas de référence	Temps de simulation pour le cas LTS	Gain en hCPU
Canal turbulent	Occigen	40 nœuds / 960 cœurs	35h 08min	28h 57min	6 000
LS89 MUR129	Irene	75 nœuds / 4800 cœurs	30h 10min	22h 44min	35 700
LS89 MUR235	Occigen	80 nœuds / 1920 cœurs	170h 34min	129h 55min	78 000
FACTOR	Kraken	15 nœuds / 360 cœurs	297h 06min	151h 28min	52 500

Table 4.14: Temps de simulation pour chaque application pour les cas de référence et LTS. Les détails de la configuration des supercalculateurs sont donnés dans la Table 4.15

	Node
Kraken	2 processeurs Intel Skylake Xeon Gold 6140 CPU (18 cœurs chacun) à 2.3 GHz, avec 96 GB de RAM DDR4
Occigen	2 processeurs Haswell E5-2690V3 CPU (12 cœurs chacun) à 2.6 GHz, avec 64 GB de RAM DDR4
Irene	1 processeur Intel Xeon Phi 7250 CPU (64 cœurs) à 1.4 GHz, avec 96 GB de RAM DDR4

Table 4.15: Configuration des supercalculateurs utilisés.

Pour finir, l'évolution de l'efficacité de la méthode LTS ou *scaling* en fonction du nombre de cœurs est examinée. Dans le code AVBP, c'est la librairie MPI qui est utilisée pour permettre la parallélisation des opérations. L'étude du *scaling* est réalisée avec la turbine LS89 sur le point de fonctionnement MUR129 décrit précédemment. Les résultats sont obtenus sur le supercalculateur Occigen évoqué au-dessus et sont présentés sur la Fig. 4.75. La valeur du facteur d'accélération ou *scale-up factor* (appelé *scale-up factor* pour le différencier du *speedup* lié à la méthode LTS) pour un nombre p de cœurs est définie comme le ratio entre le temps CPU de la simulation avec p cœurs et le temps CPU de la simulation de référence avec le plus petit nombre de cœurs.

Premièrement, les résultats montrent que pour les deux simulations (référence et LTS), le facteur d'accélération varie linéairement en fonction du nombre de cœurs (courbes bleues sur la Fig. 4.75). Ce comportement est indépendant de la méthode LTS en elle-même. Il signifie simplement que le code AVBP est bien optimisé et que sur une configuration fixée, le doublement du nombre de cœurs donne par exemple lieu à approximativement une division par deux du temps de retour. À noter que pour les simulations LTS, le nombre de cœurs alloué à chaque instance (ou chaque sous-domaine) est calculé à partir de la charge théorique (qui est fonction du nombre de cellules dans chaque sous-domaine et du ratio entre les pas de temps N_{dt}). Cette répartition est déterminée avant le lancement de la simulation et reste inchangée pendant toute sa durée. Par ailleurs, contrairement à d'autres stratégies décrites dans la littérature [249, 226], une même partition attribuée à un processeur ne contient que des cellules partageant le même pas de temps.

Enfin, sur la même Fig. 4.75, la courbe rouge trace l'évolution du gain en temps de calcul réalisé par la méthode LTS (désigné par S_p tout au long du chapitre) en fonction du nombre de cœurs. Pour un nombre de cœurs p, le S_p correspondant est simplement obtenu en faisant le ratio entre le temps de calcul du cas de référence et celui du cas LTS. La valeur théorique du S_p est calculée à partir de N_n et N_{dt}, comme décrit au début du chapitre. Comme le montre l'évolution de la courbe, le S_p reste relativement constant et très proche la valeur théorique (courbe rouge pointillée). Ainsi, quel que soit le nombre de cœurs utilisé, le gain en temps de calcul de la méthode LTS reste presque identique.

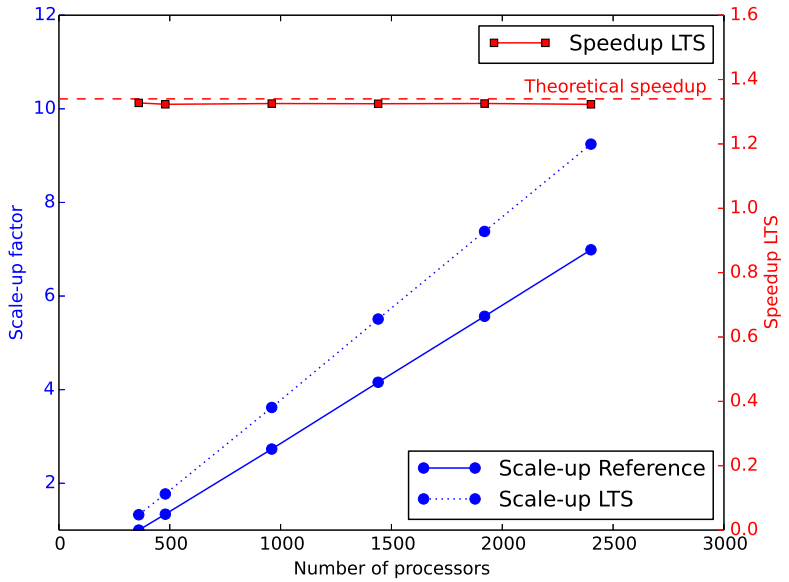


Figure 4.75: Facteur d'accélération des simulations de référence et LTS en fonction du nombre de cœurs pour la configuration MUR129.

4.7 Conclusion

En conclusion, la méthode LTS pour un code LES introduite dans ce chapitre a été validée et analysée en plusieurs étapes. Tout d'abord, les gains potentiels de la méthode sont présentés à l'aide d'un calcul simple sur un domaine fictif. Avec une définition intelligente des sous-domaines, cette analyse démontre clairement les intérêts de la méthode. Par la suite, il est expliqué que la mise en place d'une simulation avec des pas de temps locaux nécessite une capacité de couplage entre plusieurs sous-domaines. Dans le code AVBP, ce couplage est rendu possible par la méthode MISCOG déjà utilisée dans le cadre de simulations turbomachines avec des parties fixes et tournantes. L'utilisation de cette méthode implique en outre la définition d'une région de superposition entre les sous-domaines pour permettre l'échange des grandeurs conservatives. Ainsi, grâce à une analyse matricielle sur un cas 1D différences finies équivalent, l'impact de l'interface entre les sous-domaines est mesuré. L'étude a démontré que le nombre de nœuds à utiliser dans la région de superposition est dépendant du schéma numérique utilisé et a un effet direct sur l'ordre du schéma.

À partir de cette étape, il a été possible d'introduire la méthode de pas de temps local sur deux cas de validation simples. Le premier correspond à la convection d'une onde acoustique monodimensionnelle. Dans le cas LTS, le domaine initial est divisé en trois sous-domaines avec un pas différent pour la partie centrale. L'ordre spatial des schémas numériques utilisés est comparé à une simulation de référence avec un pas de temps unique. Les résultats obtenus sont en accord avec les propriétés théoriques des schémas et la validation est réussie dans ce cas. Le deuxième cas de validation utilise un principe similaire pour valider la méthode dans le cas de la convection d'un vortex isentropique en 2D. Le domaine est aussi divisé en trois sous-domaines avec, dans le cas LTS, un pas de temps différent pour le domaine central. De la même manière, grâce à une comparaison avec une simulation de référence, il est montré que les ordres spatiaux des schémas LW, TTG4A et TTGC sont conservés.

À la suite de la validation de la méthode sur des cas simples et au vu des résultats encourageants obtenus, la méthode de pas de temps local est ensuite appliquée à des simulations LES 3D réelles. Le canal turbulent est le premier cas utilisé pour appliquer la méthode. Puisque cette configuration requiert un raffinement très fin proche de la paroi pour obtenir une LES résolue en paroi, la division en sous-domaines apparaît naturellement en isolant la région proche paroi du reste du canal. En termes de résultats, aucune différence n'est visible entre la simulation de référence et la simulation LTS. Par ailleurs, les deux simulations montrent aussi un très bon accord avec le cas

DNS considéré pour comparer les deux WRLES. La deuxième application s'intéresse à la turbine LS89. Comme pour le cas du canal turbulent, le choix de cette configuration est motivé par la présence d'un grand nombre de cellules dans la région proche paroi pour correctement prédire l'écoulement autour de la pale. Par conséquent, la zone autour de la pale est isolée dans son propre sous-domaine pour bénéficier des gains potentiels de la méthode LTS. Pour les deux points de fonctionnement décrits dans ce chapitre (MUR129 et MUR235), les résultats sont très satisfaisants. La comparaison avec les données expérimentales disponibles et entre les simulations de référence et LTS montrent des résultats similaires, tout en permettant un gain en temps de calcul de 25 % pour les cas LTS. La troisième application s'intéresse à une configuration complète de turbomachine. Le domaine de calcul inclut un plénum qui alimente un injecteur positionné en amont d'une chambre de combustion, qui est elle-même suivie par un étage et demi d'une turbine. L'analyse des pas de temps locaux sur cette configuration a montré que les plus petites cellules du domaine qui requièrent les plus petits pas de temps étaient localisées dans le jeu en tête de pale de rotor et autour de l'injecteur à cause de la taille réduite des pales. À la suite de ces observations, ces deux régions sont isolées du domaine initial dans leurs propres sous-domaines pour permettre une relaxation de la contrainte CFL partout ailleurs. Une comparaison ente les simulations standard et LTS montrent que très peu de différences sont visibles, confirmant que la méthode de pas de temps local peut être appliquée à ce type de configuration pour réduire le coût calcul sans dégradation des capacités de prédiction de la LES.

Ainsi, ce chapitre a présenté l'implémentation et l'utilisation d'une méthode de pas de temps local dans un code LES. La méthodologie est validée sur de multiples cas et a montré sa capacité à conserver les ordres de convergence des schémas numériques utilisés. Sur des applications plus complexes, l'utilisation de la méthode de pas de temps local a aussi donné de très bons résultats tout en permettant un gain en termes de coût CPU compris entre 20 % et 50 % selon les configurations. Une des perspectives à cette étude pourrait être la simplification de la mise en place d'une simulation avec pas de temps local. Actuellement, il est nécessaire de décomposer manuellement le domaine initial en plusieurs sous-domaines et de mailler séparément chacun d'entre eux. Par ailleurs, cette décomposition en plusieurs sous-domaines ne peut être effectuée qu'à partir d'une analyse préalable des pas de temps locaux du domaine pour permettre de diviser efficacement la configuration initiale, puisque le pas de temps local dépend du volume de chaque cellule mais aussi de la vitesse locale de l'écoulement et donc de la physique dans cette région (ce qui est difficile à anticiper). Il est possible d'imaginer une méthode pour laquelle la division en sous-domaines et le choix des pas de temps se feraient automatiquement en fonction des contraintes de la simulation. Cet aspect permettrait de réduire le temps requis pour mettre en place une simulation LTS par rapport à une simulation standard. À noter que par exemple, dans le cas d'une simulation turbomachine rotor/stator, le domaine est déjà divisé en plusieurs sous-domaines fixes et tournants. L'application de la méthode dans ce cas particulier est donc plus directe.

Chapitre 5

Génération de conditions limites réalistes à l'interface entre plusieurs composants d'une turbomachine

> *« La science n'a pas de patrie, parce que le savoir est le patrimoine de l'humanité, le flambeau qui éclaire le monde. »*
>
> — Louis Pasteur

5.1 Introduction et motivations 231
5.2 Présentation de la méthode *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* (SPOD) 233
5.2.1 Bases théoriques pour le calcul de modes SPOD à partir d'une base de données de *snapshots* 233
5.2.2 Reconstruction de la base de données initiale 238
5.2.3 Choix de la norme du produit scalaire 239
5.2.4 Choix des paramètres de la décomposition modale SPOD 241
5.3 Simulation intégrée de référence : configuration FACTOR 241
5.3.1 Détails de la configuration 241
5.3.2 Description de l'écoulement 244
5.3.3 Génération de la base de données instationnaire 250
5.3.4 Décomposition modale de la base de données : comparaison entre SPOD, POD et DMD 254
5.4 Construction d'une condition limite d'entrée instationnaire 263
5.4.1 Définition de nouvelles conditions limites à partir de la décomposition modale SPOD 263
5.4.2 Analyse des champs reconstruits 266
5.4.3 Effets des conditions limites sur la prédiction des calculs isolés 269
5.4.4 Comparaison des cartographies 2D et des profils 1D aux plans 40 et 41 273
5.4.5 Températures adiabatiques en paroi 278
5.4.6 Plans normaux à la surface de pale le long de la corde 281
5.4.7 Surcoût de la condition limite instationnaire 284
5.5 Conclusion et perspectives de l'étude 285

5.1 Introduction et motivations

Le couplage entre différents composants d'une turbomachine est un sujet d'importance capitale pour les motoristes. Le comportement et les performances d'un composant isolé sont en effet souvent largement modifiés quand celui-ci est installé dans une configuration complète, dégradant les performances et/ou la durée de vie dans certains cas. Numériquement, il est possible d'étudier

ces phénomènes en réalisant des simulations intégrées de plusieurs composants d'une turbomachine comme illustré au tout début de ce manuscrit. Ces simulations instationnaires, bien que très complexes à mettre en œuvre, sont souvent requises pour capturer correctement les interactions spatiales et temporelles qui apparaissent aux interfaces. De plus, pour des raisons de stabilité, le nombre de pales dans les différents étages d'une turbomachine ne partagent le plus souvent aucun diviseur commun. Ce qui signifie que numériquement, la configuration complète ne peut pas être divisée en plus petits secteurs en utilisant des conditions de périodicité. Ainsi, pour être capable de simuler avec précision le couplage multi-composants sans réduction du nombre de pale ou sans hypothèses simplificatrices additionnelles, la meilleure option est de réaliser une simulation à 360° de la turbomachine complète. Malgré les progrès constants des capacités de calcul, très peu d'exemples de simulations complètes d'un moteur sont disponibles dans la littérature et dans tous les cas, ces simulations restent très coûteuses [181, 183, 215, 216]. Par conséquent, pour les motoristes, cette solution n'est pas envisageable aujourd'hui lors des phases de conception et d'autres options doivent être considérées, en particulier la simulation individuelle de composants isolés. Une des clefs à l'utilisation robuste et efficace de la simulation en industrie repose donc sur la capacité à reproduire le plus fidèlement possible l'effet d'un composant amont sur la simulation réduite et isolée du composant d'intérêt. Malgré cela, les méthodes utilisées actuellement dans l'industrie, notamment au niveau des conditions limites, présentent plusieurs limites. Il est par exemple difficile de reproduire le niveau de turbulence d'un composant amont, ainsi que les longueurs caractéristiques de la turbulence. La corrélation entre le champ de vitesse et le champ de température, qui est complexe à générer à partir d'une condition limite, joue aussi un rôle important particulièrement pour les composants situés en aval de la chambre de combustion. Au final, ce constat accentue l'importance des conditions limites (conditions limites amont et aval) et plus spécifiquement l'importance d'utiliser des conditions limites capables de reproduire l'effet des composants amont et aval autour d'un composant isolé. Dans la suite, ce point particulier est spécifiquement abordé en complément des autres points de ce travail.

L'objectif est ici de comprendre l'utilisation de conditions limites réalistes appliquées à des simulations de composants isolés d'une turbomachine en prenant en compte les instationnarités de l'écoulement à l'interface entre les composants. La capacité à reproduire la dynamique complexe des écoulements turbulents par un petit nombre de modes les plus énergétiques est à ce titre cruciale pour analyser et modéliser la physique complexe à un coût de mémoire assez faible. La décomposition aux valeurs propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est habituellement utilisée pour extraire des modes orthogonaux en espace à partir d'une série de *snapshots* de l'écoulement à des temps physiques différents. Dans sa forme standard, la POD [174, 253] est calculée dans le domaine temporel, mais elle peut aussi être reformulée dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine fréquentiel, la méthode est appelée *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* [268]. Les modes obtenus varient à la fois spatialement et temporellement et sont orthogonaux pour un produit scalaire spatio-temporel. Ce produit scalaire est choisi pour étudier correctement la cohérence spatio-temporelle de la base de données comme détaillé ci-après. Dans ce contexte, la SPOD permet par exemple d'identifier les fréquences les plus énergétiques de la base de données au niveau de l'entrée d'une configuration obtenue en simulant aussi l'amont d'un composant isolé. Grâce au spectre obtenu, il est possible de reconstruire partiellement ou complètement la base de données initiale dans le but de créer des conditions limites d'entrée instationnaires avec des fluctuations de vitesse et de température réalistes. Une méthode de reconstruction similaire a par exemple était utilisée par Ghate [109] pour reproduire la sillage d'un disque placé dans un écoulement. La méthode de reconstruction décrite dans ce chapitre diffère par le fait que dans [109], la reconstruction SPOD est en plus enrichie par des modes de Gabor pour obtenir les petites échelles de la turbulence [107, 108].

Malgré les capacités d'analyse de la cohérence spatio-temporelle d'une base de données initiale, l'utilisation de la SPOD (tout comme la POD par ailleurs) posent certaines questions qui doivent être considérées. Premièrement, le choix du produit scalaire va impacter le spectre obtenu par la méthode SPOD. Dans une configuration dont le but est d'étudier l'effet combiné de la migration d'un point chaud et d'un écoulement swirlé sur les propriétés aéro-thermiques de la turbine, le produit scalaire choisi doit prendre en compte *a minima* la vitesse et la température à l'interface.

Deuxièmement, comme mentionné précédemment, pour réduire le coût global de stockage de la base de données enregistrée, des reconstructions partielles sont créées, ce qui soulève la question de l'impact de l'information omise sur la condition limite d'entrée obtenue. Enfin, l'utilisation de la SPOD est significativement plus complexe à mettre en place par rapport à des conditions limites d'entrée standards qui utilisent des valeurs constantes moyennées en temps ou des cartographies 2D. Les apports de cette méthode doivent donc être substantiels pour justifier son utilisation et apparaître comme un candidat crédible dans des configurations différentes par rapport à des conditions limites standards.

Ce chapitre s'attèle donc à évaluer l'approche SPOD pour la génération de conditions limites et s'organise en trois parties principales. La première s'attache à décrire précisément la théorie liée à la méthode de décomposition spectrale aux valeurs propres. En particulier, des détails sont donnés sur la méthodologie permettant de réaliser cette décomposition modale à partir d'une base de données. La seconde partie introduit la configuration intégrée FACTOR composée de la chambre de combustion et de la turbine qui sera utilisée pour appliquer la méthode SPOD. En particulier, le plan à l'interface entre la chambre et la turbine est enregistré à intervalles réguliers pour générer une base de données instationnaire. Par le biais de plusieurs décompositions modales, les informations rendant compte du couplage entre les deux composants sont extraites et analysées. Enfin, dans la dernière partie, la SPOD est utilisée pour générer des conditions plus réalistes pour la configuration turbine isolée. Ce nouveau type de condition limite instationnaire est pour finir comparé à des conditions limites plus traditionnelles et à la simulation intégrée chambre/turbine pour démontrer sa capacité à reproduire avec précision le couplage multi-composants.

5.2 Présentation de la méthode *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* (SPOD)

Le but de cette section est d'introduire la théorie derrière la méthode de décomposition spectrale aux valeurs propres ou *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* (SPOD) en anglais.

5.2.1 Bases théoriques pour le calcul de modes SPOD à partir d'une base de données de *snapshots*

Pour faciliter la lecture de ce chapitre, plusieurs notations utilisées dans la suite sont introduites,

- le vecteur $\mathbf{q}_k$ représente un état instantané de l'écoulement au temps t_k d'un ensemble discret de points du domaine spatial Ω,
- l'entier N_x correspond au nombre de points qui constitue le domaine spatial Ω,
- N_{var} fait référence au nombre de variables de l'écoulement considérées,
- N est égal à la taille totale du vecteur $\mathbf{q}_k$, soit le produit entre le nombre de points du maillage N_x et le nombre de variables de l'écoulement N_{var} ($N = N_{\text{var}} \times N_x$),

Pour être plus précis, le vecteur $\mathbf{q}_k$, appelé *snapshot* de l'écoulement, est défini comme un vecteur monodimensionnel de taille N pour chaque instantané de l'écoulement.

L'ensemble des données disponible est supposé contenir N_t champs instantanés de l'écoulement, régulièrement espacé en temps, $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, *i.e* N_t *snapshots* de l'écoulement. Il est ainsi possible d'exprimer l'ensemble de la base de données grâce à la forme matricielle suivante,

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{N_t}] \in \mathbb{R}^{N \times N_t}. \tag{5.1}$$

Pour cet ensemble de réalisations de l'écoulement dépendant du temps, le produit scalaire associé se définit par,

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \int_\Omega \mathbf{q}_1^*(x)\mathbf{W}(x)\mathbf{q}_2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.2}$$

avec $\cdot^*$ dénotant l'opérateur adjoint et $\mathbf{W}$ est la matrice Hermitienne définie positive de dimension correspondante désignée comme une matrice de poids pour ce produit scalaire. Différentes expressions sont possibles pour la matrice $\mathbf{W}$ et ce choix sera abordé par la suite.

À noter que si la base de données n'est pas centrée, c'est-à-dire que sa moyenne temporelle n'est pas nulle, alors cette moyenne temporelle est soustraite à chaque *snapshot* pour obtenir les fluctuations instantanées de l'écoulement $\mathbf{q}'$ telles que,

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}\,, \tag{5.3}$$

avec $\overline{\mathbf{q}}$ la moyenne temporelle de l'ensemble des *snapshots* $\mathbf{q}$. De plus, dans la suite du texte, le symbole $'$ sera sous-entendu pour éviter d'alourdir inutilement les expressions.

À partir de cette base de données des fluctuations exprimée sous forme matricielle, l'étape suivante consiste à estimer correctement la densité spectrale de puissance. Pour obtenir une moyenne du spectre de la base de données sur plusieurs réalisations de l'écoulement, la méthode de Welch [288] est couramment utilisée. La matrice initiale $\mathbf{Q}$ est donc divisée en plusieurs blocs (pouvant se recouvrir). Cette étape permet d'obtenir une estimation convergente des densités spectrales. Ainsi, le biais de l'estimation est diminué en moyennant temporellement, ce qui permet de réduire le bruit aux dépens de la résolution en fréquence. Cette problématique sera plus amplement détaillée dans la suite quand la méthode SPOD sera appliquée à des cas concrets. Au final, la matrice de données de chaque bloc (n) s'exprime comme,

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \left[\mathbf{q}_1^{(n)}, \mathbf{q}_2^{(n)}, \ldots, \mathbf{q}_k^{(n)}, \ldots, \mathbf{q}_{N_f}^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{N \times N_f}, \tag{5.4}$$

où le *snapshot* d'indice k du bloc d'indice n correspond à $\mathbf{q}_k^{(n)} = \mathbf{q}_{k+(n-1)(N_f-N_o)}$ dans la matrice globale des *snapshots*, N_f est le nombre de *snapshots* dans chaque bloc et N_o est le nombre de *snapshots* dans la région de recouvrement entre chaque bloc.

Le nombre total de blocs N_{blk} peut être déterminé en fonction de N_t, N_f et N_o,

$$N_{\mathrm{blk}} = \left\lfloor \frac{N_t - N_\mathrm{o}}{N_f - N_\mathrm{o}} \right\rfloor, \tag{5.5}$$

avec $\lfloor\cdot\rfloor$ correspondant à l'opérateur partie entière.

Ainsi grâce à l'hypothèse d'ergodicité [281], l'ensemble des blocs défini précédemment peut être considéré comme un ensemble de réalisations de l'écoulement. Ensuite, la transformée de Fourier discrète est calculée pour chaque bloc. À cette étape, il est possible d'introduire une fonction de fenêtrage pour atténuer le phénomène de Gibbs. Ce phénomène correspond à un effet de bord qui se produit au niveau des discontinuités entre les blocs. Le recouvrement entre les blocs permet de limiter ce phénomène. Les fonctions de fenêtrage permettent ainsi de tenir compte de ce recouvrement pour obtenir une transformée de Fourier non modifiée par le recouvrement. Pour cela, les fonctions de fenêtrage classiques accordent plus de poids aux données situées au centre du bloc, alors que le recouvrement des blocs permet d'éviter la perte d'information liée à la différence de poids entre le centre et les bords du bloc. La transformée de Fourier du bloc (n) s'écrit,

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(n)} = \left[\hat{\mathbf{q}}_1^{(n)}, \hat{\mathbf{q}}_2^{(n)}, \ldots, \hat{\mathbf{q}}_{N_f}^{(n)}\right], \tag{5.6}$$

avec,

$$\hat{\mathbf{q}}_k^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{N_f}} \sum_{j=1}^{N_f} w_j \mathbf{q}_j^{(n)} e^{-\mathrm{i}2\pi(k-1)\frac{j-1}{N_f}}, \tag{5.7}$$

pour $k = 1, ..., N_f$ et $n = 1, ..., N_{\text{blk}}$ et où le scalaire w_j correspond à la valeur nodale de la fonction de fenêtrage. Dans la littérature, de nombreuses fonctions de fenêtrage sont disponibles, dont un grand nombre est cité dans le papier de Heinzel [126] (fonction triangulaire de Barlett, fonction de Hann, fonction de Hamming, fonction de Blackman, *etc.*). Dans cette étude, la fonction de fenêtrage de Hamming est utilisée et son expression s'écrit,

$$w_j = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{N_f - 1}\right), \quad \text{avec } j = 1, ..., N_f. \tag{5.8}$$

Dans l'étude présentée ici, la matrice globale des données contient uniquement des variables de l'écoulement, qui sont donc purement réelles. Par conséquent, le spectre obtenu à la suite de la transformée de Fourier discrète est symétrique. Ce qui donne l'axe fréquentiel suivant,

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{k}{N_f \Delta t} & \text{pour } k = 0, ..., \dfrac{N_f}{2} \quad \text{si } N_f \text{ est pair,} \\ \dfrac{k}{N_f \Delta t} & \text{pour } k = 0, ..., \dfrac{N_f - 1}{2} \quad \text{si } N_f \text{ est impair.} \end{cases} \tag{5.9}$$

Ainsi, seulement la moitié du spectre est conservé et les coefficients de Fourier à chaque fréquence f_k sont corrigés pour tenir compte de cette propriété,

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{k,corrigé}}^{(n)} = 2 \times \hat{\mathbf{q}}_k^{(n)} \quad \left| \begin{array}{ll} \text{pour } k = 1, ..., \dfrac{N_f}{2} & \text{si } N_f \text{ est pair,} \\ \text{pour } k = 1, ..., \dfrac{N_f - 1}{2} & \text{si } N_f \text{ est impair.} \end{array} \right. \tag{5.10}$$

Au final, grâce à la méthode de Welch, la densité spectral de puissance à chaque fréquence f_k est estimée par,

$$\mathbf{S}_{f_k} = \frac{\Delta t}{s N_{blk}} \sum_{n=1}^{N_{blk}} \hat{\mathbf{q}}_k^{(n)} \left(\hat{\mathbf{q}}_k^{(n)}\right)^*, \tag{5.11}$$

avec $s = \sum_{j=1}^{N_f} w_j / N_f$ qui correspond à la normalisation de la fonction de fenêtrage.

Les coefficients de Fourier à une fréquence donnée f_k de chaque bloc sont ensuite regroupés au sein d'une nouvelle matrice $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$,

$$\hat{\mathbf{Q}}_{f_k} = \sqrt{\kappa}\left[\hat{\mathbf{q}}_k^{(1)}, \hat{\mathbf{q}}_k^{(2)}, \ldots, \hat{\mathbf{q}}_k^{(N_{blk})}\right] \in \mathbb{R}^{N \times N_{blk}}, \tag{5.12}$$

avec $\kappa = \Delta t / (s N_b)$.

Un exemple d'application de la méthode de Welch pour estimer la densité spectrale de puissance est donné en Fig. 5.1. Dans cet exemple, chaque *snapshot* est composé de deux variables de l'écoulement u et T ($N_{\text{var}} = 2$) sur un maillage qui contient N_x points. Ce qui donne une taille totale de $2 \times N_x$ pour chaque *snapshot*. Chaque bloc contient 6 *snapshots* ($N_f = 6$) et la région de recouvrement est composée de 2 *snapshots* ($N_o = 2$). Comme mentionné précédemment, les variables de l'écoulement étant réelles, seules les fréquences positives sont conservées, d'où la présence de 3 fréquences pour chaque bloc de $\hat{\mathbf{Q}}$ ($N_{\text{freq}} = N_f/2$). Enfin, pour chaque fréquence f_k, la matrice $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$ est formée à partir des coefficients de la fréquence f_k de chaque bloc.

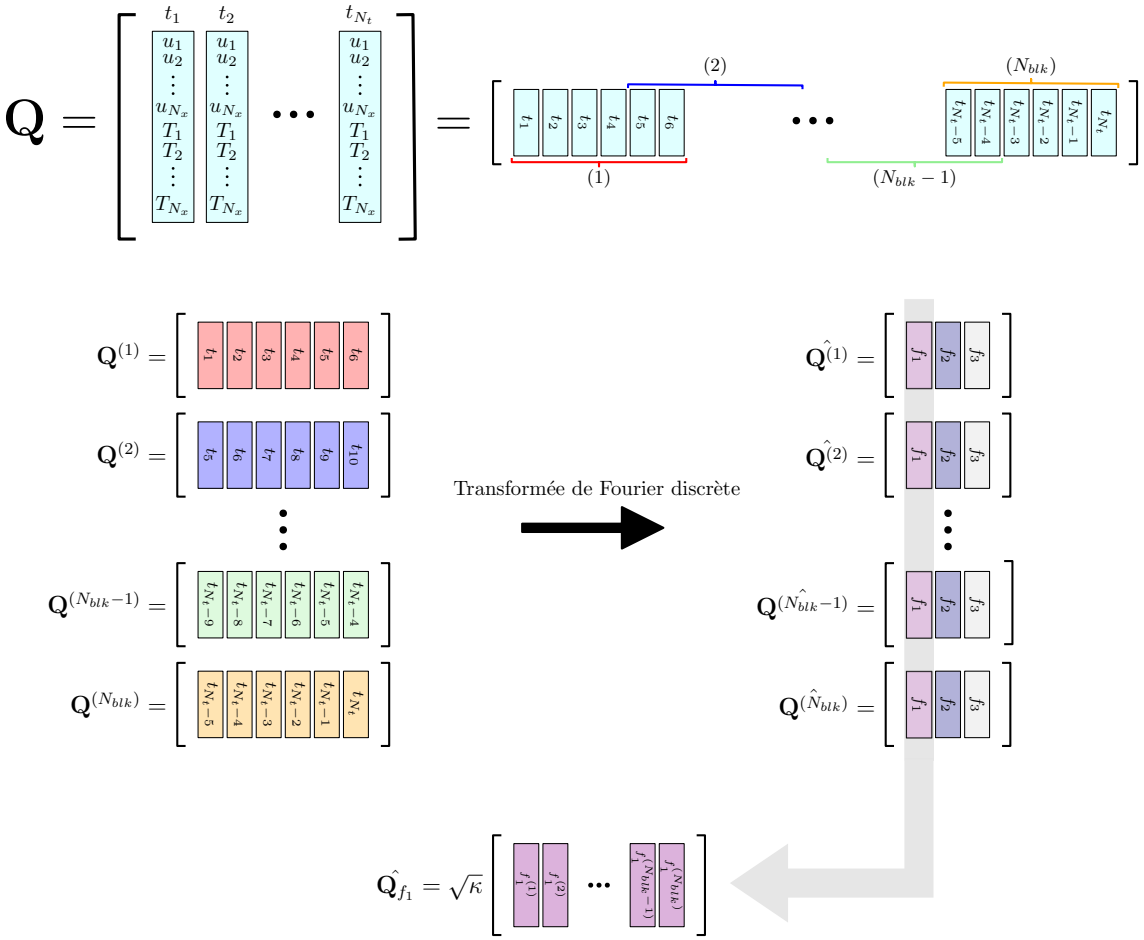


Figure 5.1: Schéma simplifié de l'utilisation de la méthode de Welch pour obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance.

En utilisant la notation introduite précédemment, l'estimation de la densité spectrale de puissance à la fréquence f_k s'écrit,

$$\mathbf{S}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}^{*}. \tag{5.13}$$

Grâce à la méthode de Welch, il est maintenant possible d'obtenir un estimation de la densité spectrale de puissance qui converge quand le nombre de blocs N_{blk} et le nombre de *snapshots* N_f

augmentent [288], ce qui n'est pas le cas si la densité spectrale de puissance est directement estimée à partir d'une transformée de Fourier de la matrice complète des *snapshots* $\mathbf{Q}$ [104].

Au final, le problème aux valeurs propres de la méthode SPOD correspond à la résolution d'un problème aux valeurs propres d'une matrice de taille $N \times N$ pour chaque fréquence f_k,

$$\mathbf{S}_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k} = \mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k}. \tag{5.14}$$

Ce problème aux valeurs propres peut être résolu directement. Cependant, en règle générale, le nombre de blocs N_{blk} est largement plus petit que le problème discrétisé de taille N et il est ainsi moins coûteux de résoudre le problème par la méthode des *snapshots*. Le problème peut ainsi être ré-exprimé de la manière suivante,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k} = \mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k}, \\
\implies \quad &\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k} = \mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k} \qquad \big| \times \hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W} \\
\implies \quad &\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k}, \qquad \big| \times \mathbf{\Lambda}^{-1/2}_{f_k} \\
\implies \quad &\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}_{f_k}, \\
\implies \quad &\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k} = \mathbf{\Theta}_{f_k}\mathbf{\Lambda}_{f_k},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

avec

$$\mathbf{\Theta}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{f_k}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}_{f_k}. \tag{5.16}$$

Une fois ré-exprimé, le problème aux valeurs propres à résoudre est maintenant de dimensions $N_{\text{blk}} \times N_{\text{blk}}$ et ses valeurs propres sont identiques aux valeurs propres non nulles du problème initial de l'Eq. (5.14) [268]. Après avoir obtenus les vecteurs propres du problème (5.15), les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres non nulles du problème (5.14) sont récupérés par la relation,

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k}, \tag{5.17}$$

avec $\tilde{.}$ qui fait référence aux valeurs propres non nulles du problème (5.14) initial.

Cette relation est obtenue à partir des manipulations suivantes,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Theta}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k}, \qquad \big| \times \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} \\
\Leftrightarrow \quad &\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k}, \qquad \big| \times \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k} \\
\Leftrightarrow \quad &\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}_{f_k}, \qquad \big| \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{f_k}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k} = \tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k} \\
\Leftrightarrow \quad &\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{f_k} = \tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Au final, pour chaque fréquence f_k, les valeurs propres de son problème SPOD associé résolu par la méthode des *snapshots* sont données par la matrice diagonale $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}$ et les modes propres du problème sont stockés dans chaque colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}$.

5.2.2 Reconstruction de la base de données initiale

Reconstruction complète

Grâce à la résolution du problème aux valeurs propres, la densité spectrale de puissance $\mathbf{S}_{f_k}$ peut s'exprimer comme,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}^* &= \tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}^*, \\ &= \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}\mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}^{-1/2}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}^*,\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\implies \hat{\mathbf{Q}}_{f_k}^* = \mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}^{1/2}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}^*, \tag{5.20}$$

$$\implies \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} = \left(\mathbf{\Theta}_{f_k}\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}^{1/2}\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}^*\right)^*. \tag{5.21}$$

À partir des valeurs et vecteurs propres, il est ainsi possible de reconstituer la matrice $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$ qui contient les coefficients de Fourier de chaque bloc pour la fréquence f_k. Si ces coefficients sont groupés par bloc, par transformée de Fourier inverse, le signal initial de chaque bloc $\mathbf{Q}^{(n)}$ est retrouvé.

En conclusion, si l'ensemble des fréquences et des modes est conservé, la base de données initiale est exactement obtenue. Cette procédure n'a évidemment aucun intérêt. Cependant, grâce à cette formulation il est possible de ne sélectionner qu'une partie des modes et/ou des fréquences pour reconstruire partiellement la base de données.

Reconstruction partielle : sélection des modes et des fréquences

Dans l'expression de la matrice $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$ donnée par l'Eq. (5.21), trois matrices apparaissent :

- $\mathbf{\Theta}_{f_k}$ de dimensions $N_{blk} \times N_{blk}$ qui contient l'ensemble des vecteurs propres du problème (5.15),
- $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}$, une matrice diagonale de dimensions $N_{blk} \times N_{blk}$ contenant les valeurs propres du problème (5.15) (qui sont aussi toutes les valeurs propres non nulles de (5.14)),
- et $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}$ de dimensions $N_{blk} \times N$ qui contient les vecteurs propres des valeurs propres non nulles de (5.14).

Dans le calcul de $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$, il est possible de prendre en compte un nombre plus petit de modes que l'ensemble des modes disponibles (égal à N_{blk}). Comme dans les différentes matrices, les modes sont classés par ordre d'énergie décroissante, les premiers modes sont les modes les plus énergétiques. Pour la suite, le nombre de modes utilisés pour la reconstruction est noté N_{modes}, avec $N_{modes} \leq N_{blk}$. En utilisant ce paramètre, les dimensions des matrices dans l'expression de $\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}$ sont les suivantes :

- $N_{\text{blk}} \times N_{\text{modes}}$ pour $\mathbf{\Theta}_{f_k}$,
- $N_{\text{modes}} \times N_{\text{modes}}$ pour $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{f_k}$ et,
- $N_{\text{modes}} \times N$ pour $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{f_k}$.

Et ce processus de sélection des modes est répété pour chaque fréquence f_k. Cependant, de la même manière que les modes ont été sélectionnés, seulement une partie des fréquences peut être considérée dans la transformée de Fourier inverse de chaque bloc. Le nombre de fréquences retenues est pour la suite noté n_f. De fait, le choix des valeurs N_{modes} et n_f permet de réaliser une

compression de la base de données initiales.

Dans une configuration où il n'y a pas de superposition entre les différents blocs (*i.e.* pour $N_o = 0$), le taux de compression n_c de la reconstruction par rapport à la base de données initiale s'exprime comme,

$$n_c = \frac{N_{\text{modes}}}{N_{blk}} \cdot \frac{n_f}{N_f}. \tag{5.22}$$

5.2.3 Choix de la norme du produit scalaire

Comme expliqué précédemment, la matrice qui définit le produit scalaire entre les vecteurs de la base de données qui représentent l'ensemble des représentations de l'écoulement est notée $\mathbf{W}$. Le choix fait pour cette matrice $\mathbf{W}$ a un impact direct sur l'optimalité et l'orthogonalité des modes obtenus par la décomposition modale [242]. Cette matrice du produit scalaire donne aussi une signification différente à la grandeur obtenue à la suite du produit scalaire. Les options les plus communes sont détaillées dans les sous-sections qui vont suivre.

Variance

Le choix le plus simple pour définir le produit scalaire consiste à prendre $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, *i.e.* à la définir comme la matrice identité. Ce choix implique que l'ensemble des points de la base de données, mais aussi l'ensemble des grandeurs choisies contribuent de la même manière au résultat final. Cette norme est donc nommée variance puisqu'elle permet de mesurer la variance de la base de données. Ce choix pose deux problèmes principaux. Premièrement, dans le cas d'un maillage non structuré quelconque, le volume nodal de chaque point du domaine est différent. Or, la norme introduite ne permet pas de tenir compte de cette différence. Ainsi, un volume nodal très petit contribuera autant au résultat final qu'un volume très grand, alors que dans la simulation, leur contribution à la dynamique de l'écoulement est bien différente. Deuxièmement, cette norme donne un poids identique à toutes les grandeurs contenues dans le vecteur des réalisations de l'écoulement. Cependant, dans le cas général, l'amplitude absolue des fluctuations de température est par exemple largement plus élevée que celle de la masse volumique. Ce choix pose donc simplement un problème de dimension. Les fluctuations de l'ensemble des grandeurs de la base de données sont considérées comme étant de même dimension.

Norme pondérée par le volume

La norme introduite ici vient résoudre le premier problème de la norme précédente, c'est-à-dire la contribution des points de la base de données avec des volumes différents. Cette norme permet de prendre en compte le volume local de chaque point de la base de données pour éviter qu'une région très discrétisée contribue de manière anormalement élevée à l'énergie de chaque mode. Dans le cas d'un maillage uniforme, cette norme est évidemment équivalente à la précédente.

$$\mathbf{W} = \int_V \mathrm{d}V. \tag{5.23}$$

Norme de l'énergie cinétique turbulente

Dans le cas où le vecteur des réalisations de l'écoulement contient uniquement les trois composantes de vitesse, *i.e.* $\mathbf{q} = [u, v, w]$, utiliser une norme pondérée par la volume pour les trois grandeurs (qui sont de même dimension) revient à définir un produit scalaire proportionnel à l'énergie cinétique turbulente ou *Turbulent Kinetic Energy* (TKE). Avec les choix suivants pour $\mathbf{q}$ et $\mathbf{W}$, le produit scalaire est donc proportionnel à l'intégrale de la TKE sur l'ensemble du domaine,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \int_V \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}V. \tag{5.24}$$

Norme de l'énergie acoustique

Dans un cas compressible, il est aussi possible de tenir compte des fluctuations de masse volumique dans la définition du produit scalaire. L'énergie acoustique totale d'une perturbation s'exprime alors comme,

$$E = \frac{1}{2}\left[\bar{\rho}u'^2 + \bar{\rho}v'^2 + \bar{\rho}w'^2 + \frac{\bar{a_0}^2\rho'^2}{\bar{\gamma}\bar{\rho}}\right], \tag{5.25}$$

avec a_0 la vitesse du son et $\bar{.}$ l'opérateur de moyenne temporelle.

Ainsi, pour obtenir un produit scalaire proportionnel à l'énergie acoustique totale, $\mathbf{q}$ et $\mathbf{W}$ sont définis comme,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \int_V \begin{bmatrix} \frac{\bar{a_0}^2}{\bar{\gamma}\bar{\rho}} & & & \\ & \bar{\rho} & & \\ & & \bar{\rho} & \\ & & & \bar{\rho} \end{bmatrix} \mathrm{d}V, \tag{5.26}$$

avec γ l'indice adiabatique.

Grâce à la définition de $\mathbf{W}$, des grandeurs de dimensions différentes sont combinées entre elles pour former une norme correspondant à une quantité représentative de la dynamique de l'écoulement. Dans ce cas précis, le deuxième problème de la norme variance est résolu.

Norme de l'énergie totale de la perturbation [50]

Dans le cas d'une simulation turbomachine, en particulier proche de la chambre de combustion, des fluctuations importantes de température sont présentes. Pour tenir compte à la fois de l'énergie totale acoustique dans un cas compressible et des fluctuations de température, la définition de l'énergie totale de la perturbation, introduite par [50] est utilisée,

$$E = \frac{1}{2}\left[\bar{\rho}u'^2 + \bar{\rho}v'^2 + \bar{\rho}w'^2 + \frac{\bar{a_0}^2\rho'^2}{\bar{\gamma}\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}\,\bar{R}\,T'^2}{(\bar{\gamma}-1)\bar{T}}\right], \tag{5.27}$$

avec R la constante des gaz parfaits.

La définition précédente permet donc de choisir $\mathbf{q}$ et $\mathbf{W}$ comme,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \int_V \begin{bmatrix} \frac{\bar{a_0}^2}{\bar{\gamma}\bar{\rho}} & & & & \\ & \bar{\rho} & & & \\ & & \bar{\rho} & & \\ & & & \bar{\rho} & \\ & & & & \frac{\bar{\rho}\,\bar{R}}{(\bar{\gamma}-1)\bar{T}} \end{bmatrix} \mathrm{d}V. \tag{5.28}$$

C'est cette norme qui sera utilisée dans la suite de l'étude pour tenir compte de l'ensemble des perturbations du domaine contenant la chambre de combustion et la turbine, puisqu'il est sujet à de fortes fluctuations de température. En effet, ces fluctuations joueront un rôle important dans la dynamique globale de l'écoulement.

5.2.4 Choix des paramètres de la décomposition modale SPOD

La fréquence maximale qui peut être capturée par la décomposition modale correspond simplement à la fréquence de Nyquist de la base de données, c'est-à-dire à la fréquence d'échantillonnage de la base de données, *i.e.*

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t}, \tag{5.29}$$

avec Δt la pas de temps entre les *snapshots* de l'écoulement.

Le temps total couvert par chaque bloc est simplement exprimé comme,

$$T_{blk} = N_f \times \Delta t, \tag{5.30}$$

avec, pour rappel, N_f le nombre de *snapshots* dans chaque bloc.

Grâce à la définition de T_{blk}, la discrétisation fréquentielle Δf du spectre SPOD s'écrit,

$$\Delta f = \frac{1}{T_{blk}} = \frac{2 f_{\max}}{N_f}. \tag{5.31}$$

La valeur de Δf correspond donc à la fréquence la plus faible (non nulle) qui peut être captée par la décomposition modale. À noter que la composante de la décomposition modale à la fréquence doit être proche de zéro si la moyenne temporelle du bloc est proche de la moyenne temporelle de l'ensemble de la base de données.

L'Équation (5.31) met en évidence le choix à faire lors de la définition des paramètres de la décomposition modale SPOD. Pour une durée totale de base de données fixée, une augmentation du nombre de blocs (et donc de modes) entraine inévitablement une diminution de la discrétisation fréquentielle de la décomposition modale. Il revient donc à l'utilisateur de faire les choix qui permettent d'obtenir un bon compromis entre nombre de modes et discrétisation fréquentielle.

Cette section a permis de donner les détails théoriques liés à la SPOD, en décrivant la méthodologie à utiliser pour réaliser la décomposition modale d'une base de données. Une attention particulière est accordée aux opérations permettant de reconstruire partiellement la base de données pour en réduire son coût de stockage tout en conservant les informations les plus significatives vis-à-vis de la dynamique de l'écoulement. Pour appliquer la méthode décrite, la section suivante s'intéresse à une simulation intégrée chambre/turbine dans laquelle le plan d'interface entre les deux composants est enregistré à intervalle régulier. Cela a pour conséquence de générer une base de données dans le cas d'une simulation couplée et ainsi permettre l'application de la méthode SPOD.

5.3 Simulation intégrée de référence : configuration FACTOR

5.3.1 Détails de la configuration

La configuration qui sera le sujet de l'étude présentée dans ce chapitre est la configuration FACTOR. La configuration complète est détaillée dans la Section 4.5.3. En résumé, le projet

FACTOR est dédié à l'analyse des interactions entre les chambres de combustion à mélange pauvre avec les turbines haute pression. Ce projet FACTOR a généré des données expérimentales autour de deux bancs : une chambre de combustion tri-secteur étudiée à l'UNIFI [21] et une chambre annulaire complète équipé de ses étages de turbine installée au DLR Goettingen [160].

L'objectif de cette étude est la compréhension des interactions et du couplage entre la chambre de combustion et la turbine, au moyen de diagnostics avancés tels que la SPOD. Contrairement à la Section 4.5.3, le domaine étudié se limitera au plénum, à la chambre de combustion et à l'étage fixe de la turbine.

D'un point de vue physique et recherche bibliographique, l'interaction de la chambre de combustion avec une turbine située en aval est un sujet très important pour les motoristes. Ainsi, plusieurs études ont déjà été faites sur diverses configurations pour en particulier comprendre les effets d'un point chaud sur l'écoulement de la turbine [12, 207, 26]. Pour la configuration FACTOR, de nombreuses LES de la chambre isolée ou intégrée avec la turbine en aval sont déjà disponibles dans la littérature [157, 17, 158, 15, 16, 67, 61]. En aval de l'injecteur, l'écoulement présente une zone de recirculation centrale dans la chambre de combustion et la séparation de cette zone de recirculation donne lieu à l'apparition d'un vortex ou *Precessing Vortex Core* (PVC) en anglais. Cette structure de l'écoulement est caractéristique de ce type de système d'injection puisqu'il permet d'accrocher la flamme à l'injecteur. Dans la configuration choisie, les *Nozzle Guide Vanes* (NGVs) sont positionnées de manière à ce que le point chaud provenant de l'injecteur impacte le bord d'attaque de la pale #2 (Fig. 5.2). Par ailleurs, à cause du mouvement de rotation induit par le système d'injection de carburant, la sortie de la chambre de combustion présente un niveau élevé de turbulence (avec une intensité de turbulence de 30 %), ainsi qu'une rotation résiduelle de l'écoulement et des non-uniformités de température [156, 67]. Les multi-perforations qui protègent les parois des températures élevées de la chambre jouent aussi un rôle important dans la dynamique de l'écoulement [179, 263]. Toutes ces caractéristiques expliquent en partie pourquoi il est difficile de réaliser des simulations de turbines haute pression isolées avec des conditions d'entrée réalistes.

Dans la suite, une première configuration contenant à la fois la chambre de combustion et les pales de turbine est considérée (Fig. 5.2). Dans une étude précédente, il a été montré que ce type de simulation était capable de reproduire avec précision les effets des non-uniformités de température générées par la chambre sur la turbine [156]. Comme mentionné précédemment, grâce à la propriété de périodicité de la configuration initiale, un secteur de 18° est simulé avec un alignement entre l'injecteur et le bord d'attaque de la deuxième pale de stator.

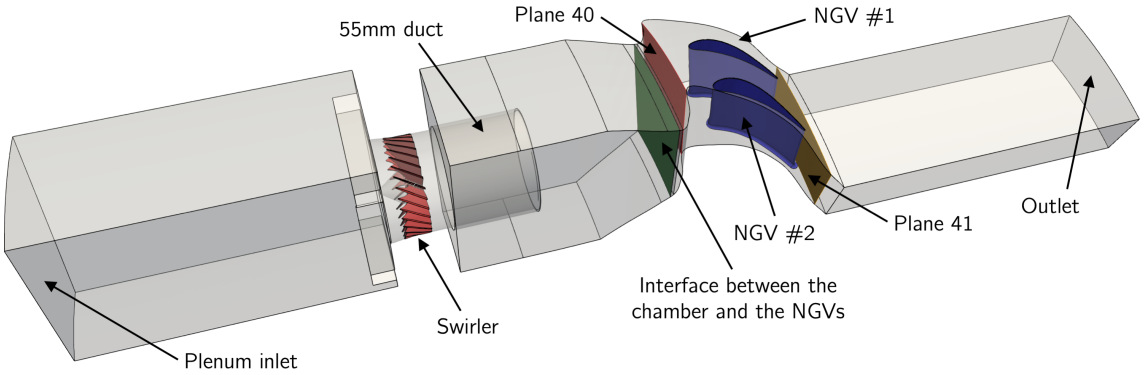


Figure 5.2: Simulation FACTOR intégrée chambre de combustion/turbine.

Cette simulation ainsi que toutes les simulations qui vont suivre dans cette section sont réalisées avec le code AVBP [244]. Le schéma Lax-Wendroff est utilisé et assure une précision de second ordre en espace et en temps [165]. La viscosité de sous-maille μ_{SGS} ou *Sub-Grid Scale* (SGS) *viscosity* est modélisée par le modèle *Wall-Adapting Local Eddy-viscosity* (WALE) [195]. Les parois de la chambre de combustion ainsi que celles de la turbine sont multi-perforées pour assurer leur refroidissement et pour reproduire les effets technologiques d'un moteur réel. La répartition

des débits au niveau des différentes injections et les températures associées sont résumées dans la Table 5.1 et leurs positions sont représentées en Fig. 5.3. Pour reproduire avec précision le schéma de perforation, les trous de refroidissement des parois de la chambre et de la surface des pales sont modélisés par un modèle d'injection hétérogène [34]. Ce modèle permet d'obtenir des résultats très similaires à une simulation avec maillage complet des trous (en maillant et en simulant explicitement le conduit de chaque trou) pour un coût de calcul beaucoup moins élevé [123].

Les maillages sont respectivement composés de 29.6M de cellules pour l'ensemble plénum/chambre de combustion et 12.4M de cellules pour les deux pales de stator. Des zones de raffinement sont positionnées autour des pales de l'injecteur, des parois de la chambre et des pales de la turbine. Le y^+ maximum atteint est de 120 pour les pales de *swirler*, 80 pour les parois de la chambre et 100 pour la turbine (le maximum se situe au niveau du bord de fuite). Tous les murs sont considérés comme adiabatiques et conformément aux valeurs de y^+ du maillage, la région proche paroi est modélisée par une loi de paroi logarithmique [243]. À noter qu'étant donné l'objectif de réaliser plusieurs simulations isolées des DHP avec des conditions d'entrée différentes, le raffinement du maillage est choisi proche d'une préconisation industrielle pour obtenir des résultats raisonnables tout en conservant un coût de calcul bas.

En accord avec les données expérimentales disponibles, l'entrée du plénum et les injections par multi-perforations sont définies comme des entrées avec débit imposé, alors que pour la condition de sortie, la pression est imposée. Toutes les conditions limites citées utilisent des propriétés de non-réflectivité nécessaire à la LES compressible, c'est-à-dire des conditions limites caractéristiques ou *Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition* [208, 118, 158].

	Débit [kg/s]	Température statique [K]
Entrée plénum	3.09 (0.1545)	513
Multi-perforations carter chambre	0.95 (0.0475)	300
Multi-perforations moyeu chambre	0.67 (0.0335)	300
Multi-perforation NGV #1	0.18 (0.009)	300
Multi-perforation NGV #2	0.18 (0.009)	300

Table 5.1: Valeurs des débits d'entrée et des multi-perforations pour la configuration 360°. Les valeurs correspondantes au secteur de 18° sont entre parenthèses.

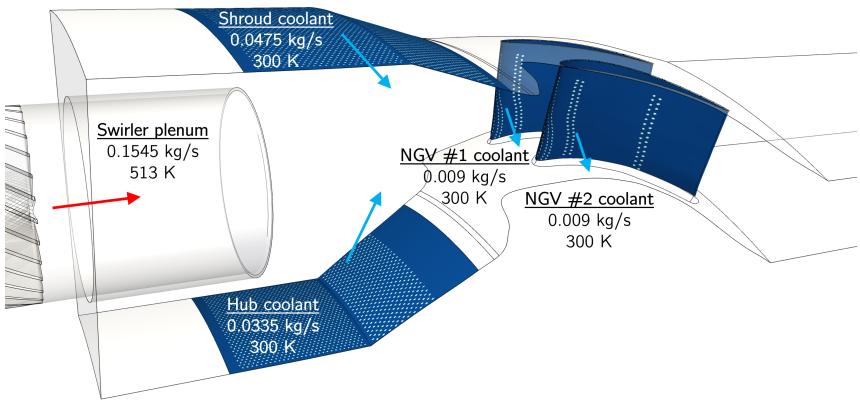


Figure 5.3: Visualisation de la répartition des débits d'entrée et des multi-perforations.

5.3.2 Description de l'écoulement

Analyse classique

En termes d'écoulement, la configuration FACTOR présente un PVC à 500 Hz, généré par l'injecteur de la chambre. Cet écoulement giratoire à une température d'environ 500 K crée un point chaud qui impacte directement la pale NGV #2 de la turbine, comme le montre la visualisation des lignes de courant initialisées à partir de la sortie de l'injecteur (Fig. 5.4). L'organisation de l'écoulement est aussi visible sur la Fig. 5.5. La région noire représente une iso-surface de faible pression statique pour mettre en évidence la présence du PVC. De plus, l'iso-surface de critère Q [144] révèle l'activité turbulente importante à la sortie du cylindre de l'injecteur qui est ensuite transportée jusqu'à la sortie de la chambre de combustion. Cette activité turbulente est encore visible à la traversée de la turbine. L'iso-surface montre aussi l'écoulement froid injecté par la multi-perforation hétérogène. Des régions avec des vortex à une température de 300 K sont localisées proche des parois de la chambre de combustion et autour des pales de la turbine.

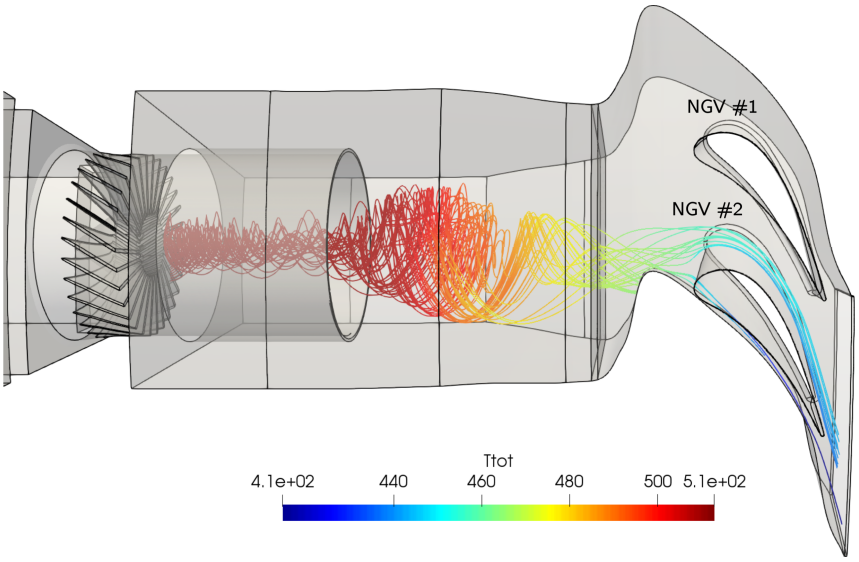


Figure 5.4: Lignes de courant colorées par la température totale et initialisées à partir de la sortie de l'injecteur obtenues à partir d'un champ moyen.

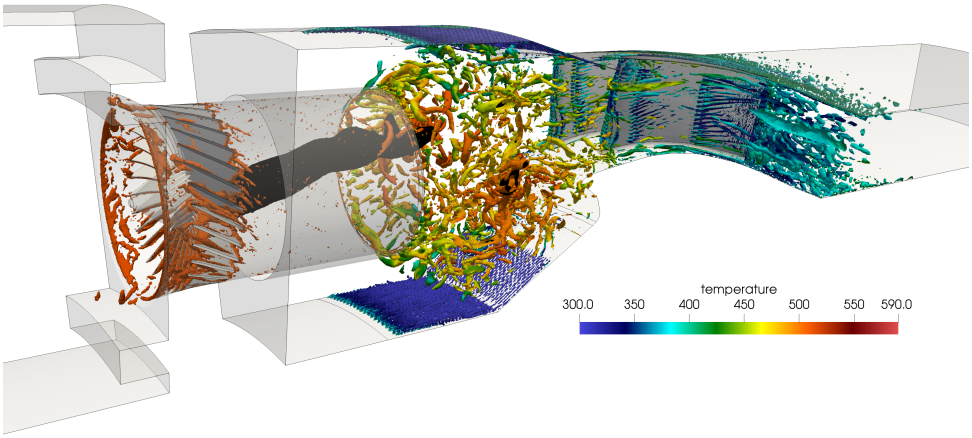
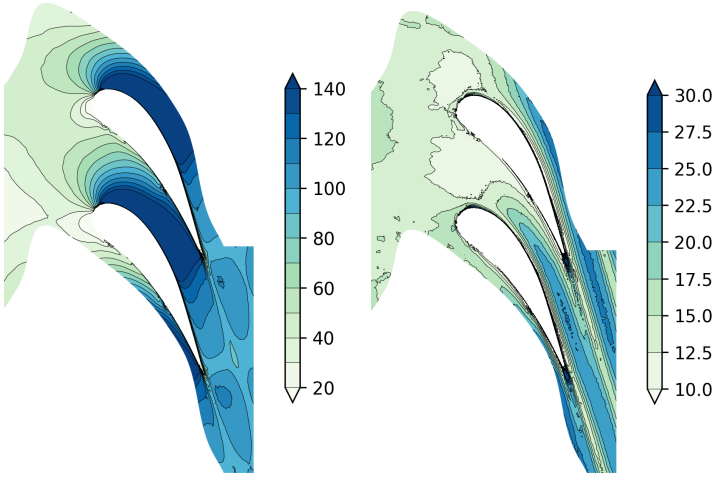


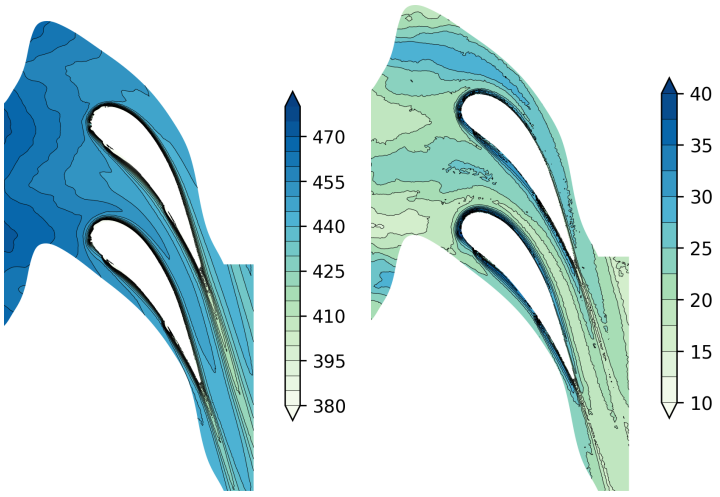
Figure 5.5: Vue instantanée de l'activité turbulente dans la simulation intégrée : le PVC est visible en noir (iso-surface de pression statique) et les structures turbulentes sont mises en évidence par une iso-surface de critère Q [144] colorée par la température statique.

Cette activité turbulente importante et le caractère non uniforme de la température à l'entrée de la turbine motivent le choix de la configuration FACTOR pour étudier l'impact de la modélisation de la condition limite d'entrée utilisée pour la turbine. Ces observations sont confirmées par les contours de vitesse axiale et de température totale ainsi que ceux présentant les fluctuations RMS de ces quantités à mi-hauteur de veine (Figs. 5.6 et 5.7). Ils montrent clairement l'activité turbulente et les fluctuations complexes de température dans le demi-étage de turbine.



(a) u. (b) u_{rms}.

Figure 5.6: Vitesse axiale moyenne et fluctuations RMS [m.s^{-1}] à mi-hauteur de veine dans le domaine des deux NGV.



(a) T_{tot}. (b) $T_{\text{tot,rms}}$.

Figure 5.7: Température totale moyenne et fluctuations RMS [K] à mi-hauteur de veine dans le domaine des deux NGV.

Analyse SPOD en 3D dans la chambre

Étant donné que le PVC semble jouer un rôle très important dans la topologie de l'écoulement à l'entrée de la turbine, il est important d'approfondir l'aérodynamique induite par ce PVC dans la chambre de combustion en elle-même. D'après les analyses théoriques précédentes, la SPOD semble être un très bon candidat pour capter la dynamique complexe induite par la PVC. Ainsi, pour la suite, l'idée est de réaliser une SPOD sur un ensemble de champs instantanés du domaine chambre.

Évidemment comme le coût de stockage est important puisqu'il s'agit de stocker le domaine complet pour chaque instantané, celle-ci contient un nombre assez réduit d'instantanés. Au total, elle est constituée de 250 instantanés, espacés de $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ s. À titre de comparaison, le temps convectif de la chambre seule se situe autour de 10 ms et le temps caractéristique du PVC est de 1/500 Hz = 2 ms.

En termes de paramètres pour la SPOD, 4 blocs sont générés de taille $N_f = 100$ avec une superposition de $N_o = 50$ en utilisant la fonction de fenêtrage de Hamming. Étant donné le nombre assez réduit d'instantanés dans la base de données, ce choix est fait pour garantir un bon compromis entre le nombre de modes et la discrétisation fréquentielle. Le produit scalaire entre les instantanés correspond à la norme de l'énergie totale de la perturbation décrite dans la première section. Les valeurs propres obtenues grâce à la SPOD sont présentées en Fig. 5.8. Elles mettent clairement en évidence l'activité du PVC avec un spectre dominé par les fréquences à 500 Hz et 1 000 Hz (et à moindre mesure à 1 500 Hz). Pour ces fréquences, le mode 1 est clairement dominant par rapport aux autres modes. Ceci laisse penser que la dynamique de l'écoulement est principalement pilotée par ce mode.

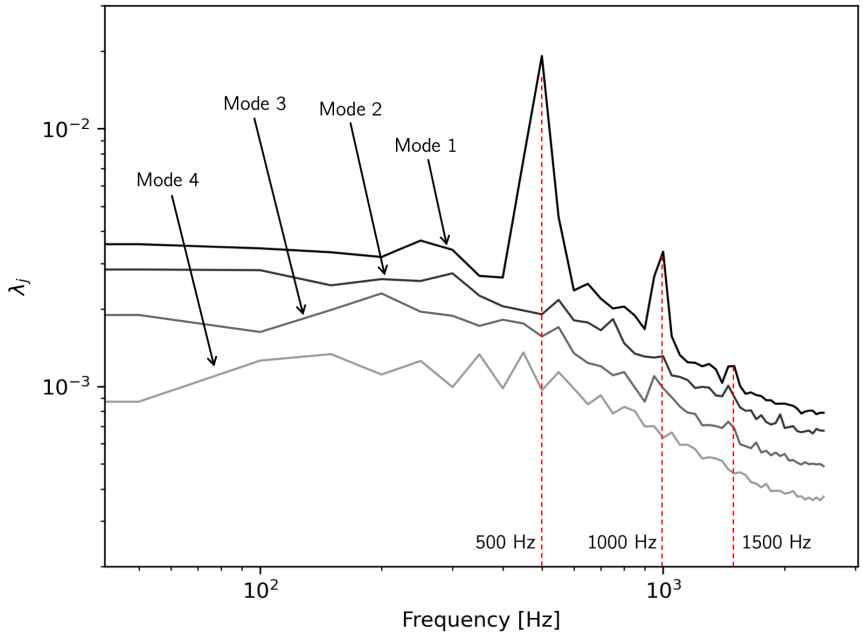
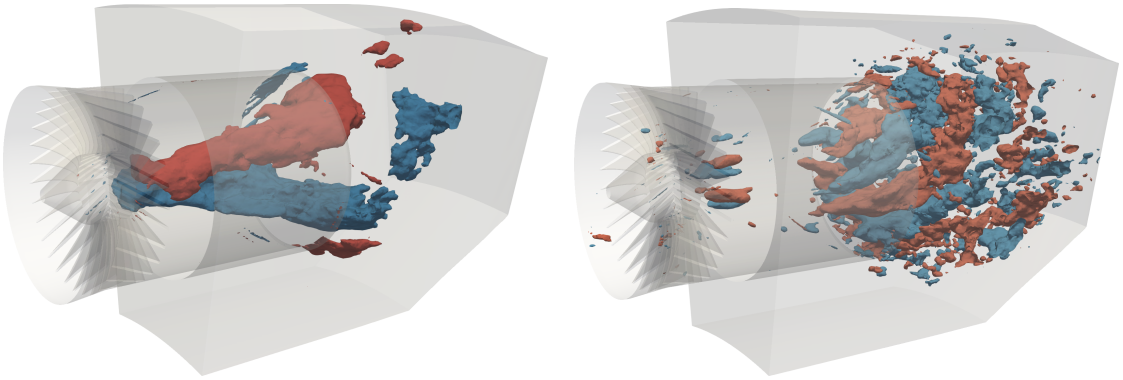


Figure 5.8: Valeurs propres SPOD en fonction de la fréquence, normalisées par l'énergie totale sur l'ensemble des fréquences pour la base de données chambre complète.

Pour mieux comprendre cette dynamique, la représentation spatiale de ce mode est analysée par la suite. Étant donné que la SPOD est ici réalisée sur des instantanés 3D, des iso-contours sont nécessaires pour visualiser les modes. Dans la suite, la valeur de chaque iso-contour est définie de manière à mettre en évidence les structures générées par le PVC. La valeur de l'iso-contour est différente pour chaque figure, mais cette valeur n'a en pratique que peu d'importance. L'idée est surtout de visualiser la structure des modes. Par ailleurs, pour chaque figure, la couleur rouge correspond à la valeur de l'iso-contour choisi et la couleur bleue à l'opposé de cette valeur. La Figure 5.9a met en évidence l'importance de la dynamique du PVC dans l'écoulement de la chambre. L'iso-contour du mode 1 pour la vitesse axiale montre deux bras en opposition de phase, caractéristiques d'un écoulement en giration. Par ailleurs, toujours pour le premier mode et pour la vitesse axiale, la Fig. 5.10 souligne la présence du PVC avec un structures à 2, 4 et 6 bras pour les fréquences à 500 Hz, 1 000 Hz et 1 500 Hz respectivement. Enfin, la Fig. 5.9b montre comment le PVC impacte les propriétés de l'écoulement à l'entrée de la turbine. Grâce à l'iso-contour, il est possible d'observer la transition de la structure très cohérente du PVC en structures plus petites pour générer une turbulence importante en sortie de chambre. Cette transition se fait pour cette figure à 1500 Hz, mais le même phénomène se produit pour une large gamme de fréquences, ce

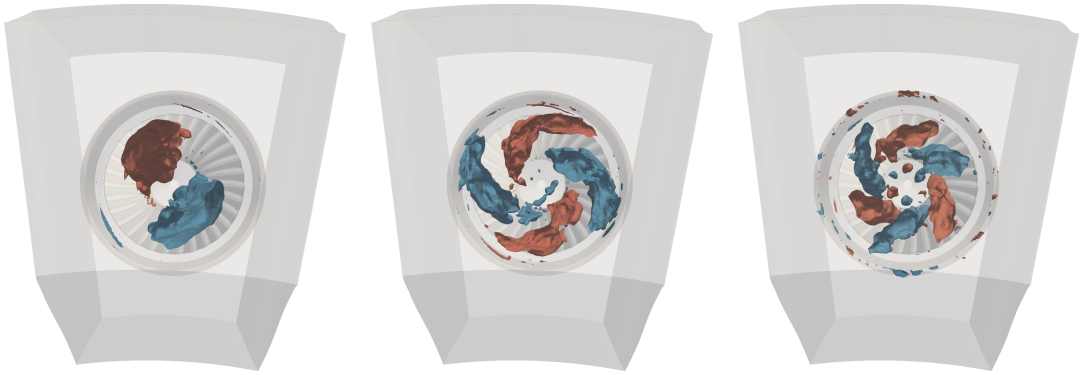
qui alimente une activité turbulente complète en entrée de la turbine comme il sera décrit par la suite. Pour la température, la Fig. 5.11 montre aussi comment la fréquence du PVC influence les structures en proche paroi. À 500 Hz, deux lobes en haut et en bas, en opposition de phase sont clairement identifiables. Pour les fréquences à 1 000 Hz et 1 500 Hz, le phénomène s'apparente à celui observé pour la vitesse axiale : la dynamique des structures en entrée de la turbine pour la température est aussi gouvernée par la fréquence du PVC et ses harmoniques.



(a) 500 Hz. (b) 1 500 Hz.

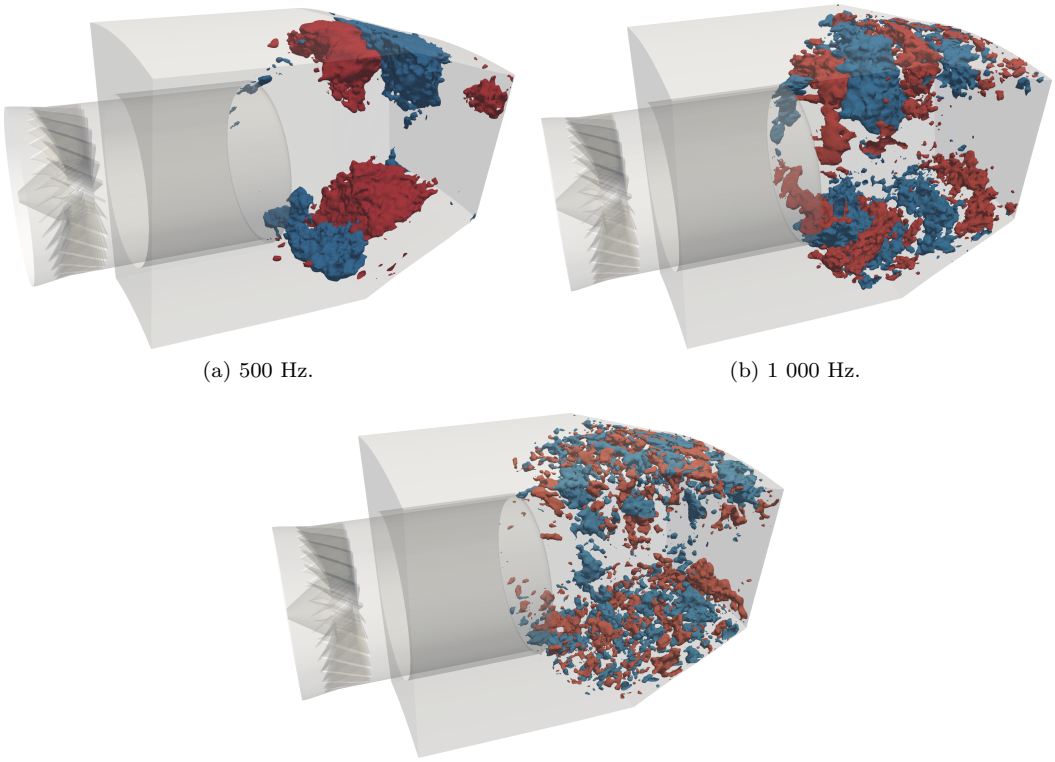
Figure 5.9: Iso-contour du mode 1 pour la vitesse axiale à 500 Hz et 1500 Hz dans la chambre. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative.

Toute la dynamique particulière reportée ici a aussi été observée dans les travaux présentés dans la thèse de Thomas [262]. À partir d'une décomposition modale par POD, les structures en bras étaient aussi visibles, avec notamment la mise en évidence de la convection des structures issues de l'injecteur jusqu'à l'intérieur de la turbine. Toutefois, dans les résultats de Thomas [262], la corrélation entre quantités n'était pas présente puisque la décomposition modale a été faite individuellement pour chaque variable de l'écoulement. Les résultats qui vont suivre montreront aussi que la POD semble moins en capacité d'identifier avec un seul mode la dynamique associée à une fréquence donnée du PVC.



(a) 500 Hz. (b) 1 000 Hz. (c) 1 500 Hz.

Figure 5.10: Iso-contour du mode 1 pour la vitesse axiale et pour trois fréquences à la sortie de l'injecteur. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative.



(a) 500 Hz.

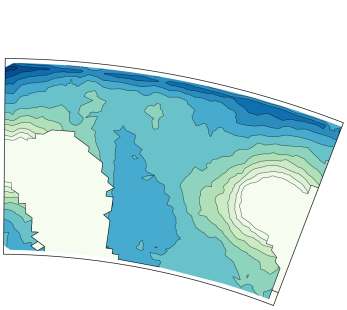
(b) 1 000 Hz.

(c) 1 500 Hz.

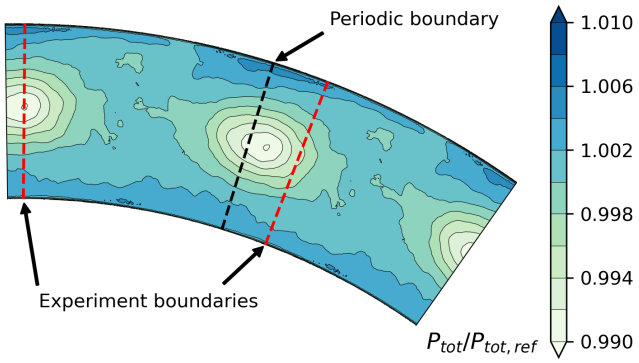
Figure 5.11: Iso-contour du mode 1 pour la température à 500 Hz, 1000 Hz et 1500 Hz dans la chambre. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative.

Validation et comparaison avec l'expérience

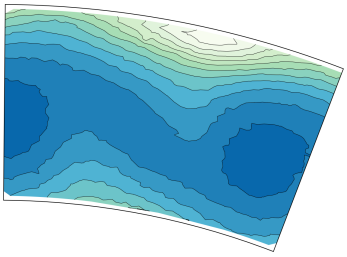
Pour valider les choix faits lors de la mise en place de la simulation intégrée, utilisée comme référence dans la suite de l'étude, cette simulation est comparée aux données expérimentales disponibles aux plans 40 et 41 (Figs. 5.12 et 5.13). La position de ces plans est visible sur la Fig. 5.2. Les deux grandeurs comparées sont la pression et la température totales. Étant donné que le point de fonctionnement diffère légèrement entre la simulation et l'expérience, les grandeurs sont adimensionnées par leur valeur moyenne respective au plan 40. Comme le montre la Fig. 5.12, au plan 40, les deux contours sont en très bon accord. La topologie de l'écoulement de l'expérience est retrouvée dans le cas de la simulation numérique. Une région de faible pression est présente au centre du canal, qui met en évidence la présence de la giration résiduelle de l'écoulement induite par l'injecteur de la chambre. Le point chaud provenant de la chambre est souligné par la présence de valeurs élevées de température totale au centre. Les formes et les positions des différentes régions sont comparables entre les deux cas. Pour le plan 41 (Fig. 5.13), les contours obtenus à partir de la simulation intégrée sont plus différentes des données expérimentales. La chute de pression totale dans le sillage des deux NGVs obtenue pour la simulation est plus prononcée que l'expérience. Cependant, la forme globale est bien reproduite, malgré une légère déviation proche du moyeu. Pour la température totale, l'accord est plus satisfaisant. Les régions où la température diminue à cause du sillage sont analogues, en particulier avec la zone en tête sur la partie droite du canal qui est visible dans les deux cas. Les amplitudes sont aussi comparables.



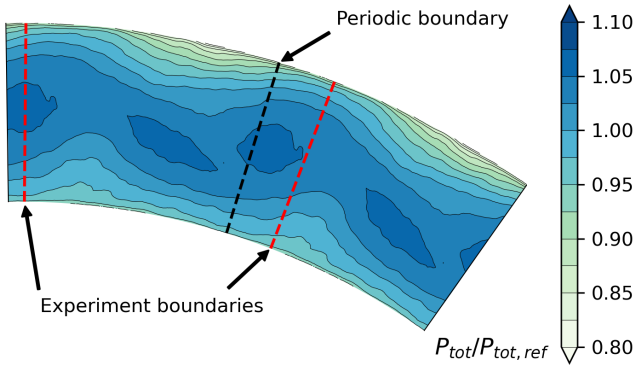
(a) Pression totale - Expérience (partielle).



(b) Pression totale - Simulation intégrée.

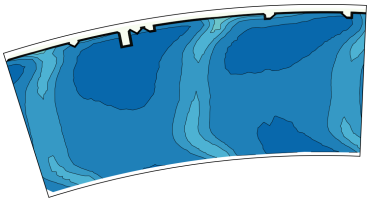


(c) Température totale - Expérience.

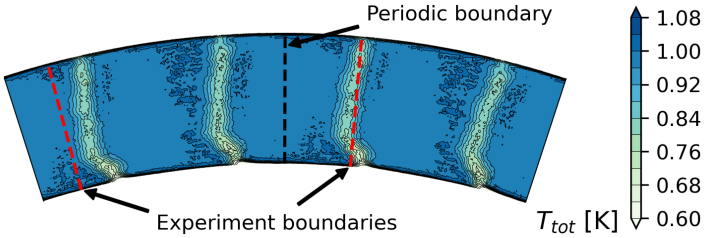


(d) Température totale - Simulation intégrée.

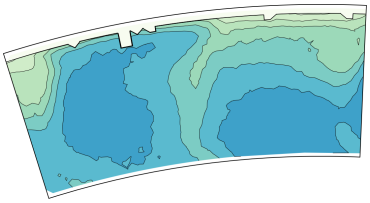
Figure 5.12: Pression et température totales moyennes adimensionnées au plan 40.



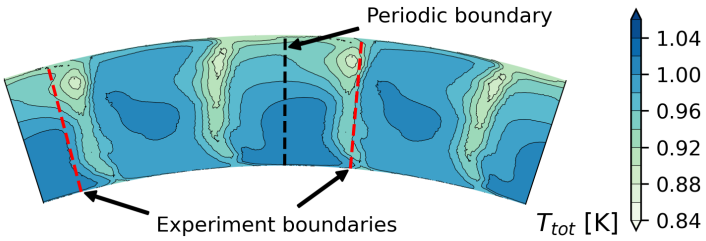
(a) Pression totale - Expérience.



(b) Pression totale - Simulation intégrée.



(c) Température totale - Expérience.



(d) Température totale - Simulation intégrée.

Figure 5.13: Pression et température totales moyennes adimensionnées au plan 41.

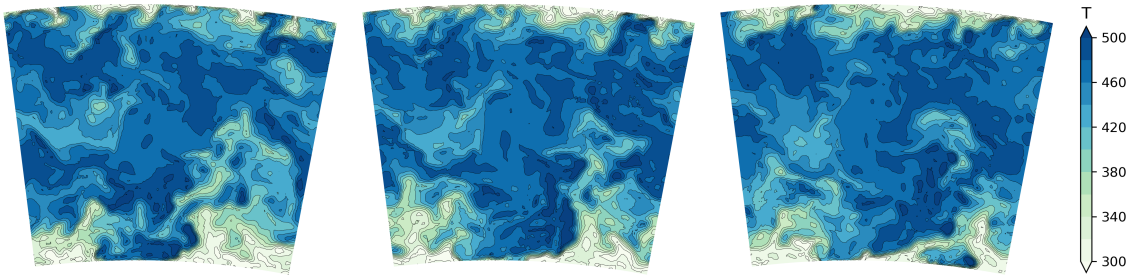
Dans la suite, un intérêt particulier est apporté à la topologie de l'écoulement au niveau de l'interface (située juste en amont du plan 40). Cet intérêt s'explique par sa position, localisée directement à l'entrée de la turbine. Ainsi, à cette position, il est possible d'une part d'analyser les caractéristiques de l'écoulement provenant de la chambre de combustion, avec notamment une giration résiduelle et un point chaud. Et d'autre part, de comprendre les effets de ces propriétés sur la physique de l'écoulement qui se développe au sein de la turbine. Cette physique en entrée de turbine aura ensuite une conséquence directe sur d'autres quantités comme la température à la surface des pales ou la température de sortie de turbine, d'où son importance.

5.3.3 Génération de la base de données instationnaire

Détails et aperçu de la base de données

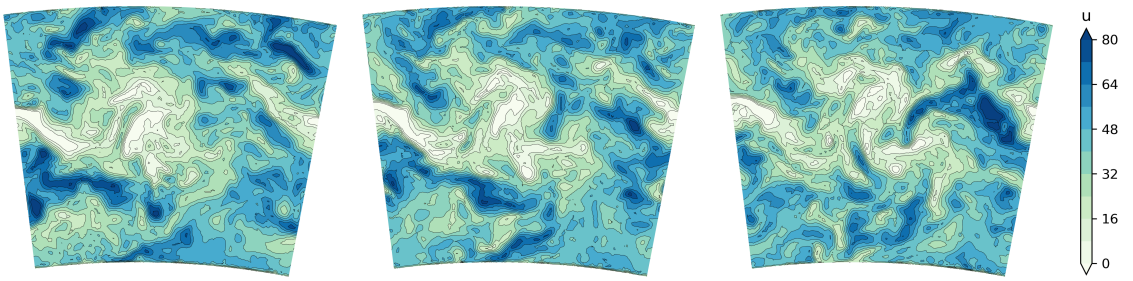
Pour la suite, seule l'information à l'interface est d'intérêt. Pour constituer la base de données, les grandeurs conservatives (ρ, ρu, ρv, ρw et ρE) sont enregistrées à l'interface entre la chambre et les deux NGVs. La position du plan enregistré correspond au plan vert indiqué sur la Fig. 5.2. Les *snapshots* sont enregistrés tous les $\Delta t = 5.0 \times 10^{-6}$ s (équivalent à 100 itérations de la simulation avec un CFL de 0.7) pendant une durée de 0.1 s, ce qui correspond à un ensemble de 20 000 *snapshots*. Le plan à l'interface est composé de 59 353 nœuds. Au total, la base de données contient donc environ 5.8 milliards de nombres flottants, pour une taille sur disque d'environ 150 Go.

La base de données est donc constituée d'un ensemble de représentations instantanées de l'écoulement entre la chambre de combustion et la turbine. Un aperçu des champs instantanés obtenus est donné en Figs. 5.14 et 5.15 pour la température statique et la vitesse axiale, respectivement. Cet aperçu met en évidence une dynamique complexe avec de fortes instationnarités.



(a) Instant t_0. (b) Instant $t_0 + 20\Delta t$. (c) Instant $t_0 + 40\Delta t$.

Figure 5.14: Visualisation de la température statique [K] à différents instants de la base de données à partir d'un temps t_0 arbitraire.



(a) Instant t_0. (b) Instant $t_0 + 20\Delta t$. (c) Instant $t_0 + 40\Delta t$.

Figure 5.15: Visualisation de la vitesse axiale [m/s] à différents instants de la base de données à partir d'un temps t_0 arbitraire.

Convergence de la base de données : temps caractéristiques, valeurs RMS et temps de convergence

Comme mentionné dans la section précédente, la simulation intégrée est moyennée pendant un temps total de $t_{\text{sim}} = 0.1$ s. Premièrement, pour mieux appréhender le temps de simulation t_{sim} par rapport à la physique de l'écoulement de la configuration, deux temps caractéristiques sont introduits,

- le temps de traversée du domain complet (entre la sortie de l'injecteur et la sortie de la turbine), $\tau_{\text{domain}} = 11$ ms,
- et le temps de traversée de la turbine (entre l'entrée et la sortie de la turbine), $\tau_{\text{turbine}} = 0.65$ ms.

Le temps de simulation total t_{sim} peut ainsi être comparé à ces deux temps caractéristiques, ce qui donne,

$$t_{\text{sim}} \simeq 9\tau_{\text{domain}} \simeq 154\tau_{\text{turbine}}. \tag{5.32}$$

La comparaison précédente confirme que la convergence statistique semble atteinte pour le temps de simulation choisi. Les relations suivantes sont aussi données pour comparer le temps d'échantillonnage de la base de données ($\Delta t = 5.0 \times 10^{-6}$ s) avec les deux temps caractéristiques : $\tau_{\text{domain}} = 2\,200\,\Delta t$ et $\tau_{\text{turbine}} = 130\,\Delta t$.

Pour valider le temps de simulation utilisé pour la moyenne, la convergence des valeurs RMS est dans un premier temps étudiée. La Figure 5.16 présente l'évolution de la moyenne spatiale des fluctuations RMS de température statique et de vitesse axiale en fonction du temps de moyenne. Cela montre que le temps de simulation t_{sim} est suffisant pour assurer la convergence des grandeurs moyennes et des fluctuations. Cette figure démontre la convergence globale sur l'ensemble du plan d'entrée.

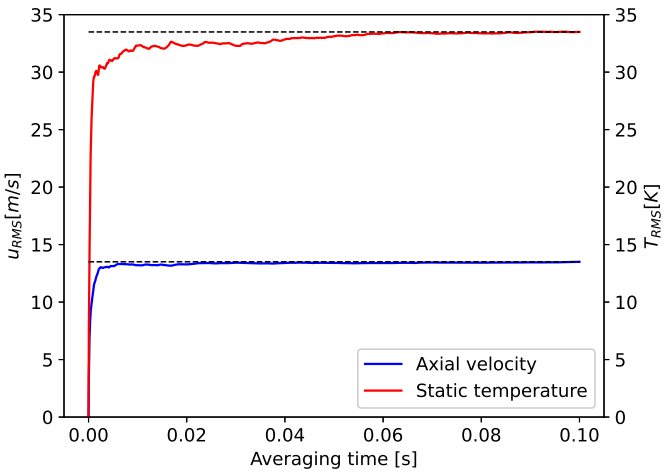
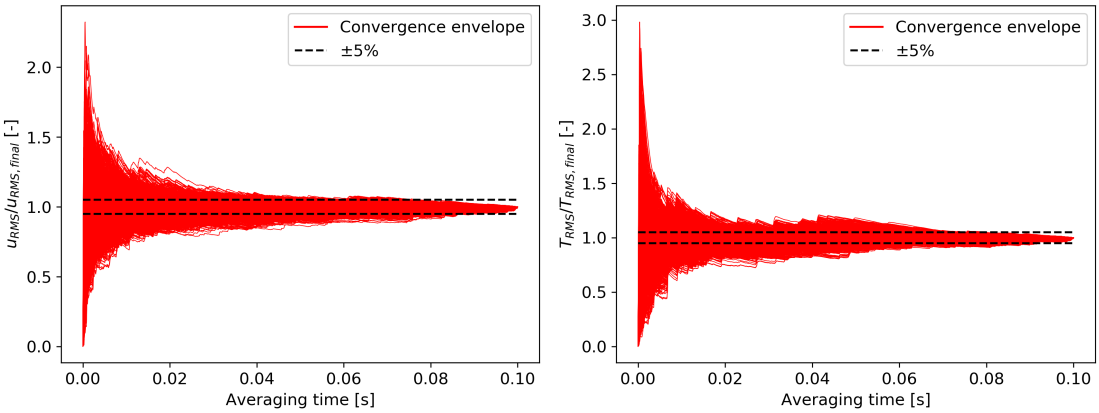


Figure 5.16: Moyenne spatiale des valeurs RMS de la vitesse axiale et de la température statique pour l'ensemble des nœuds de l'interface en fonction du temps de moyenne. Les lignes pointillées correspondent aux valeurs finales pour un temps de moyenne égal à $t_{\text{sim}} = 0.1$ s.

Cependant, certains effets locaux pourraient être gommés par la moyenne spatiale. Pour fournir une information sur la convergence locale des fluctuations, la Fig. 5.17 présente une enveloppe de l'évolution de la valeur RMS de chaque nœud de l'interface normalisé par leur valeur RMS finale respective en fonction du temps de moyenne (pour la vitesse axiale et la température statique). Dans ce cas, la valeur finale RMS correspond à la valeur obtenue après $t_{\text{sim}} = 0.1$ s. Les deux figures confirment que le temps de convergence t_{sim} choisi permet d'atteindre des grandeurs RMS

locales convergées à ±5 % de leur valeur finale respective. Néanmoins, proche de la valeur t_{sim}, des variations aux alentours de 3 % à 4 % pour les deux grandeurs sont encore présentes. Cela peut être utilisé pour quantifier une incertitude sur ces grandeurs, ce qui est particulièrement important à prendre en compte pour faire des comparaisons entre plusieurs cas comme il sera fait par la suite.



(a) Vitesse axiale.

(b) Température statique.

Figure 5.17: Enveloppe de convergence locale des valeurs RMS.

Quelques résultats sur les échelles de la turbulence au niveau du plan chambre/turbine

Avant de construire une condition limite pour reproduire le couplage entre la chambre et la turbine, il est nécessaire de bien comprendre la dynamique et la physique de l'écoulement au niveau de l'interface entre les deux composants. Cela nécessite entre autres la connaissance de grandeurs caractéristiques de l'écoulement comme détaillé ci-avant (convergence, temps caractéristiques globaux, fréquences présentes dans l'écoulement, etc.), mais aussi tout un ensemble de quantités liées à la turbulence. La connaissance de ces quantités sera en particulier utile pour définir les reconstructions partielles de la base de données dans l'optique de générer des conditions limites avec des propriétés différentes vis-à-vis de la turbulence.

En faisant l'hypothèse que la turbulence générée dans la chambre est homogène isotrope (ce qui n'est bien sûr pas tout à fait exact, comme les résultats le montreront par la suite), il est possible de mener l'analyse suivante. Pour bien définir les propriétés de la turbulence présente à l'interface entre la chambre et la turbine, trois temps caractéristiques sont à estimer : τ_{EI}, le temps caractéristique des tourbillons au début de la zone inertielle et donc au début de la cascade turbulente, τ_{DI} le temps caractéristique associé à la micro-échelle de Taylor (fin de la cascade turbulente) et τ_η le temps caractéristique correspondant à l'échelle de Kolmogorov. Les calculs qui suivent ont pour but de fournir une estimation de ces temps caractéristiques.

Tout d'abord, le taux de dissipation dans le cas d'une turbulence homogène isotrope peut être calculé par la relation [100],

$$\epsilon = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 15\nu\overline{\left(\frac{1}{U}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}. \tag{5.33}$$

Une valeur de ϵ peut donc être ensuite estimée à partir de l'équation précédente en moyennant les valeurs obtenues pour en ensemble de 54 sondes positionnées au niveau de l'interface.

La taille des tourbillons l_{EI} au début de la zone inertielle, c'est-à-dire la taille des tourbillons les plus énergétiques peut s'exprimer en général comme,

$$l_{EI} = \frac{l_0}{6}, \tag{5.34}$$

avec la longueur caractéristique l_0 calculée en utilisant le ratio entre la section du canal de la turbine et la périmètre de la surface mouillée.

Pour cette taille de tourbillon, le temps caractéristique associé est directement relié au taux de dissipation ϵ par la relation,

$$\tau_{EI} = \left(\frac{l_{EI}^2}{\epsilon}\right)^{1/3}, \tag{5.35}$$

et la fréquence f_{EI} est simplement obtenue par $f_{EI} = 1/\tau_{EI}$.

La micro-échelle de Taylor peut alors être approximée par la relation,

$$l_{DI} = \left(\frac{10\nu k}{\epsilon}\right)^{1/2}, \tag{5.36}$$

avec $k = \frac{1}{2}(\overline{u'}^2 + \overline{v'}^2 + \overline{w'}^2)$ et ν la viscosité cinématique.

La vitesse associée à cette longueur caractéristique est de l'ordre de la fluctuation de vitesse. Ainsi le temps caractéristique associé est simplement,

$$\tau_{DI} = \frac{l_{DI}}{u'}, \tag{5.37}$$

ce qui correspond à la fréquence $f_{DI} = 1/\tau_{DI}$.

Pour finir, l'échelle de Kolmogorov s'exprime comme,

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \tag{5.38}$$

et l'échelle de temps associé est,

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}. \tag{5.39}$$

Ce qui donne dans le domaine fréquentiel, la fréquence $f_\eta = 1/\tau_\eta$.

Les fréquences f_{EI}, f_{DI} et f_η sont représentées sur le spectre d'énergie cinétique turbulente calculé à l'interface (Fig. 5.18). Ce spectre est obtenu à partir de la moyenne pondérée par le volume des densités spectrales de puissance aux nœuds de l'interface. La position des fréquences est plutôt cohérente avec la forme attendue d'un spectre turbulent. La pente en -5/3 de la cascade turbulente est en effet bien respectée identifiant bien la partie inertielle de la cascade turbulente. Une légère rupture de pente est néanmoins observée proche de la fréquence f_{EI}, probablement induite par l'activité de l'injecteur autour de 500 Hz. Au final, même si le spectre classique d'une turbulence

homogène isotrope n'est pas exactement retrouvé (ce qui peut s'expliquer par le fait que l'analyse est faite sur une LES et non sur une turbulence homogène isotrope), il est possible d'observer des comportements similaires entre les deux. Une zone inertielle est bien présente, suivie d'une région dissipative après la fréquence f_{DI}. Les différences sont bien sûr à nuancer puisque la topologie de l'écoulement au niveau de l'interface reste assez différente d'une vraie turbulence homogène isotrope.

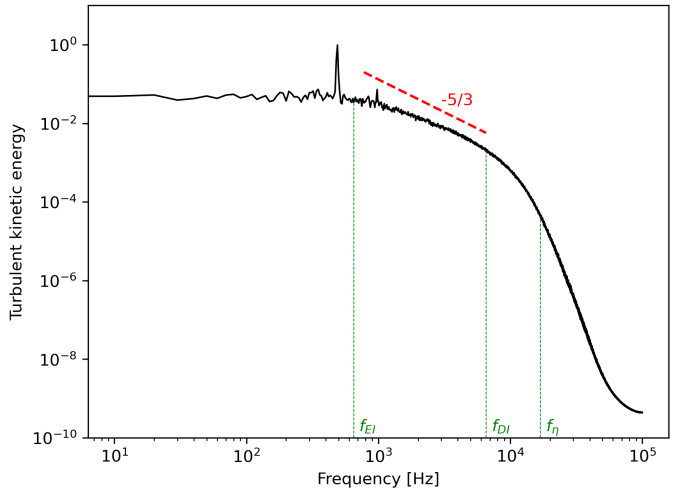


Figure 5.18: Spectre de l'énergie cinétique turbulente à l'interface chambre/turbine.

5.3.4 Décomposition modale de la base de données : comparaison entre SPOD, POD et DMD

Dans cette section, plusieurs méthodes de décomposition modale sont comparées pour analyser la base de données enregistrée à l'interface chambre/turbine. L'objectif est de mieux comprendre la dynamique globale de l'écoulement et en particulier d'étudier l'effet du PVC sur les propriétés de l'écoulement à l'interface.

Décomposition modale 1 : SPOD

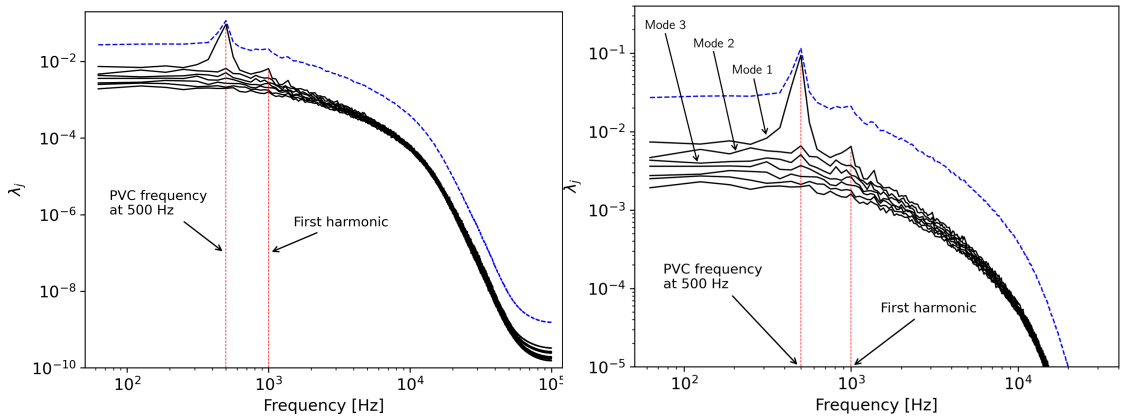
Pour commencer, l'utilisation de la Décomposition Orthogonale Spectrale aux valeurs propres ou *Spectral Proper Orthogonal Decomposition* (SPOD) est considérée. Les détails théoriques liés à cette méthode sont donnés dans la Section 5.2.1. Contrairement à la POD, la SPOD fournit des modes qui sont à la fois cohérents en espace et en temps (et non pas seulement en espace pour la POD). Une analyse plus fine des caractéristiques de la SPOD est donnée dans [268].

Grâce à cette propriété de cohérence spatiotemporelle, les modes SPOD sont capables de découpler les structures de l'écoulement avec des échelles de temps différentes. Cet aspect est particulièrement intéressant d'un point de vue analyse pour une configuration telle que celle étudiée ici. En effet, la fréquence du PVC qui domine la dynamique de l'écoulement peut être isolée facilement dans le domaine spectral, étant donné sa contribution importante à l'énergie totale de l'écoulement. La structure spatiale de cette dynamique est ainsi accessible facilement. Cette observation est aussi valide pour d'autres fréquences, en particulier pour les premières harmoniques du PVC.

Pour la décomposition modale par SPOD de la base de données, le vecteur $\mathbf{q}$ contient les fluctuations instantanées de densité, des trois composantes de vitesse et de température statique, soit $\mathbf{q} = [\rho', u', v', w', T']$ (comme expliqué après l'Eq. (5.3), dans la suite, le symbole $'$ est sous-entendu) et la matrice de poids $\mathbf{W}$ est choisie pour être équivalente à la norme de l'énergie totale. Les blocs sont composés de 3200 *snapshots* ($N_f = 3200$), ce qui donne un ensemble de $N_{\text{blk}} = 7$ pour l'ensemble de la base de données. Comme expliqué dans la Section 5.2.1, le choix des paramètres de

la SPOD revient à un compromis entre la résolution spectrale et le nombre de modes.

Le spectre SPOD obtenu avec ces paramètres contient un total de 7 modes (Fig. 5.19). Les valeurs propres sont normalisées par la somme de l'énergie totale sur l'ensemble des fréquences et des modes. La ligne bleue correspond à la densité spectrale de puissance qui est reconstruite en sommant les énergies de chaque mode pour l'ensemble des fréquences du spectre.

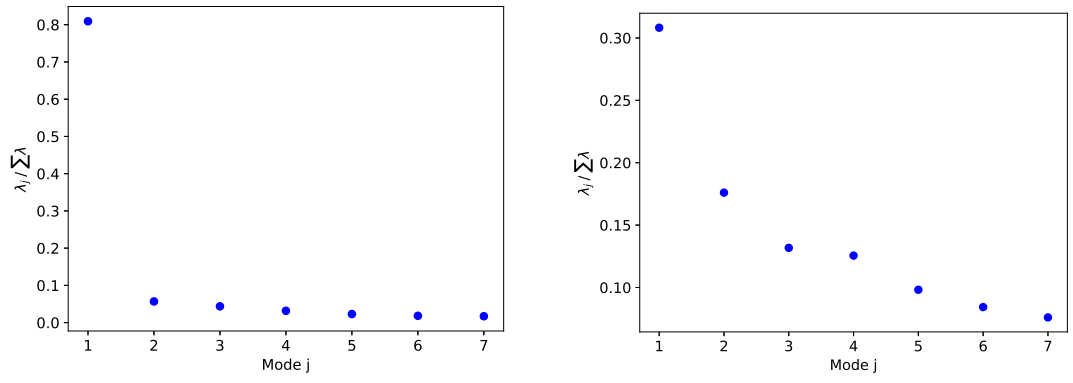


(a) Spectre complet. (b) Zoom sur la région d'intérêt du spectre.

Figure 5.19: Valeurs propres SPOD en fonction de la fréquence, normalisées par l'énergie totale sur l'ensemble des fréquences.

À une fréquence donnée, la présence d'un décalage important en termes d'énergie entre le premier mode et les modes suivants montre que la décomposition modale est bas ordre. C'est-à-dire, que le phénomène physique de cette fréquence est très bien décrit par le premier mode et ce dernier domine la dynamique de l'écoulement. C'est principalement le cas pour la fréquence à 500 Hz et pour sa première harmonique à 1 000 Hz.

Pour mettre en évidence cette propriété de l'écoulement, la Fig. 5.20 trace les valeurs propres à 500 Hz et 1 000 Hz en fonction du mode, normalisées par l'énergie totale à chaque fréquence. Il est clair qu'à 500 Hz, le mode 1 est largement plus énergétique que les autres puisqu'il capture environ 80 % de l'énergie totale à cette fréquence. De la même manière, cet effet est aussi présent à 1 000 Hz, où le mode 1 dominant capture plus de 30 % de l'énergie.



(a) 500 Hz. (b) 1000 Hz.

Figure 5.20: Valeurs propres SPOD normalisées par l'énergie totale à chaque fréquence.

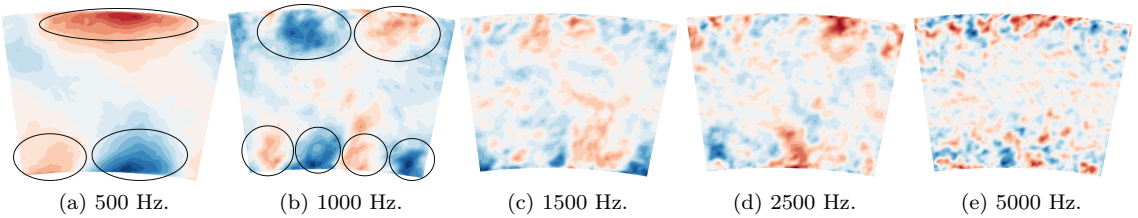
Par ailleurs, dans le spectre SPOD, la présence d'un pic à 500 Hz pour la valeur propre du premier mode dominant le niveau énergétique global, montre que l'écoulement à l'interface

chambre/turbine est principalement piloté par le PVC qui génère une forte activité à cette fréquence.

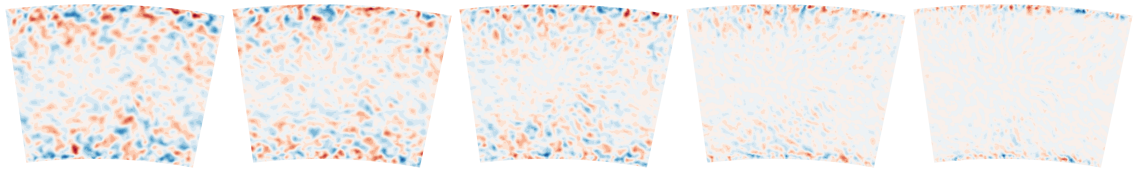
Au contraire, lorsque la différence entre les valeurs propres des modes est peu marquée (ici pour la plupart des fréquences, à l'exception de la fréquence du PVC et de ses harmoniques), cela signifie qu'un mode unique n'est pas capable de décrire la physique de l'écoulement. C'est par exemple le cas pour les hautes fréquences, associées à la turbulence de l'écoulement. Pour décrire la physique de l'écoulement à ces fréquences, il faut plutôt considérer les modes SPOD comme une base de vecteurs propres, d'importance comparable. Ce comportement peut se comprendre facilement, puisque la turbulence étant un phénomène plutôt aléatoire, elle ne peut pas être décrite par un mode unique pour chaque fréquence.

Pour en apprendre davantage sur la topologie de l'écoulement grâce à la décomposition SPOD, la représentation spatiale des deux premiers modes pour différentes fréquences est analysée. Les modes spatiaux 1 et 2 de la température sont respectivement présentés en Figs. 5.21 et 5.22. À 500 Hz, le premier mode met clairement en évidence un lobe au niveau de la paroi interne et deux lobes au niveau de la paroi externe, en opposition de phase. Ces modes résultent de l'excitation de l'écoulement injecté à travers les multi-perforations par la fréquence du PVC. À 1 000 Hz, toujours pour le premier mode, c'est le même phénomène qui est observé, avec un doublement du nombre de lobes (2 lobes externes et 4 lobes internes). Pour ces deux fréquences, comme expliqué précédemment, le premier mode est largement dominant en termes d'énergie par rapport aux modes suivants. La dynamique de l'écoulement à ces deux fréquences est donc majoritairement pilotée par la forme spatiale du mode 1, qui génère donc une pulsation des jets multi-perforés à la fréquence du PVC et ses harmoniques. Pour les fréquences entre 2 500 Hz et 11 000 Hz, une diminution progressive de la taille des structures est observée. Ceci s'explique simplement par le fait que des structures plus petites de l'écoulement sont régies par des échelles temporelles elles aussi plus petites (et donc des fréquences plus élevées). L'analyse spectrale de la cascade turbulente de l'écoulement présentée auparavant a montré que ces fréquences semblent être situées dans la zone inertielle de la cascade. C'est pourquoi il est normal d'observer une répartition plutôt homogène des structures sur toute la hauteur du canal, contrairement aux fréquences plus faibles. Par ailleurs, comme mis en évidence dans le spectre des valeurs propres SPOD, pour ces fréquences, le niveau d'énergie des modes est comparable. Ainsi, à ces fréquences, comme les structures spatiales des différents modes sont très similaires, la base des modes SPOD permet de reproduire le comportement aléatoire, caractéristique des tourbillons de la zone inertielle. Enfin, pour des fréquences encore plus élevées (ici 15 500 Hz et 20 000 Hz), le comportement est différent. Ces fréquences sont cette fois situées dans la région dissipative de la cascade turbulente. La représentation spatiale des modes à ces fréquences permet donc de localiser les régions où la dissipation est importante. Il n'est pas étonnant de retrouver ces régions en proche paroi, à l'endroit où se fait l'injection d'écoulement froid par les multi-perforations. De la même manière que pour les fréquences précédentes, ce phénomène est aussi principalement aléatoire. Ce qui explique le niveau comparable d'énergie des modes à ces fréquences et les similarités des représentations spatiales des modes 1 et 2.

Pour poursuivre l'analyse, la représentation spatiale des modes 1 et 2 aux mêmes fréquences est donnée en Figs. 5.23 et 5.24 pour la vitesse axiale. Cette fois, l'activité de l'écoulement à 500 Hz et 1 000 Hz n'est pas restreinte à la région proche paroi, elle s'étend sur toute la hauteur du canal. Ce comportement est encore une fois lié au PVC. Contrairement à la température qui est plutôt homogène dans le PVC comme la température d'injection de l'écoulement chaud est constante, la vitesse varie à la sortie de l'injecteur à cause du mouvement de giration introduit par le PVC. C'est pourquoi les structures spatiales des modes à ces fréquences s'étendent aussi au centre du canal. Pour les fréquences entre 2 500 Hz et 11 000 Hz, les observations sont similaires à celles faites pour la température. Les structures sont très homogènes et la taille de ces dernières diminue lorsque la fréquence du mode augmente. Enfin, pour la fréquence à 15 500 Hz et surtout à 20 000 Hz, les représentations spatiales sont aussi des indicateurs des régions principales de dissipation. Encore une fois, la dissipation est localisée dans la région proche paroi, où s'effectue l'injection par multi-perforations. À la différence de la température, de la dissipation est aussi présente au centre du canal. Elle est causée par le cisaillement introduit par le mouvement de giration du PVC et par la cascade turbulente.

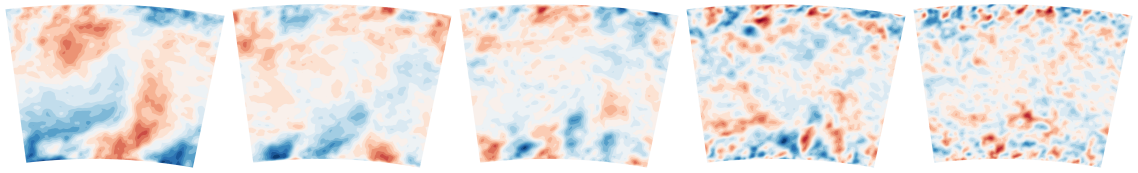


(a) 500 Hz. (b) 1000 Hz. (c) 1500 Hz. (d) 2500 Hz. (e) 5000 Hz.

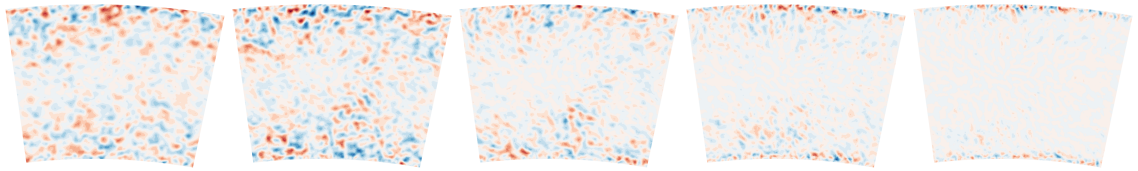


(f) 6000 Hz. (g) 8000 Hz. (h) 11000 Hz. (i) 15500 Hz. (j) 20000 Hz.

Figure 5.21: Mode 1 - Température.

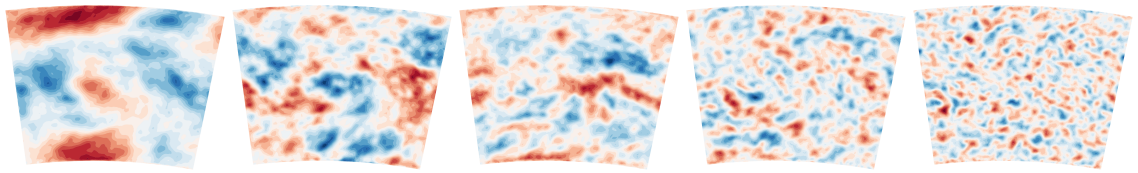


(a) 500 Hz. (b) 1000 Hz. (c) 1500 Hz. (d) 2500 Hz. (e) 5000 Hz.

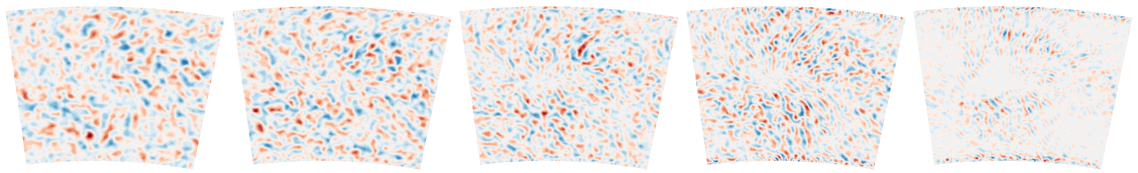


(f) 6000 Hz. (g) 8000 Hz. (h) 11000 Hz. (i) 15500 Hz. (j) 20000 Hz.

Figure 5.22: Mode 2 - Température.

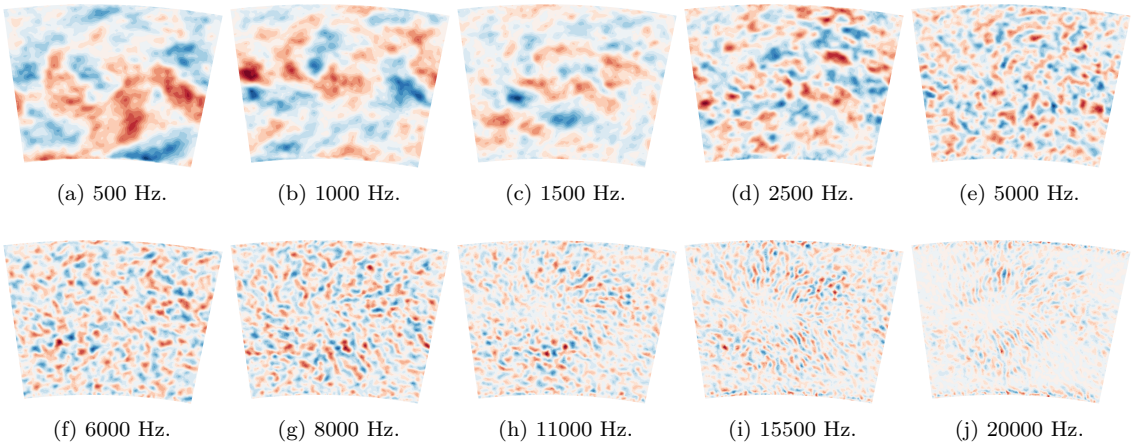


(a) 500 Hz. (b) 1000 Hz. (c) 1500 Hz. (d) 2500 Hz. (e) 5000 Hz.



(f) 6000 Hz. (g) 8000 Hz. (h) 11000 Hz. (i) 15500 Hz. (j) 20000 Hz.

Figure 5.23: Mode 1 - Vitesse axiale.



(a) 500 Hz. (b) 1000 Hz. (c) 1500 Hz. (d) 2500 Hz. (e) 5000 Hz.

(f) 6000 Hz. (g) 8000 Hz. (h) 11000 Hz. (i) 15500 Hz. (j) 20000 Hz.

Figure 5.24: Mode 2 - Vitesse axiale.

L'utilisation de la SPOD pour la base de données composée d'instantanés du plan à l'interface chambre/turbine a clairement permis d'identifier les structures d'intérêt de l'écoulement, que ce soit en termes de fréquences ou de structures spatiales. À titre indicatif, la suite s'attèle à faire la même analyse mais sur les bases des outils POD et DMD afin de souligner l'intérêt de la SPOD pour le problème considéré.

Décomposition modale 2 : POD

La Décomposition Orthogonale aux valeurs propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) a été introduite par Lumley [173, 174] pour l'analyse d'écoulements turbulents. En pratique, la POD permet de réduire une base de données initiale de dimension élevée à une autre de dimension plus faible. La méthode a pour but de déterminer une base de modes spatiaux propres orthogonaux, ce qui permet d'identifier des structures cohérentes dans l'écoulement dans l'objectif de produire un modèle réduit de la base de données initiale.

Une fonction q dépendante de l'espace $\boldsymbol{x}$ et du temps t peut ainsi être approximée par un nombre fini de modes K sous la forme,

$$q(\boldsymbol{x},t) \simeq \sum_{k=1}^{K} a_k(t)\Phi_k(\boldsymbol{x}). \tag{5.40}$$

Cette estimation devient exacte lorsque le nombre de modes utilisés pour l'approximation tend vers l'infini. Les modes propres étant orthogonaux en espace, les fonctions Φ_k doivent satisfaire,

$$\int_\Omega \Phi_{k_1}(\boldsymbol{x})\Phi_{k_2}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \begin{cases} 0 & \text{for } k_1 \neq k_2, \\ 1 & \text{for } k_1 = k_2. \end{cases} \tag{5.41}$$

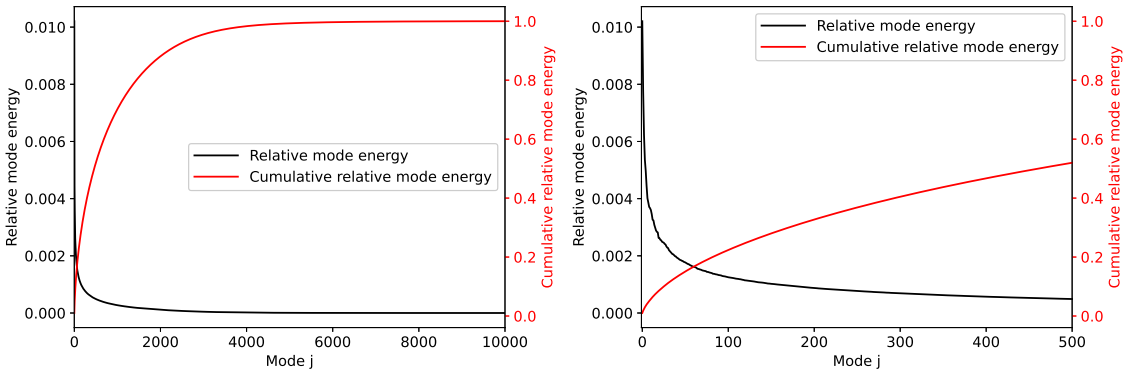
Les coefficients temporaux $a_k(t)$ sont directement obtenus par projection des modes propres sur la base de données initiale avec le même produit scalaire,

$$a_k(t) = \int_\Omega q(\boldsymbol{x},t)\Phi_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{5.42}$$

Une comparaison détaillée entre les différentes méthodes de décomposition modale est faite dans [268]. En résumé, la décomposition POD en espace fournit une base de modes propres

cohérents en espace uniquement. La méthode n'est donc pas capable de mettre en évidence les corrélations temporelles qui peuvent exister au sein de la base de données. Or, la cohérence temporelle est un phénomène très présent dans la plupart des écoulements contenant de grosses structures cohérentes.

En pratique, les modes propres de la POD sont composés de structures cohérentes provenant de différentes fréquences. Cela se traduit par un spectre fréquentiel large pour les coefficients $a_k(t)$ et ce comportement sera mis en évidence par la suite. Ce mélange de fréquences pour les modes propres signifie que chaque mode propre combine des phénomènes physiques de l'écoulement avec des échelles de temps différentes. Par conséquent, il est plus difficile d'extraire et d'analyser la contribution des différentes structures cohérentes de l'écoulement. Pour illustrer les propos précédents, une décomposition POD est réalisée sur la base de données initiales des fluctuations avec $\mathbf{q} = [\rho', u', v', w', T']$ (pour des raisons de capacité mémoire, seulement 10 000 *snapshots* sont utilisés à la place des 20 000 disponibles dans la base de données complète). L'analyse des 10 000 valeurs propres de la décomposition modale montrent que la décroissance en termes d'énergie est plutôt lente (Fig. 5.25). Environ 2 200 modes sont nécessaires pour obtenir 90 % de l'énergie totale et plus de 4 600 modes pour récupérer 99 % de cette dernière. Cela met en évidence le fait que la POD a des difficultés à produire un modèle réduit de la base de données initiale.



(a) Ensemble des valeurs propres.

(b) Zoom sur les 500 premières valeurs propres.

Figure 5.25: Contribution des valeurs propres de la base POD en pourcentage de l'énergie turbulente totale.

Une autre illustration intéressante est donnée en Fig. 5.26. La figure utilise la même représentation que la Fig. 11 dans [268]. Elle représente la densité spectrale de puissance de chaque coefficient temporel avec contour normalisé par la valeur maximale de la densité spectrale de puissance. Pour un mode donné, cela signifie que pour une fréquence donnée, plus la couleur est sombre, plus son niveau est proche du maximum de la densité spectrale de puissance. Cette représentation met en évidence la remarque précédente : les coefficients temporaux des modes propres obtenus par POD contiennent un large éventail de fréquences et les modes associés représentent donc un comportement de l'écoulement qui combinent plusieurs échelles de temps.

Pour compléter l'analyse, la représentation spatiale des modes POD est donnée en Fig. 5.27 pour la température et en Fig. 5.28 pour la vitesse axiale. En général, l'observation des différents modes montre que la POD a plus de difficultés à identifier une dynamique globale de l'écoulement. Par exemple, les modes 3 et 7 de température mettent en évidence une activité très locale, alors que les modes sont quasiment nuls dans le reste du canal. Par ailleurs, comme expliqué dans le paragraphe précédent, ces modes impliquent des structures avec des échelles de temps différentes, ce qui complique l'analyse. Pour des modes plutôt associés à la partie inertielle de la turbulence (ici les modes 500 et 900), les observations sont similaires à la SPOD. Cependant, la taille des structures semble plus importante au centre du canal que pour la région proche paroi, encore une fois à cause du mélange d'échelles de la POD.

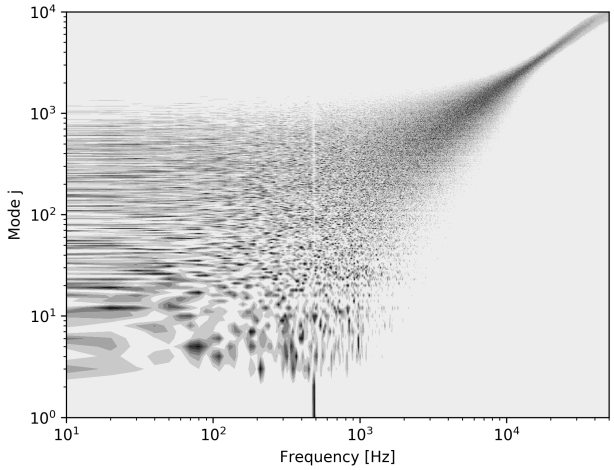
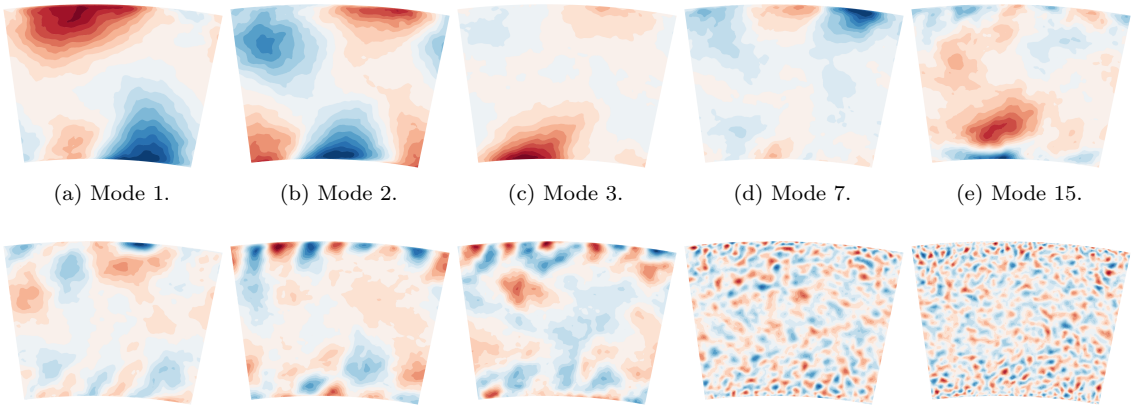


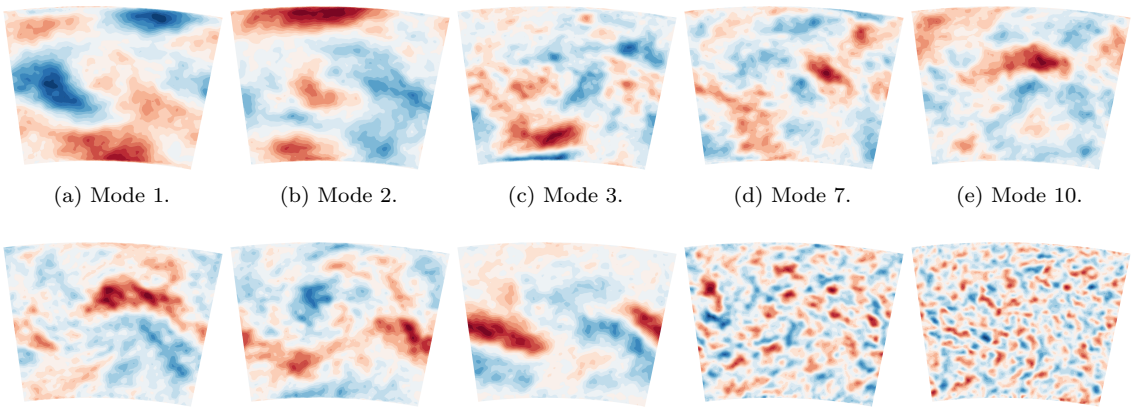
Figure 5.26: Contour des densités spectrales de puissance des coefficients temporaux de la POD normalisées par la valeur maximale de la densité spectrale de puissance de chaque coefficient.



(a) Mode 1. (b) Mode 2. (c) Mode 3. (d) Mode 7. (e) Mode 15.

(f) Mode 20. (g) Mode 25. (h) Mode 40. (i) Mode 500. (j) Mode 900.

Figure 5.27: Modes POD adimensionnés - Température.



(a) Mode 1. (b) Mode 2. (c) Mode 3. (d) Mode 7. (e) Mode 10.

(f) Mode 18. (g) Mode 20. (h) Mode 40. (i) Mode 500. (j) Mode 900.

Figure 5.28: Modes POD adimensionnés - u.

D'après la Fig. 5.26, il est clair que la dynamique des deux premiers modes est dominée par la fréquence du PVC à 500 Hz. Cette information est confirmée en traçant la densité spectrale de puissance des deux coefficients temporaux associés à ces deux premiers modes (Fig. 5.29). Et la fréquence 500 Hz est très peu présente dans les coefficients temporaux des autres modes. Ainsi, cela laisse penser que toute l'information liée à cette fréquence est stockée dans les deux premiers modes. Pour vérifier cette hypothèse, la Fig. 5.30 montre la somme des modes 1 et 2 pour la température et la vitesse axiale. Les deux contours obtenus sont à comparer aux Figs. 5.21a et 5.23a qui sont quasiment identiques. Cette similarité est logique puisque le mode 1 SPOD de la température et de la vitesse axiale contient la majorité de la dynamique de la base de données liée à la fréquence 500 Hz. Dans le cas de la POD, cette information est principalement contenue dans les deux premiers modes. Cet exemple est une bonne illustration de la difficulté qu'a la POD à décrire un écoulement complexe avec un nombre limité de modes.

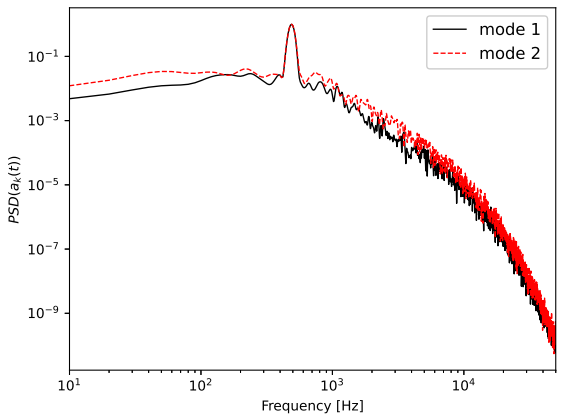
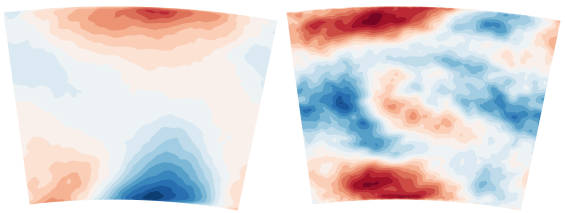


Figure 5.29: Densité spectrale de puissance des coefficients temporels des deux premiers modes de la base POD.



(a) Température. (b) Vitesse axiale.

Figure 5.30: Somme des deux premiers modes POD adimensionnés.

Décomposition modale 3 : DMD

La Décomposition Modale Dynamique ou *Dynamic Modal Decomposition* (DMD), développée par Schmid [241], est une alternative possible à la POD. L'idée est d'extraire les modes propres d'un opérateur linéaire qui relie un instantané de l'écoulement au suivant. Chaque mode est associé à une fréquence unique et à un taux de croissance/décroissance. Contrairement à la POD, les modes DMD sont en général non orthogonaux en espace. En un sens, la DMD peut être interprétée comme une orthogonalisation temporelle de la base de données [241].

Pour l'étude, la DMD est calculée sur l'ensemble des 20000 *snapshots* de la base de données, sans soustraire la moyenne temporelle en chaque point. La Figure 5.31 permet de visualiser l'ensemble des valeurs propres obtenues dans ce cas. À part quelques exceptions, les valeurs propres se situent toutes autour du cercle unité, ce qui signifie que leur facteur d'amplification est quasiment nul. Ce

comportement est plutôt attendu puisque l'écoulement au niveau de l'interface n'est pas amplifié localement par des instabilités par exemple.

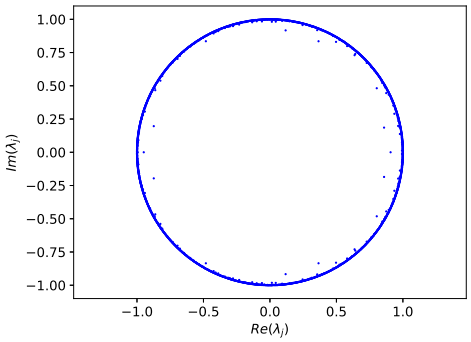
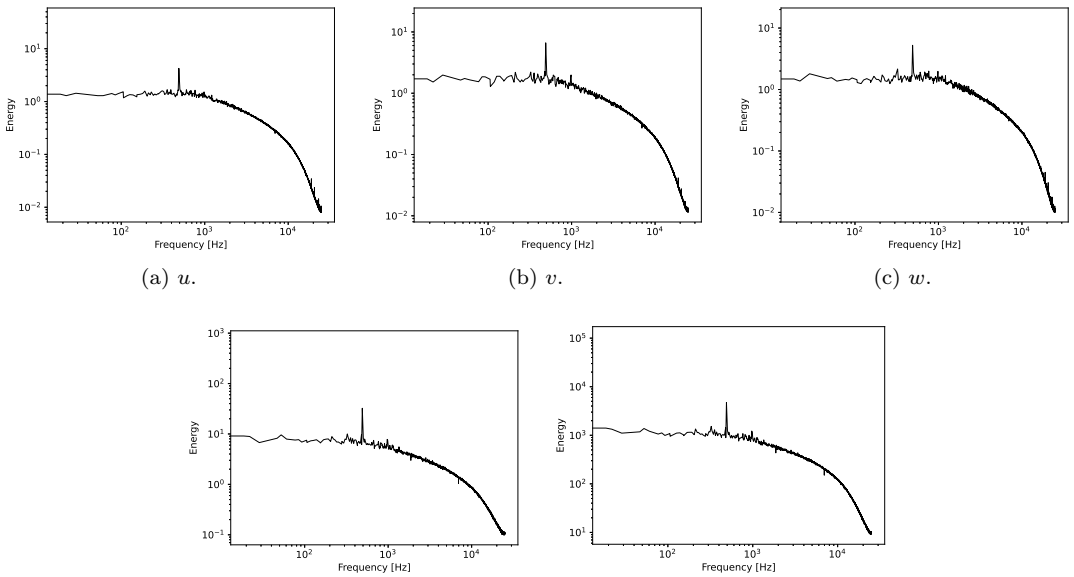


Figure 5.31: Valeurs propres de la DMD visualisées en fonction de leurs parties réelle et imaginaire.

Les spectres DMD obtenues pour les 5 grandeurs sont présentés en Fig. 5.32. Dans [241], un parallèle est fait entre la méthode DMD et la transformée de Fourier discrète (DFT). L'auteur montre que pour une application sur un jet turbulent, les modes DMD et DFT sont quasiment identiques. Il est donc logique de retrouver des spectres DMD assez bruité, surtout au niveau des hautes fréquences, à cause de la nature aléatoire de l'écoulement étudié et de l'incertitude de la DFT lorsqu'elle est calculée sur un seul ensemble de réalisations de l'écoulement.

L'analyse DMD sur un seul ensemble de réalisations pose aussi un second problème. Le caractère aléatoire d'un écoulement turbulent implique qu'il ne peut pas être décrit par un mode unique pour chaque fréquence. Une solution possible est de subdiviser la base de données en plusieurs sous-ensembles de réalisations de l'écoulement et de réaliser une DMD sur chacun des ensembles. De cette manière, plusieurs modes DMD seront obtenus pour chaque fréquence. Cependant, dans l'optique de réduire le rang du système initial, il est nécessaire d'approximer cet ensemble de modes par une base de taille réduite. Et c'est précisément l'objectif de la SPOD. Les modes SPOD fournissent une base optimale à chaque fréquence pour décrire l'ensemble des modes obtenus par DMD [241].



(a) u. (b) v. (c) w.

(d) T. (e) ρ.

Figure 5.32: Spectres DMD.

Les trois décompositions modales précédentes ont permis d'en apprendre davantage sur la dynamique de l'écoulement à l'interface entre la chambre de combustion et la turbine. En particulier, la SPOD s'est montrée particulièrement efficace pour identifier les structures dominantes de la physique de l'écoulement en identifiant la dynamique liée au PVC, que ce soit par sa cohérence spatiale ou sa fréquence associée. La suite de ce chapitre s'intéresse à l'utilisation de la SPOD pour construire une condition limite instationnaire rendant compte du couplage de la turbine avec la chambre, tout en compressant la taille de la base de données initiale.

5.4 Construction d'une condition limite d'entrée instationnaire

L'idée de cette section est de construire et de comparer différentes types de conditions limites d'entrée pour une simulation turbine isolée et à cette occasion d'en évaluer l'impact sur la prédiction de l'écoulement. La configuration utilisée est celle présentée en Fig. 5.33. Elle correspond simplement au domaine de la simulation intégrée coupée au niveau de l'interface chambre/turbine pour ne conserver que la turbine.

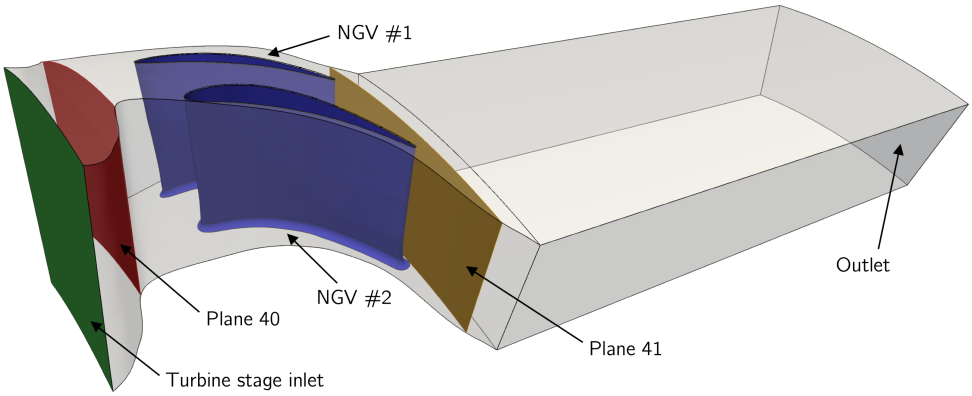


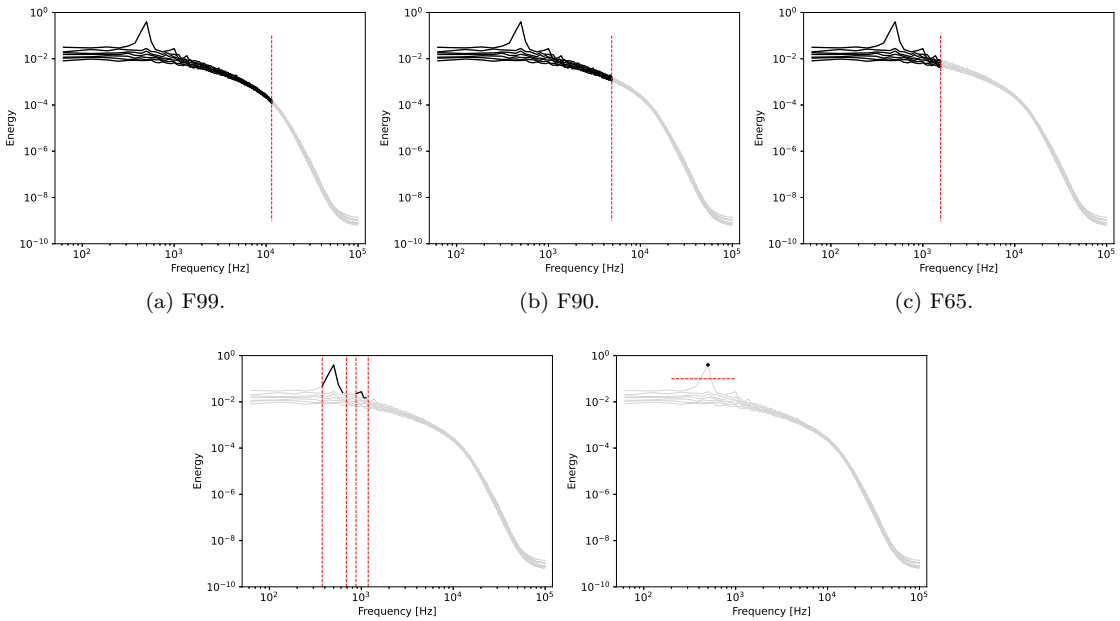
Figure 5.33: Configuration NGV isolée.

5.4.1 Définition de nouvelles conditions limites à partir de la décomposition modale SPOD

Comme expliqué dans la Section 5.2.2, il est possible d'effectuer des reconstructions partielles de la base de données initiales. Le choix des reconstructions ne peut toutefois être totalement arbitraire et peut donc être en partie déterminé par l'étude précédente sur les échelles de la turbulence et par les fréquences identifiées à l'interface. Avec cette idée, 5 reconstructions partielles sont effectuées à différents niveaux d'énergie totale,

- le cas **F99** correspond à une reconstruction contenant 99 % de l'énergie totale, avec les 7 modes et les 185 premières fréquences allant jusqu'à environ 11 500 Hz, au milieu de la région dissipative,
- le cas **F90** correspond à une reconstruction contenant 90 % de l'énergie totale, avec les 7 modes et les 79 premières fréquences allant jusqu'à environ 5 000 Hz, à la fin de zone inertielle,
- le cas **F65** correspond à une reconstruction contenant 65 % de l'énergie totale, avec les 7 modes et les 26 premières fréquences allant jusqu'à environ 1 500 Hz, au début de la zone inertielle et juste après la deuxième harmonique de la fréquence du PVC,
- le cas **F20** correspond à une reconstruction contenant 20 % de l'énergie totale, avec seulement le premier mode et les fréquences autour de 500 Hz et de la première harmonique à 1 000 Hz,
- et le cas **F10** correspond à une reconstruction contenant 10 % de l'énergie totale, avec seulement le premier mode et la fréquence dominante à 500 Hz.

La position de la coupure sur le spectre SPOD est présentée pour chaque cas en Fig. 5.34. À noter que comme rappelé par l'Eq. (5.3), la décomposition modale SPOD se fait sur les fluctuations de la base de données (*i.e.* après soustraction de la moyenne temporelle). Les reconstructions partielles de chaque cas permettent donc d'obtenir différentes reconstructions pour ces fluctuations. C'est pourquoi le champ moyen reste inchangé et pour obtenir la base de données de chaque cas qui servira à reproduire la condition limite d'entrée, ce champ moyen est additionné aux fluctuations obtenues à la suite de la reconstruction partielle associée à chaque cas.



(a) F99. (b) F90. (c) F65.

(d) F20. (e) F10.

Figure 5.34: Spectres SPOD des reconstructions partielles.

Les caractéristiques exactes des différentes reconstructions SPOD sont présentées dans la Table 5.2. La dernière colonne du tableau contient une information supplémentaire : le coût de stockage de la condition limite. L'idée principale de la reconstruction partielle de la base de données est de fournir une condition limite qui réplique au mieux le couplage entre la chambre et la turbine tout en utilisant une base de données plus réduite que l'ensemble des *snapshots* initiaux. Ce coût de stockage est exprimé grâce à la relation de l'Eq. (5.22) ainsi que relativement à la taille de la base de données initiale.

Cas	Nombre de fréquences	Nombre de modes	Énergie totale de la reconstruction	Coût de stockage de la reconstruction par rapport à la base de données initiale
F99	185	7	98.99 %	6.5 %
F90	79	7	90.03 %	2.8 %
F65	26	7	64.58 %	0.9 %
F20	10	1	18.35 %	0.05 %
F10	1	1	9.37 %	0.005 %

Table 5.2: Détails de chaque reconstruction avec l'énergie totale contenue dans la condition d'entrée et le coût de stockage par rapport à la base de données initiale.

Ces 5 cas qui exploitent la décomposition modale SPOD pour générer une condition limite instationnaire sont comparés à 4 autres cas qui utilisent des conditions limites traditionnelles, de type non réfléchissante (NSCBC) :

- le cas **S0** : ici la condition limite d'entrée est imposée en spécifiant des grandeurs 0D constantes en espace et en temps, *i.e.* en imposant les trois composantes de quantité de mouvement ρu, ρv et ρw et la température statique (valeurs moyennées spatialement et temporellement de la simulation intégrée).

- le cas **T0** : les quantités imposées à l'entrée sont les mêmes que pour le cas **S0**, avec l'ajout de fluctuations de vitesse générées aléatoirement pour créer de l'activité turbulente. La turbulence est ici injectée grâce à l'approche synthétique proposée par Guezennec et Poinsot [120] à partir d'un spectre de Passot-Pouquet [204]. La valeur de fluctuation de vitesse utilisée est obtenue à partir de la simulation intégrée et la longueur la plus énergétique est spécifiée à $\lambda_e = h/4$, avec h la hauteur du canal. Cette grandeur correspond à la taille caractéristique des structures les plus énergétiques d'un spectre de Passot-Pouquet (à ne pas confondre avec l'échelle intégrale Λ_f qui s'exprime comme $\Lambda_f = \lambda_e/\sqrt{2\pi}$).

- le cas **S2** : la condition limite est imposée à partir de cartographies 2D de la moyenne temporelle à l'interface de la simulation intégrée pour les grandeurs ρu, ρv, ρw et T. La condition limite est donc constante en temps, mais variable en espace.

- le cas **T2** : ce cas est identique à **S2** avec l'ajout d'une cartographie 2D de fluctuations de vitesse, utilisée pour générer une activité turbulente locale au niveau du plan d'entrée. La cartographie est obtenue à partir d'une moyenne temporelle à l'interface de la simulation intégrée. Au contraire du cas **T0**, la valeur de fluctuations de vitesse utilisée pour générer la turbulence synthétique n'est pas constante en espace. La longueur la plus énergétique est de nouveau fixée à $\lambda_e = h/4$.

Au niveau de la nomenclature des cas, le S fait référence à un cas dont la condition d'entrée est stationnaire, alors que le T fait référence à une condition d'entrée turbulente. Enfin le "0" correspond à une condition limite pour laquelle seulement des grandeurs 0D sont imposées, *i.e.* une condition limite constante en espace, alors que les cas avec un "2" correspondent à des conditions limites pour lesquelles une cartographie 2D est utilisée.

Pour les cas **T0** et **T2**, l'injection de turbulence synthétique est isotrope, c'est-à-dire que les fluctuations de vitesse ont la même amplitude pour les trois composantes de vitesse. Pour le cas **T2**, l'énergie cinétique turbulente TKE est calculée en chaque nœud du plan d'entrée à partir des composantes de vitesse turbulente de la simulation intégrée,

$$TKE(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{u'(x)^2} + \overline{v'(x)^2} + \overline{w'(x)^2}\right), \tag{5.43}$$

avec $\overline{\bullet}$ l'opérateur de moyenne temporelle. La fluctuation de vitesse locale $U_{\text{rms}}(x)$ imposée en chaque nœud est alors simplement déterminée par,

$$U_{\text{rms}}(x) = \sqrt{\frac{3}{2} TKE(x)}. \tag{5.44}$$

Pour le cas **T0**, la valeur utilisée correspond à la moyenne spatiale de $U_{\text{rms}}(x)$ sur le plan d'entrée.

L'ensemble des cas comparés est résumé sur la Fig. 5.35. Sur cette figure, l'opérateur $\overline{\bullet}$ correspond à la moyenne temporelle et l'opérateur $\langle\bullet\rangle$ à la moyenne spatiale.

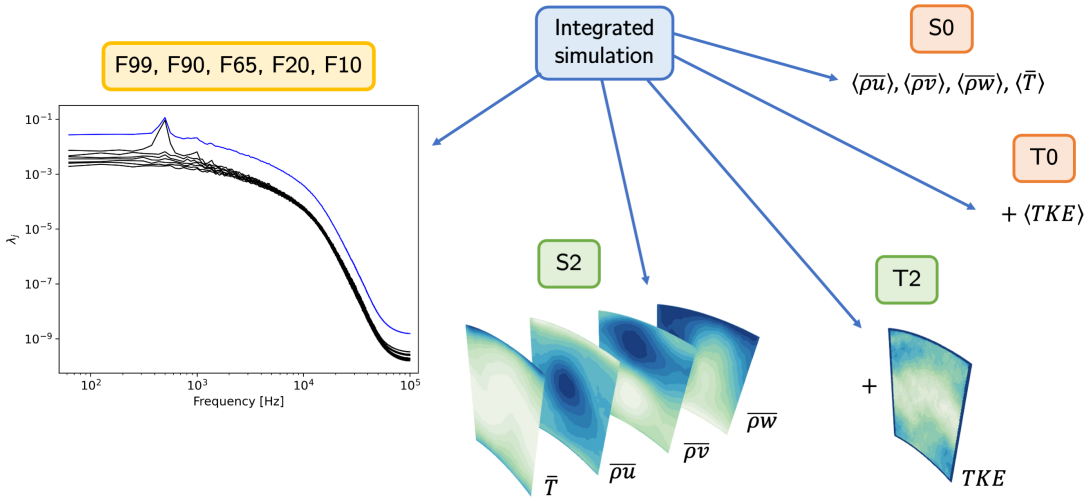
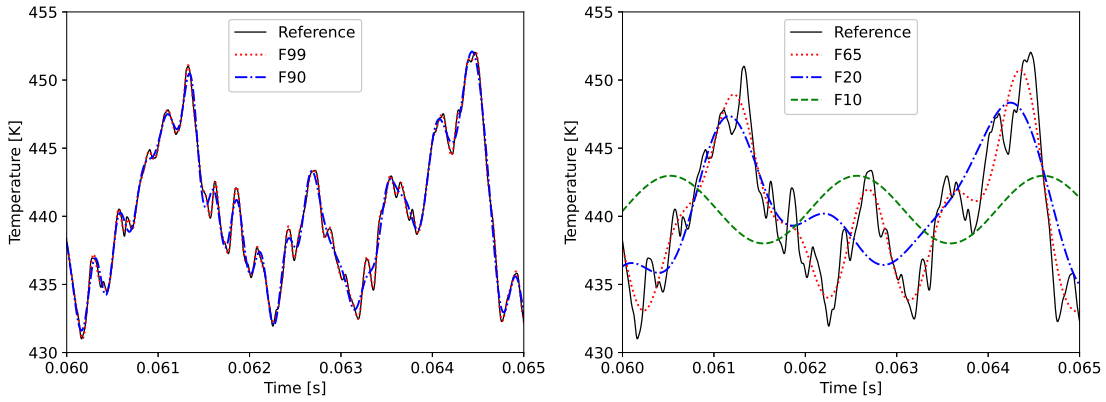


Figure 5.35: Résumé des cas comparés.

5.4.2 Analyse des champs reconstruits

Pour donner une meilleure idée des caractéristiques de la condition limite imposée pour les cas **F99** à **F10**, la Fig. 5.36 trace l'évolution de la température statique moyennée sur l'ensemble des nœuds du plan d'entrée pour les 5 cas par rapport à la référence (la base de données initiale) pendant une durée de 0.005 s. La coupure fréquentielle du spectre SPOD est clairement visible sur cette évolution. Le cas **F99** reproduit très bien les changements rapides de température de la référence. Pour le cas **F90**, la tendance globale est respectée, mais les variations rapides (et donc à hautes fréquences) sont lissées. Ce comportement est encore plus marqué pour le cas **F65**. Pour les cas **F20** et **F10**, dont la reconstruction ne contient qu'un nombre limité de fréquences, l'évolution est encore plus simplifiée. Pour le cas **F10**, l'oscillation à la fréquence unique de 500 Hz est bien présente.



(a) F99, F90.

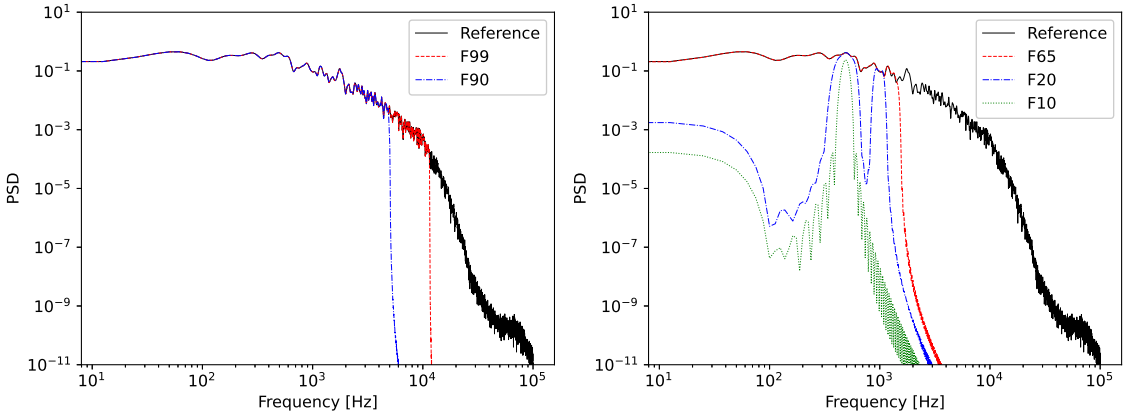
(b) F65, F20, F10.

Figure 5.36: Évolution de la température statique moyennée sur l'ensemble des nœuds du plan d'entrée.

Les figures précédentes ont permis de donner un aperçu global du type de signal imposé par les conditions instationnaires des cas **F99** à **F10** sur l'ensemble du plan d'entrée. La suite de cette section a pour but de fournir une analyse plus quantitative et locale dans le domaine spectral pour des sondes situées sur différents plans. La Figure 5.37 présente les densités spectrales de puissance de la vitesse axiale pour les cas **F99** à **F10** sur une sonde située au centre du plan d'entrée (à mi-hauteur de veine et à un angle de 8°). L'analyse des PSD des signaux provenant directement des bases de données reconstruites (avant l'application des conditions limites) met

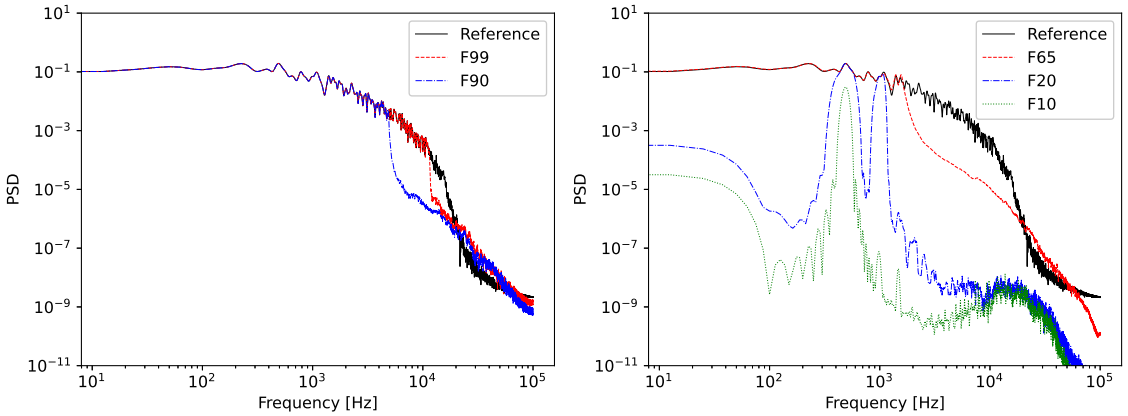
clairement en évidence les fréquences de coupure choisies pour les différents cas (Fig. 5.34). Au-delà des fréquences de coupure respectives de chaque cas, les niveaux d'énergie sont nuls.

Il est possible de faire la même analyse après l'application des conditions limites, puisque la Fig. 5.37 analysait les signaux de la sonde pour les différentes reconstructions partielles obtenues directement par la SPOD (donc avant l'application des conditions limites). Toutefois, dans un calcul LES, avec l'application des conditions limites non réfléchissantes (type NSCBC), les grandeurs imposées en entrée ne sont pas strictement identiques aux valeurs cibles. Ces grandeurs sont adaptées pour éviter la génération d'ondes acoustiques parasites. C'est pourquoi, la Fig. 5.38 qui trace les PSD des signaux de vitesse axiale de la même sonde provenant des différentes simulations (*i.e.* après l'application des conditions limites) est différente de la Fig. 5.37. La fréquence de coupure utilisée pour chaque reconstruction partielle est toujours visible, néanmoins, la partie du spectre située après la fréquence de coupure (qui était auparavant nulle) est ici comblée par la condition limite. Le niveau d'énergie reste toutefois très bas.



(a) F99, F90. (b) F65, F20, F10.

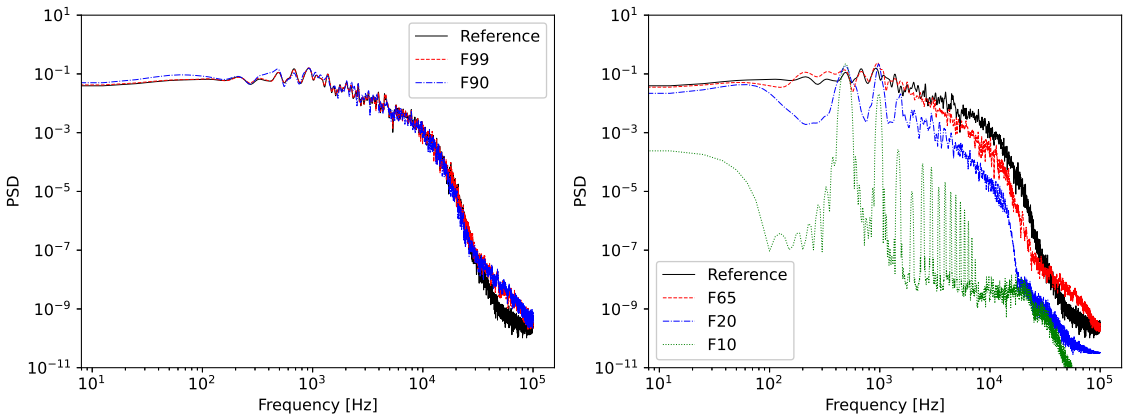
Figure 5.37: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan d'entrée (à l'interface) pour les reconstructions partielles (avant l'application des conditions limites).



(a) F99, F90. (b) F65, F20, F10.

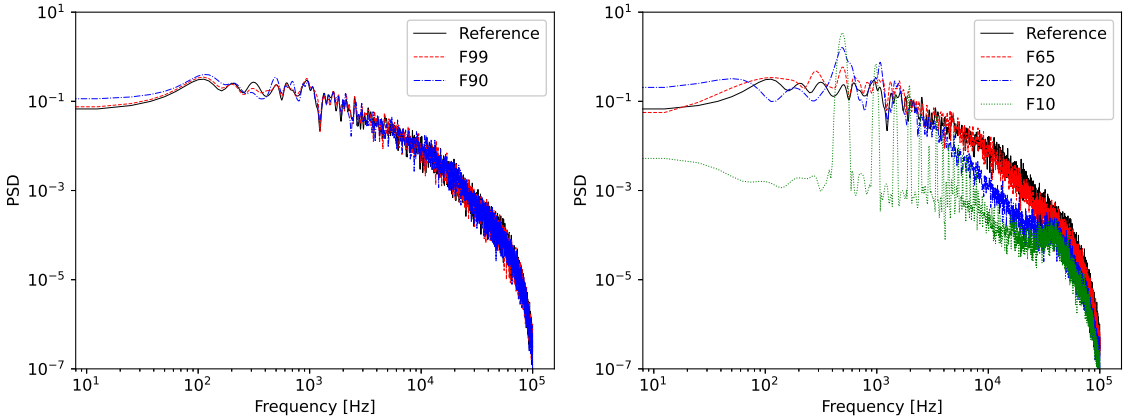
Figure 5.38: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan d'entrée (à l'interface) pour les simulations (après l'application des conditions limites).

En effectuant de nouveau une PSD sur une sonde cette fois-ci située au niveau de plan 40 (situé juste après le plan d'entrée précédent), le constat est différent (Fig. 5.39). Pour les cas **F99** et **F90**, la fréquence de coupure n'est plus visible. Ceci n'est pas surprenant puisque la fréquence de coupure pour ces deux cas est située à la fin de la zone inertielle et dans la région dissipative de la cascade énergétique respectivement. Par conséquent, par diffusion de l'énergie depuis les grandes échelles vers les plus petites, le spectre est progressivement reconstitué. Pour le cas **F65** qui possède une fréquence de coupure au début de la zone inertielle, ce n'est plus le cas. Il y a également un transfert d'énergie entre les grandes et les petites échelles mais le niveau énergétique des petites échelles ne correspond plus à la référence. Enfin, pour les cas **F20** et **F10** dont la reconstruction est composée d'un filtre passe bande autour de 500 Hz et 1 000 Hz ou uniquement de la fréquence 500 Hz respectivement, le spectre obtenu est aussi très différent de la référence. Leur spectre respectif met principalement en évidence les multiples harmoniques des fréquences retenues. Au niveau du plan 41, les observations faites au plan 40 restent globalement valables (Fig. 5.40).



(a) F99, F90. (b) F65, F20, F10.

Figure 5.39: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan 40 pour les simulations.

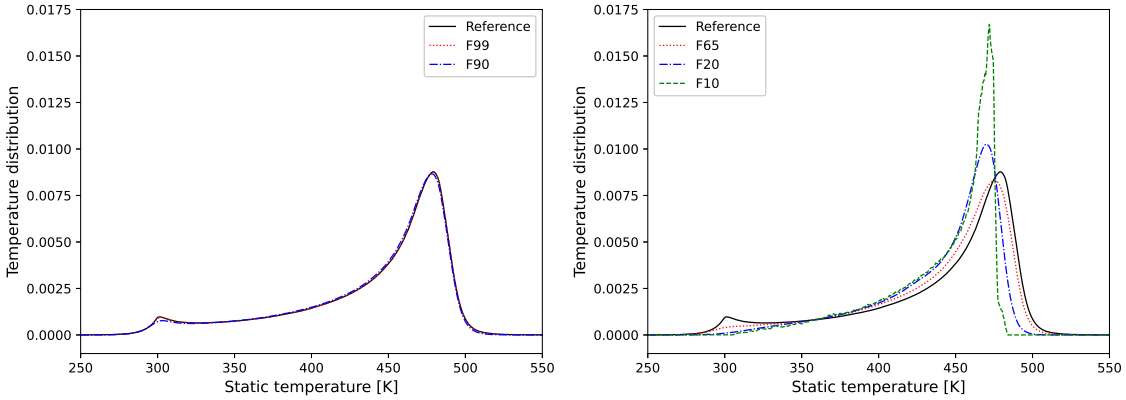


(a) F99, F90. (b) F65, F20, F10.

Figure 5.40: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan 41 pour les simulations.

Pour finir et afin d'illustrer l'impact des divers signaux, la distribution de température statique pour l'ensemble des nœuds du plan d'entrée et pour les 20000 *snapshots* de la base de données est montrée en Fig. 5.41. Pour la référence ainsi que pour les cas **F99** et **F90**, un pic est observé à

300 K qui correspond à la température d'injection de l'écoulement froid des multi-perforations de la chambre de combustion. À l'interface chambre/turbine, ces valeurs extrêmes de température sont donc toujours visibles. Le second pic se situe à une valeur inférieure à 513 K (température d'injection de l'écoulement chaud du plénum) à cause du mélange entre l'écoulement provenant de l'injecteur et celui provenant des multi-perforations. À partir de **F65**, le pic à 300 K n'est quasiment plus visible et il disparait complètement pour les cas **F20** et **F10**. Ceci est simplement dû au fait que les fluctuations imposées en entrée ne sont plus suffisamment importantes pour atteindre cet extremum. Par ailleurs, quand la reconstruction devient de plus en plus partielle, la distribution de température se recentre progressivement et les valeurs extrêmes ne sont plus atteintes par la condition limite [155].



(a) F99, F90.

(b) F65, F20, F10.

Figure 5.41: Comparaison des distributions de température statique au plan d'entrée.

5.4.3 Effets des conditions limites sur la prédiction des calculs isolés

Points de fonctionnement et activité turbulente des différentes simulations isolées

La première étape pour évaluer les différentes conditions limites d'entrée et leur impact sur l'écoulement prédit par ce calcul isolé consiste à comparer les grandeurs 0D de ces cas isolés. Les grandeurs analysées sont présentées dans la Table 5.3. La deuxième colonne contient le débit réduit $Q_r = Q\sqrt{RT_t^{40}}/(P_t^{40}L^2)$, avec L le rayon à mi-hauteur de veine. Les troisième et quatrième colonnes comparent les ratios de pression et température totales entre le plan 40 et la sortie du domaine. La position exacte des plans est donnée sur le Fig. 5.33. À noter que les grandeurs sont moyennées spatialement et temporellement en chaque plan. Cette comparaison est faite pour vérifier que le choix de la condition limite d'entrée n'affecte pas le point de fonctionnement simulé. Une modification du point de fonctionnement pourrait en effet compliquer la comparaison des différents cas. À partir des données du tableau, il est clair de chaque point de fonctionnement reste très proche de la simulation intégrée de référence. La différence relative de débit réduit par rapport à la référence reste en dessous de 0.2 % pour tous les cas. Ceci n'est pas surprenant puisque les conditions d'entrée sont imposées en débit. En ce qui concerne les ratios de pression et température totales, les cas SPOD sont quasiment identiques à la référence. Pour les conditions limites standards, quelques différences sont observées. Notamment au niveau du ratio de température totale, pour lequel les cas **S0**, **T0** et **S2** ont des valeurs légèrement plus basses. Cette différence peut s'expliquer par la différence en termes de propriétés de l'écoulement. En particulier, pour les cas **S0** et **S2**, qui utilisent des conditions limites d'entrée stationnaires, l'activité turbulente est moins prononcée que pour la référence. Cette activité turbulente plus faible peut réduire les pertes globales dans le domaine et donc le ratio de température totale [122].

	Q_r	P_t^{40}/P_t^{Out}	T_t^{40}/T_t^{Out}
Ref.	0.0868	1.122	1.034
F99	0.0868	1.122	1.034
F90	0.0868	1.122	1.034
F65	0.0868	1.122	1.034
F20	0.0868	1.121	1.034
F10	0.0868	1.120	1.034
S0	0.0871	1.112	1.022
T0	0.0867	1.119	1.024
S2	0.0867	1.119	1.028
T2	0.0865	1.120	1.032

Table 5.3: Comparaison du débit réduit $Q_r = \dfrac{Q\sqrt{RT_t^{40}}}{P_t^{40}L^2}$ (avec Q le débit massique, R la constante des gaz parfaits et L le rayon à mi-hauteur de veine) et des ratios de pression et température totales entre le plan 40 et la sortie.

Pour mieux quantifier les différences introduites par le choix de la condition limite d'entrée au niveau de l'activité turbulente, l'énergie cinétique turbulente, les fluctuations RMS des trois composantes de vitesse et de température totale ainsi que l'intensité turbulente moyennées spatialement aux plans 40 et 41 sont comparées pour chaque cas (Tables 5.4 et 5.5). Étant donné que le plan 40 est directement situé en aval du plan d'entrée, les propriétés obtenues au niveau de ce plan sont quasiment exclusivement causées par la condition limite d'entrée choisie. Pour les cas **F99** et **F90**, pour lesquels une grande partie de l'énergie des fluctuations est conservée dans leur reconstruction (respectivement 99 % et 90 %), les valeurs obtenues sont très comparables aux valeurs de référence. Quand la reconstruction contient une part moins importante de l'énergie, les valeurs des fluctuations diminuent progressivement (cas **F65**, **F20** et **F10**). De manière peu surprenante, les cas **S0** et **S2**, sans injection de turbulence synthétique ont des niveaux de fluctuations proche de zéro. Enfin, pour les cas **T0** et **T2**, les valeurs de TKE au plan 40 sont très proches de la référence puisque cette valeur a été utilisée pour définir les paramètres de l'injection de turbulence synthétique. Cependant, comme la méthode utilise une turbulence homogène et isotrope, les fluctuations des trois composantes de vitesse sont comparables, contrairement à la référence qui présente une certaine anisotropie des fluctuations avec $\langle \overline{v_{\text{rms}}} \rangle / \langle \overline{u_{\text{rms}}} \rangle \simeq 1.16$ et $\langle \overline{w_{\text{rms}}} \rangle / \langle \overline{u_{\text{rms}}} \rangle \simeq 1.17$. Par ailleurs, puisque la méthode d'injection utilisée ne permet pas d'injecter des fluctuations de température en plus des fluctuations de vitesse, les fluctuations RMS de température totale sont très faibles.

Au niveau du plan 41, pour les cas SPOD, les observations sont similaires. Après le passage de la turbine, la hiérarchie des cas est conservée. Les cas utilisant une grande partie de l'énergie dans leur reconstruction ont des valeurs très proches de la référence. De même, les cas sans injection de turbulence ont toujours des valeurs de fluctuations très faibles. Pour les cas **T0** et **T2**, alors que les niveaux de TKE au plan 40 étaient identiques à la référence, la dissipation de TKE a été plus importante et au plan 41, les niveaux sont sensiblement plus bas. La traversée de la turbine a aussi élevé les fluctuations de température totale pour ces derniers.

Enfin, au plan 40, la valeur d'intensité turbulente du cas de référence est relativement élevée. Et cette valeur est comparable pour les cas **F99** et **F90**, mais aussi pour le cas **T2**. Cependant, au plan 41, à cause de l'accélération importante de l'écoulement à la traversée de la turbine, l'intensité turbulente diminue de manière significative (environ divisée par 5).

	$\langle \overline{TKE} \rangle$ $\left[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]$	$\langle \overline{u_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{v_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{w_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{I_\mathrm{u}} \rangle$ [%]	$\langle \overline{T_{t,rms}} \rangle$ [K]
Ref.	**323.04**	**12.91**	**15.38**	**14.97**	**29.66**	**33.01**
F99	321.4	12.86	15.35	14.92	29.58	33.05
F90	322.08	12.81	15.41	14.89	29.6	33.32
F65	259.39	11.21	14.15	13.01	26.46	31.59
F20	100.04	6.75	9.09	7.6	16.55	20.72
F10	38.19	3.4	5.69	4.03	10.05	12.11
S0	2.77	0.96	1.33	1.02	2.54	2.22
T0	321.72	14.25	14.92	14.45	31.47	3.04
S2	2.31	0.96	1.08	1.0	2.4	2.1
T2	327.55	14.38	14.96	14.37	29.71	11.11

Table 5.4: Moyenne spatiale de l'énergie cinétique turbulente, des fluctuations RMS des trois composantes de vitesse, de l'intensité turbulente et des fluctuations RMS de température totale au plan 40. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la référence. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %.

	$\langle \overline{TKE} \rangle$ $\left[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]$	$\langle \overline{u_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{v_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{w_{rms}} \rangle$ $\left[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$	$\langle \overline{I_\mathrm{u}} \rangle$ [%]	$\langle \overline{T_{t,rms}} \rangle$ [K]
Ref.	**629.74**	**18.8**	**19.96**	**18.43**	**5.92**	**22.81**
F99	631.79	18.84	19.96	18.48	5.92	22.77
F90	647.87	19.16	20.14	18.79	6.0	22.92
F65	681.92	19.62	20.6	19.45	6.17	24.7
F20	487.03	15.46	18.09	15.09	5.1	22.74
F10	342.86	11.53	15.36	11.09	4.12	18.2
S0	194.93	6.73	9.97	5.53	2.62	4.95
T0	520.47	17.57	16.74	16.45	5.41	10.16
S2	193.87	7.1	10.42	6.32	2.79	6.34
T2	575.65	18.54	18.25	17.58	5.72	14.53

Table 5.5: Moyenne spatiale de l'énergie cinétique turbulente, des fluctuations RMS des trois composantes de vitesse, de l'intensité turbulente et des fluctuations RMS de température totale au plan 41. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la référence. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %.

Évolution de la TKE au passage de la turbine

Comme le montre la Fig. 5.42, les niveaux de TKE au niveau de l'entrée de la turbine sont comparables entre le cas de référence, les cas **F99**, **F90** et les cas avec injection de turbulence **T0** et **T2**. Après l'entrée, l'évolution de la TKE est différente selon les cas. Cette différence de comportement s'explique par la différence entre les trois composantes de la TKE. Pour les cas **T0** et **T2**, l'injection de turbulence synthétique est basée sur un modèle de turbulence homogène isotrope. Les niveaux de fluctuations des trois composantes de vitesse sont donc quasiment identiques et semblent se dissiper plus rapidement que le cas de référence. Au contraire, pour le cas de référence et pour les cas reproduisant une turbulence réaliste, basée sur l'influence de la chambre, les fluctuations des trois composantes de vitesse ne sont pas identiques. Les niveaux de v' et w' sont significativement plus élevés que u'. À cause de cette hétérogénéité, le comportement de la TKE est différent puisqu'elle entraine une différence en termes de topologie de l'écoulement. Ensuite, pour l'ensemble des cas, la traversée de la turbine entraine une forte augmentation de la TKE jusqu'au bord de fuite de la pale. Cette augmentation de la TKE est comparable pour tous les cas (environ 60 % de la valeur maximale de TKE pour le cas de référence), à l'exception des cas **S0** et **S2** sans injection de turbulence (seulement 35 % de la valeur maximale de TKE pour le cas de référence).

L'analyse de ces courbes révèlent qu'un niveau de TKE égal à la simulation de référence pour la condition d'entrée d'une simulation isolée n'est pas suffisant pour reproduire un comportement réaliste. En effet, même si le niveau de TKE des cas **T0** et **T2** est proche de la référence en entrée, ce niveau est 15 % inférieur pour le cas **T0** et 10 % inférieur pour le cas **T2** au niveau du plan 41. Pour les cas **F20** et **F10** et pour les deux cas sans injection de turbulence, à cause du faible niveau d'agitation turbulente en entrée, la TKE au bord d'attaque est plus élevée qu'au plan d'entrée.

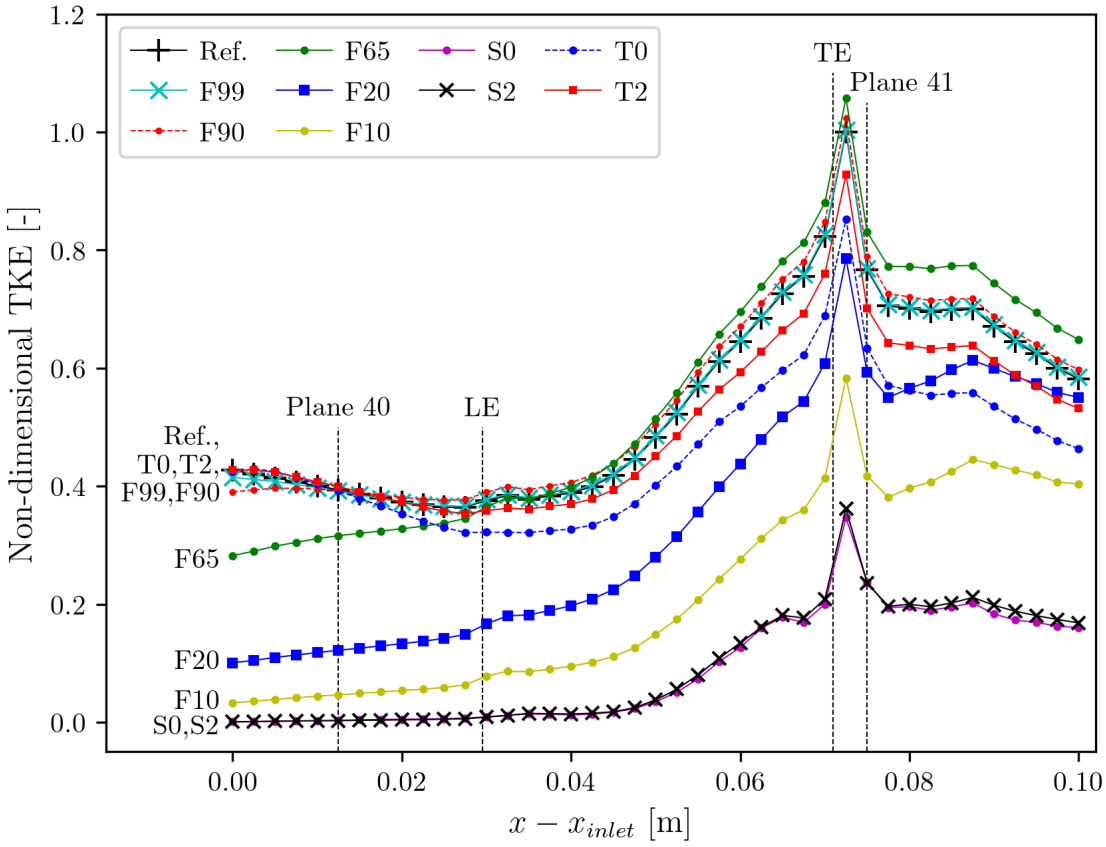


Figure 5.42: Évolution de l'énergie cinétique turbulente le long de la position axiale adimensionnée par le maximum du cas de référence. Les positions du plan 40, du bord d'attaque (LE), du bord de fuite (TE) et du plan 41 sont indiquées.

Enfin, lors de la traversée de la turbine entre les repères LE et TE, le comportement des différents cas est quasiment identique. L'augmentation est plutôt lente sur le premier tiers de corde et beaucoup plus rapide après, à cause de la transition de la couche limite. Ensuite, le maximum de TKE est atteint juste après le bord de fuite de la pale, dans son sillage. Ce maximum est suivi d'une décroissance progressive de la TKE par dissipation. À noter que pour les cas **F20** et **F10**, même si leur niveau initial de TKE était significativement plus bas que la référence au plan d'entrée, le niveau de TKE au plan de sortie est beaucoup plus proche de la valeur finale de référence par rapport aux cas **S0** et **S2** sans injection de turbulence.

5.4.4 Comparaison des cartographies 2D et des profils 1D aux plans 40 et 41

Les comparaisons précédentes ont permis de comprendre l'impact des conditions limites d'entrée sur les grandeurs 0D de l'écoulement. La suite de l'étude s'intéresse à des grandeurs 1D et 2D.

Plan 40

Pour commencer, les Figs. 5.43 et 5.44 présentent la vitesse axiale et la température totale moyennes au plan 40 pour la simulation de référence et pour tous les cas isolés. Pour ces deux grandeurs, les cas **F99** à **F10** sont quasiment identiques à la référence, puisque la méthode de reconstruction choisie conserve le valeur moyenne. C'est seulement les fluctuations par rapport à cette valeur moyenne qui sont approximées par SPOD. Pour les cas **S0** et **T0**, il est logique de retrouver une cartographie très homogène. Enfin, pour les cas **S2** et **T2**, l'accord avec la référence est aussi très bon. À noter que pour les deux grandeurs, sur les cas **T0** et **T2**, une strie verticale est visible au centre du domaine. Ce phénomène est causé par la méthode d'injection de turbulence synthétique. Les hypothèses initiales de la méthode d'injection sont restreintes à la turbulence homogène isotrope. Or, la condition périodique courbée positionnée assez proche du plan d'entrée juste en amont de l'aube #2 invalide cette hypothèse, perturbant par conséquent la génération de turbulence. Pour les fluctuations RMS de ces deux mêmes grandeurs (Figs. 5.45 et 5.46), les différences entre les cas sont plus marquées. Tout d'abord, dans la simulation de référence, une région de fluctuations de vitesse élevées est observée au centre du canal. Elle est causée par le PVC qui crée une zone de recirculation au centre, générant ainsi de fortes fluctuations turbulentes dans cette région. Pour la température, c'est le comportement inverse qui est remarqué. Étant donné que l'écoulement provenant de l'injecteur est à une température quasiment constante, les fluctuations de température au centre du canal sont faibles. Au contraire, proche des parois de la chambre et donc proche des multi-perforations qui servent à injecter un écoulement froid, le mélange gaz froid/gaz chaud génère des fluctuations de température importantes. Pour les cas **F99** et **F90**, l'accord avec la référence est excellent. Pour le cas **F65**, la comparaison est légèrement moins bonne mais reste très satisfaisante. Pour **F20** et **F10**, la solution moyenne est largement dégradée et même si la forme globale des contours reste comparable à la référence, les niveaux de fluctuations sont sensiblement plus faibles. Évidemment, pour les cas **S0** et **S2**, les fluctuations de vitesse et de température sont quasiment nulles. Il est intéressant de noter que malgré la cartographie 2D de vitesse RMS imposée en entrée pour le cas **T2**, le contour obtenu reste très différent de la référence. Enfin, comme mentionné précédemment, la méthode d'injection de turbulence ne permet pas d'injecter de fluctuations de température. C'est pourquoi les niveaux de fluctuations RMS de température reste très bas pour les cas **T0** et **T2**.

Pour fournir une comparaison plus quantitative entre les cas, les profils radiaux de température totale moyenne avec l'enveloppe de fluctuations RMS sont aussi présentés en Fig. 5.47 par rapport à la référence. Les conclusions ne sont pas différentes des observations précédentes. Les cas **F99**, **F90** et **F65** sont très bons, malgré une légère dégradation du profil en pied et en tête pour **F65**. Quand la reconstruction est moins complète (**F20** et **F10**), l'enveloppe de fluctuations RMS se resserre progressivement autour du profil moyen. La prédiction du profil moyen reste cependant très bonne. Pour les conditions limites standards, les fluctuations de température sont en effet largement plus faibles que la référence.

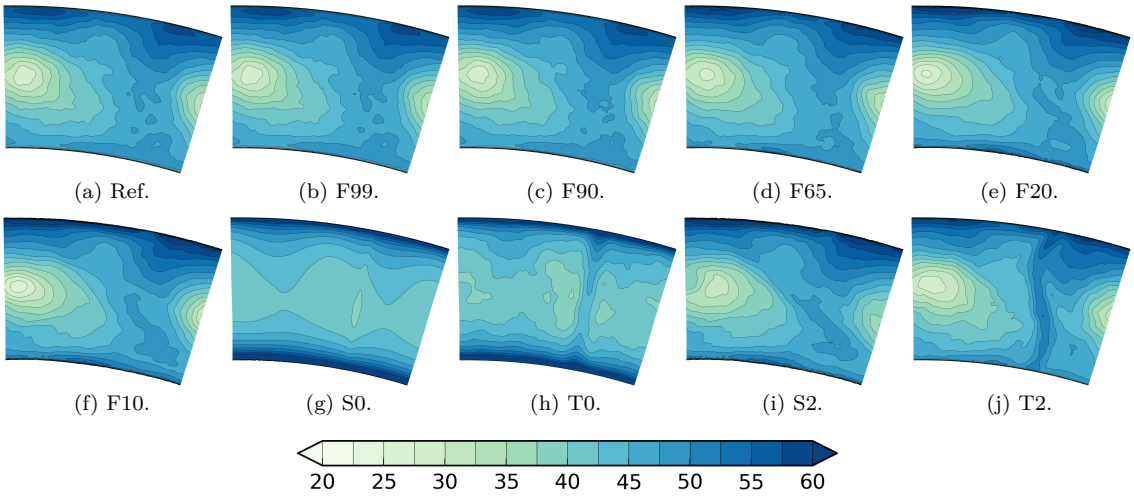


Figure 5.43: Comparaison de la vitesse axiale moyenne [m.s^{-1}] au plan 40.

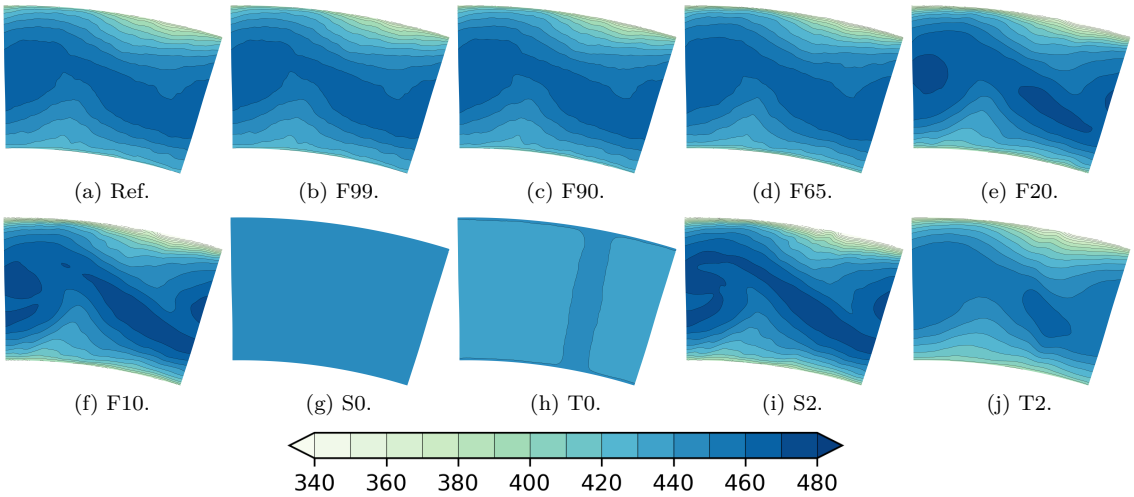


Figure 5.44: Comparaison de la température totale moyenne [K] au plan 40.

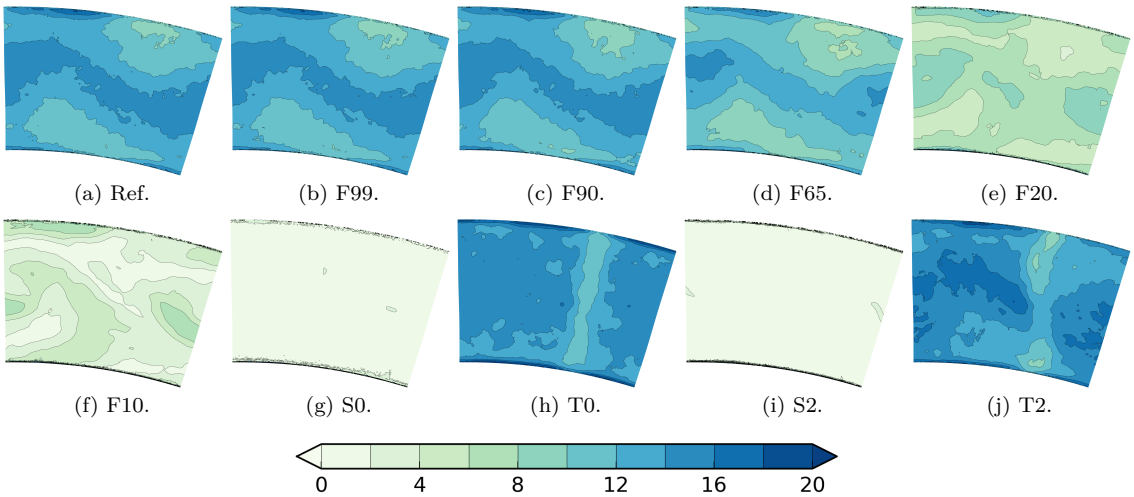
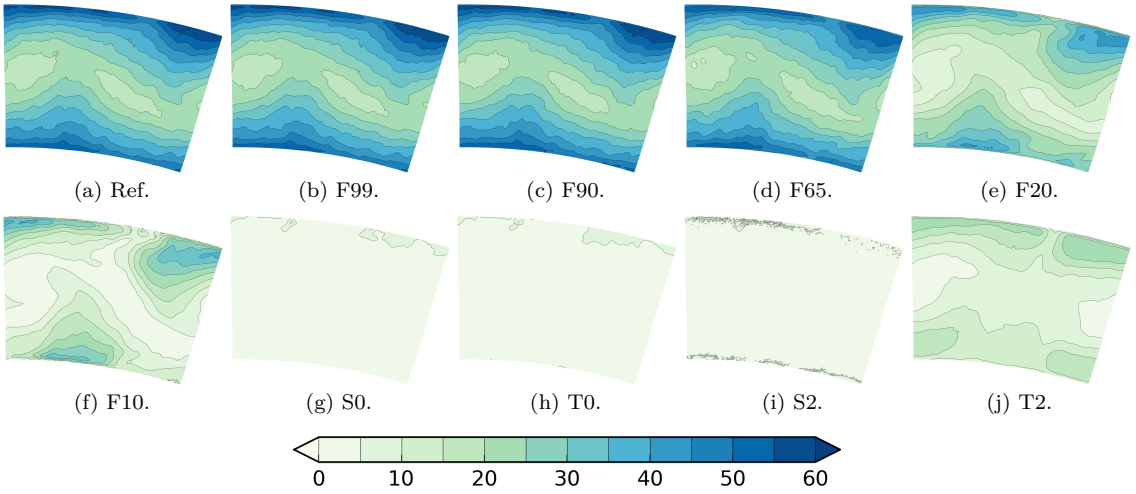


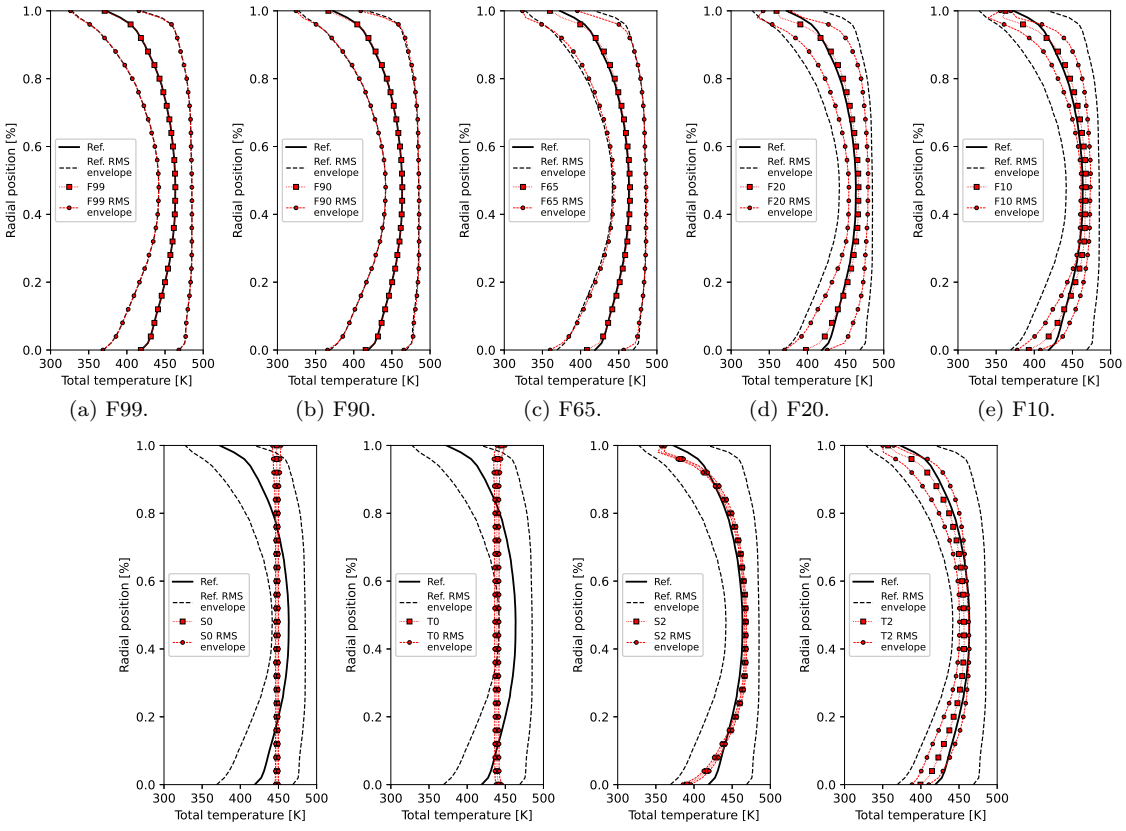
Figure 5.45: Comparaison de la vitesse axiale RMS moyenne [m.s^{-1}] au plan 40.



(a) Ref. (b) F99. (c) F90. (d) F65. (e) F20.

(f) F10. (g) S0. (h) T0. (i) S2. (j) T2.

Figure 5.46: Comparaison de la température totale RMS moyenne [K] au plan 40.



(a) F99. (b) F90. (c) F65. (d) F20. (e) F10.

(f) S0. (g) T0. (h) S2. (i) T2.

Figure 5.47: Comparaison des profils radiaux de température totale moyenne entre les cas isolés et la référence au plan 40.

Plan 41

Au plan 41, situé après les deux NGVs, les différences entre les différentes simulations et donc les diverses conditions limites sont moins marquées. Pour commencer, l'écoulement est fortement accéléré à la traversée de la turbine. Ainsi, l'impact de la condition limite est plus limité puisque contrairement au plan 40, les deux pales modifient aussi la topologie de l'écoulement. Pour la vitesse axiale moyenne (Fig. 5.48), tous les cas sont quasiment identiques. Les cas **F10** et **S2** ont cependant un profil de vitesse légèrement plus prononcé dans l'espace entre les deux sillages. Pour la température totale moyenne (Fig. 5.49), les cas avec une turbulence en entrée faible ont un sillage des NGVs très marqué (**F10**, **S0** et **S2**). Le cas **F20** présente aussi un mélange turbulent plus faible avec des valeurs de température totale plus élevées que la référence au centre du canal. Par ailleurs, ces comparaisons montrent qu'un niveau de turbulence important ne suffit pas à reproduire les résultats de la simulation de référence, puisque le cas **T2** présente des différences notables notamment en tête et en pied. Pour les fluctuations de vitesse RMS (Fig. 5.50), l'impact de la condition limite d'entrée est plus sensible. Les cas sans injection de turbulence (**S0** et **S2**) présentent clairement un déficit de u_{RMS} dans la zone entre les sillages. Quand la reconstruction de la base de données reste suffisamment complète, les résultats ont un accord excellent avec la référence. De même, les cas avec injection de turbulence synthétique se comportent de manière très correcte. Pour les contours de fluctuations RMS de température totale, les conclusions sont assez similaires. À l'exception des cas **T0** et **S2** qui, comme déjà mentionné, n'injectent pas de fluctuations de température en entrée, ce qui entraîne un niveau très bas de fluctuations qui est toujours visible au plan 41.

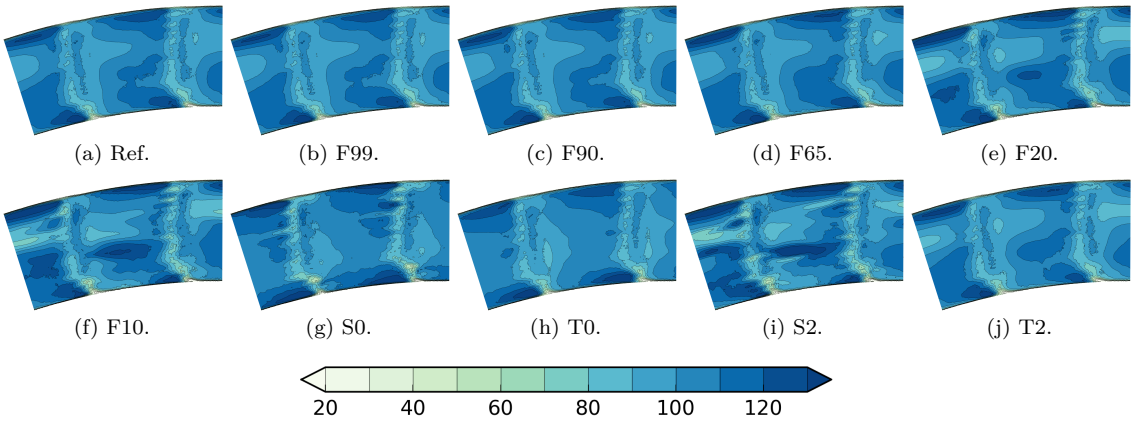


Figure 5.48: Comparaison de la vitesse axiale moyenne [m.s^{-1}] au plan 41.

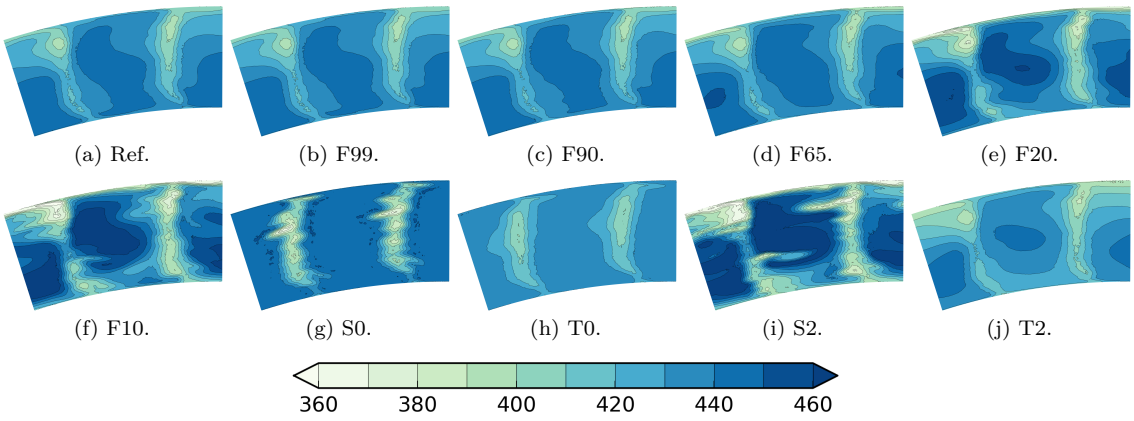


Figure 5.49: Comparaison de la température totale moyenne [K] au plan 41.

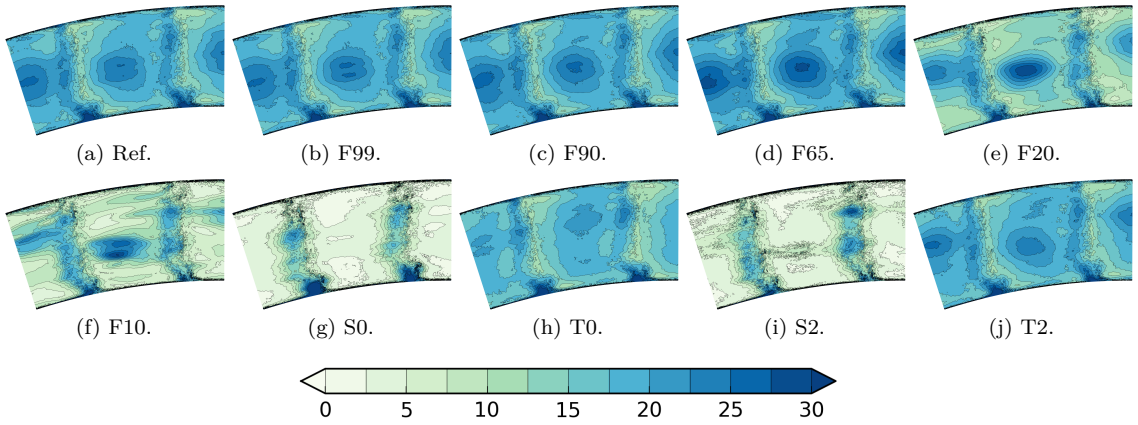


Figure 5.50: Comparaison de la vitesse axiale RMS moyenne [m.s^{-1}] au plan 41.

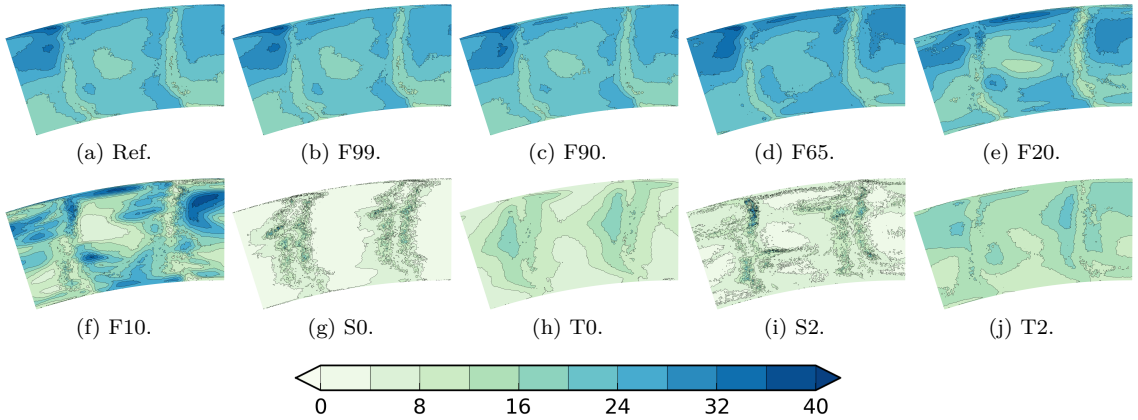
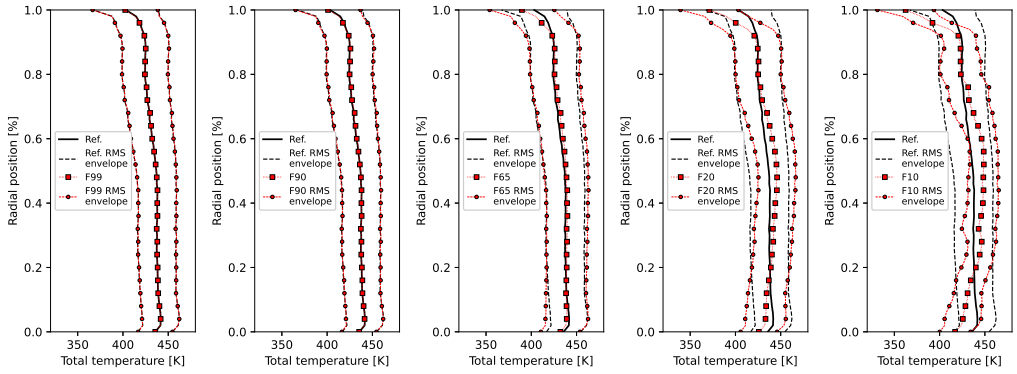
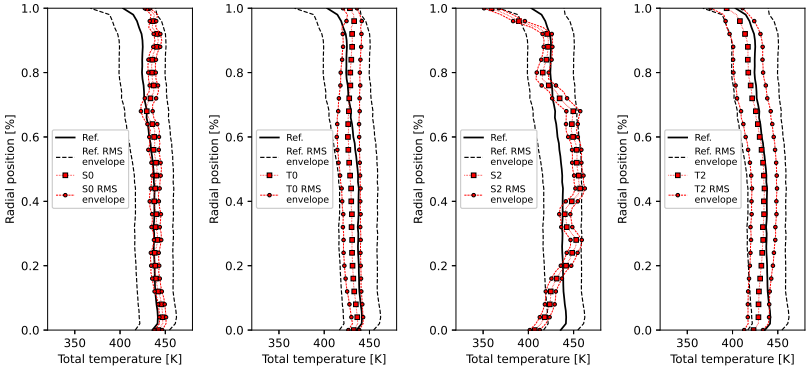


Figure 5.51: Comparaison de la température totale RMS moyenne [K] au plan 41.

La comparaison des profils radiaux de température totale avec enveloppe RMS de la Fig. 5.52 confirme les observations précédentes faites sur les contours 2D. Les cas **F99**, **F90** et **F65** sont quasiment superposés à la référence pour le profil moyen et l'enveloppe RMS. Un léger décalage est noté en tête et en pied pour le cas **F65**. Pour **F20** et **F10**, les résultats sont plus dégradés. Et, contrairement au plan 40, le profil moyen obtenu ne correspond plus à celui de la référence. Enfin, comme pressenti sur les contours 2D, les cas avec conditions limites standards ne permettent pas d'introduire des fluctuations de température comparables à la référence. Le profil moyen a un bon accord avec la référence au niveau de la partie centrale, mais en tête et en pied, une déviation est observée.



(a) F99. (b) F90. (c) F65. (d) F20. (e) F10.

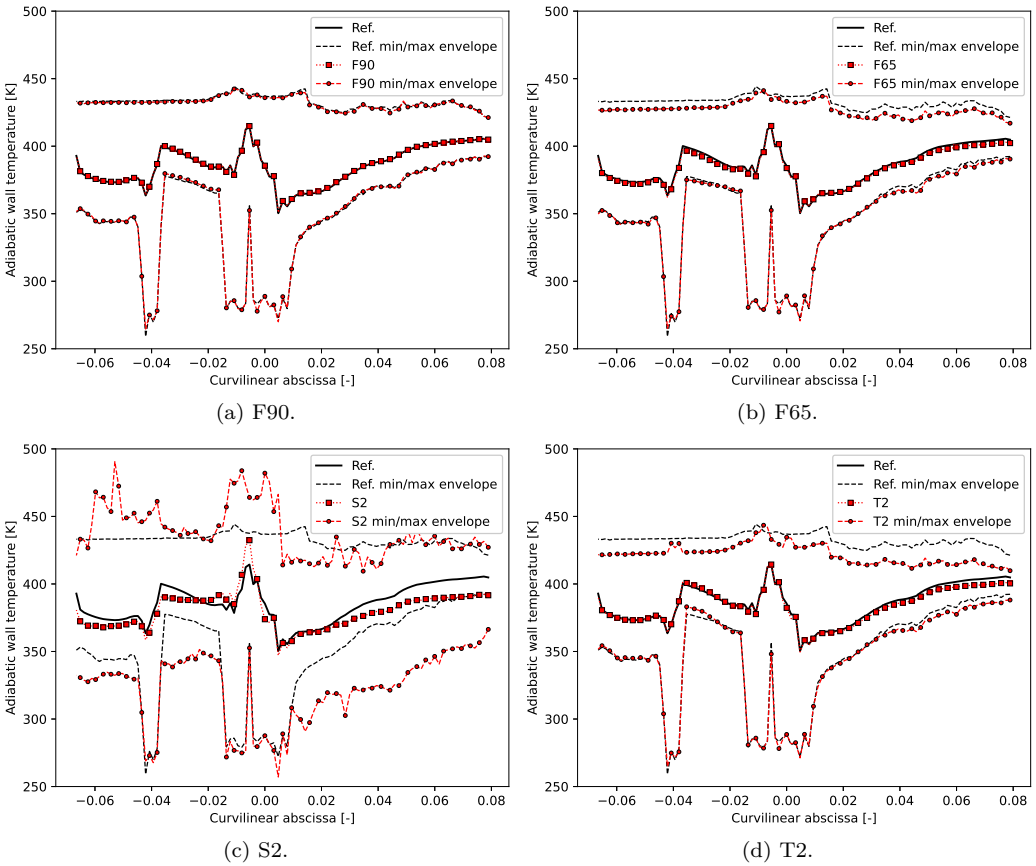


(f) S0. (g) T0. (h) S2. (i) T2.

Figure 5.52: Comparaison des profils radiaux de température totale moyenne entre les cas isolés et la référence au plan 41.

5.4.5 Températures adiabatiques en paroi

Dans le développement d'un étage de turbine, la thermique joue un rôle prépondérant. C'est pourquoi il est important de s'intéresser à la température adiabatique en paroi et à l'effet de la condition limite d'entrée sur cette quantité. Comme le point chaud impacte directement la pale #2, c'est elle qui est la plus exposée thermiquement aux températures élevées de la chambre. Ainsi, l'analyse qui va suivre est faite uniquement pour la pale #2. La Figure 5.53 présente l'évolution de la température adiabatique moyenne en paroi le long de l'abscisse curviligne de la pale (cela correspond à la fois à une moyenne en temps puisque la température adiabatique provient d'une solution moyenne et à une moyenne spatiale sur l'ensemble des rayons d'une abscisse curviligne donnée). L'enveloppe correspond aux valeurs minimale et maximale atteintes en chaque coordonnée de l'abscisse curviligne (comme pour la courbe précédente, ces valeurs sont aussi issues d'une solution moyennée en temps, les valeurs minimales et maximales ne correspondent donc pas aux valeurs extrêmes atteintes pendant l'ensemble de la simulation). Les cas **F90**, **F65**, **S2** et **T2** sont à chaque fois comparés à la référence. Pour le cas **F90**, l'accord avec la référence est excellent pour la valeur moyenne, le minimum et le maximum. L'évolution de la température adiabatique maximale, avec un maximum autour de 450 K au bord d'attaque, confirme l'interaction directe de la pale avec le point chaud malgré le refroidissement par film. Pour le cas **F65**, la comparaison avec la référence est aussi très satisfaisante. Seule la température maximale est légèrement sous-estimée d'environ 5 K sur toute la longueur de l'abscisse curviligne. Pour le cas **S2**, sans injection de turbulence, les résultats ne sont clairement pas satisfaisants. Le profil de température moyenne ne correspond pas à celui de la référence et la température maximale est largement surestimée. Enfin, le cas **T2** produit des résultats plutôt intéressants. Les profils moyen et minimal sont en très bon accord avec la référence. Cependant, le profil de température maximale donne des résultats moins bons. La température maximale est parfois sous-estimée de plus de 15 K le long de l'abscisse curviligne, ce qui peut s'avérer critique pour la durée de vie d'une turbine.



(a) F90.

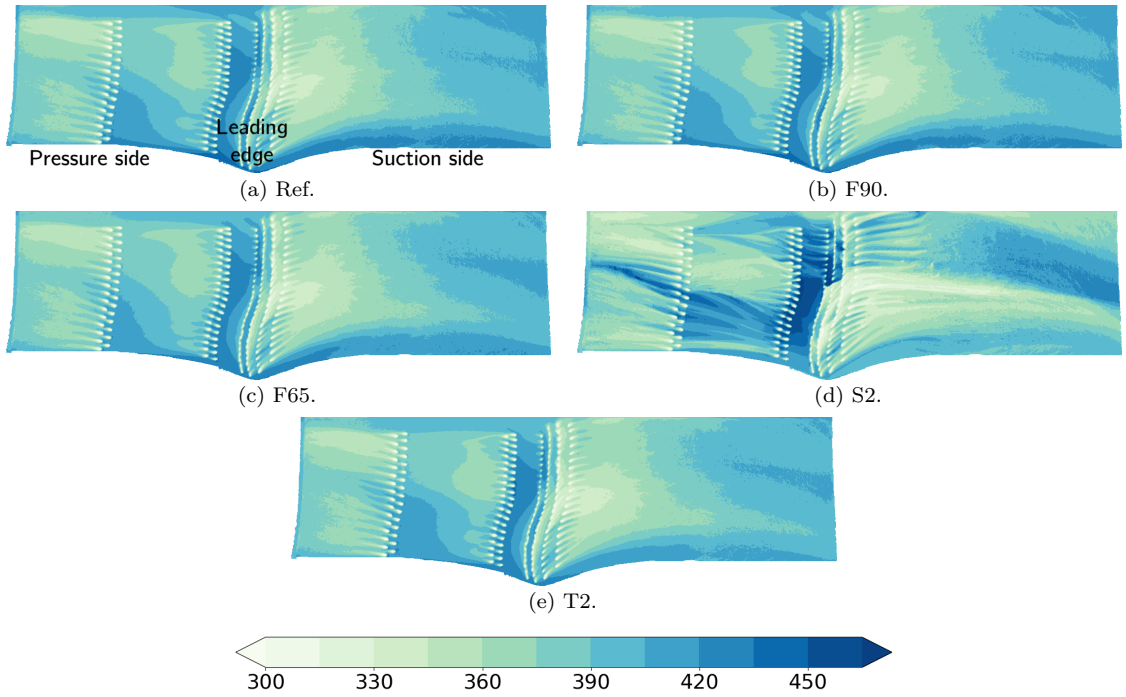
(b) F65.

(c) S2.

(d) T2.

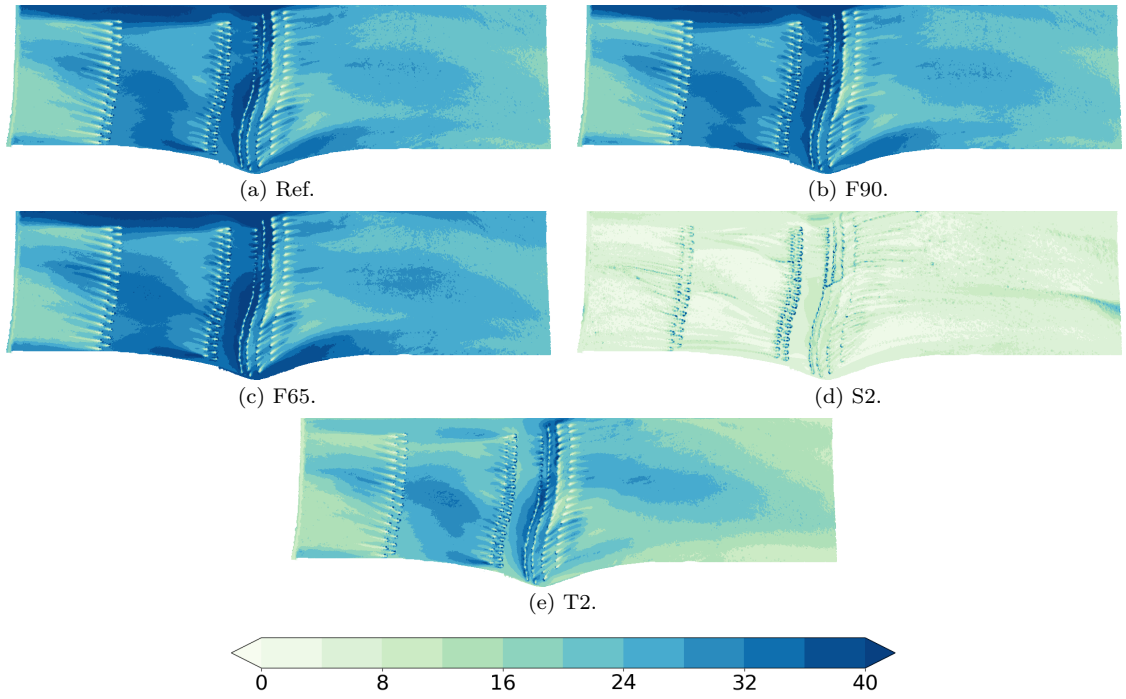
Figure 5.53: Évolution de la température adiabatique moyenne en paroi le long de l'abscisse curviligne de la pale #2 avec l'enveloppe des températures minimales et maximales. La position 0 correspond au bord d'attaque de la pale. Une abscisse curviligne négative à l'intrados et une abscisse positive à l'extrados.

Enfin, pour compléter l'analyse précédente faite sur des profils 1D, les contours de température adiabatique moyenne et RMS en paroi de la pale #2 pour les cas comparés sont présentés en Figs. 5.54 et 5.55. Pour la température adiabatique moyenne, comme pour les profils 1D, à l'exception du cas **S2**, les contours des autres cas sont très proches. Une région de températures élevées est visible au niveau du bord d'attaque de la pale, révélatrice de l'interaction du point chaud avec la pale. L'efficacité du refroidissement par film est aussi mise en évidence. Le niveau de température est beaucoup plus bas en aval des trous qu'en amont. Les contours montrent aussi une déviation de l'écoulement liée au *swirl*. Pour le cas **S2**, la température au bord d'attaque est largement surestimée à cause du manque d'agitation turbulente introduite par la condition limite. Ainsi, le point chaud généré par la chambre reste très cohérent depuis le plan d'entrée jusqu'au bord d'attaque. Ce manque d'agitation turbulente est également clairement visible sur le contour de fluctuations RMS de ce même cas. Mis à part autour des jets de refroidissement qui sont générateurs d'un mélange gaz frais/gaz chaud, les fluctuations RMS de température adiabatique sont quasiment nulles. Pour les cas SPOD, les niveaux de fluctuations sont très satisfaisants. Aucune différence notable n'est à signaler pour les cas **F90** et **F65** par rapport à la simulation intégrée de référence. Au niveau de l'intrados, en tête de pale, une région de fluctuations RMS très élevées est présente. Cette région révèle la présence d'un tourbillon en tête qui sera analysé plus en détails par la suite. Enfin, pour le cas **T2**, malgré l'injection de turbulence synthétique sur la vitesse, l'agitation turbulente ne permet pas de retrouver les niveaux de fluctuations RMS de la référence pour la température.



(a) Ref. (b) F90. (c) F65. (d) S2. (e) T2.

Figure 5.54: Température adiabatique moyenne en paroi de la pale #2 [K].



(a) Ref. (b) F90. (c) F65. (d) S2. (e) T2.

Figure 5.55: Fluctuations RMS de température adiabatique moyenne en paroi de la pale #2 [K].

5.4.6 Plans normaux à la surface de pale le long de la corde

Pour mieux comprendre les origines des différences en termes de thermique à la surface des pales, cette section s'intéresse à l'évolution de la dynamique de l'écoulement à la traversée de la région inter-aubes. Pour cela, un ensemble de 10 plans est défini, régulièrement espacés le long du canal et normaux à la surface de la pale #2. Les plans sont numérotés de 1 à 10 et sont représentés sur la Fig. 5.56. Les comparaisons qui vont suivre présenteront la composante de vorticité normale à chacun des plans pour les cas référence, **F65**, **S2** et **T2** issue d'une solution moyenne.

Clairement, en comparant les Figs. 5.57 et 5.58, les dynamiques des cas de référence et **F65** sont très proches. Cette observation n'est pas surprenante au vu des comparaisons précédentes pour lesquelles les deux cas donnaient déjà des résultats très similaires. En termes de propriétés de la vorticité pour ces deux cas, une augmentation progressive des valeurs de vorticité est observée en tête et en pied à cause du développement de la couche limite le long du canal dans ces deux régions. Cette création de vorticité en tête et en pied est en général décrite dans la littérature comme issue d'écoulements secondaires et sont générateurs de pertes [250, 77]. Les contours mettent aussi en évidence la présence d'un vortex en fer à cheval dans le coin inférieur droit, très caractéristique de ce type d'écoulement autour d'un aubage [150]. À noter qu'il est aussi connu que la couche limite en amont de la pale interagit avec le gradient de pression adverse du point d'arrêt de la pale. À partir de ce point, la couche limite se sépare en deux jambes et s'enroulent pour former deux vortex en fer à cheval, dont l'un sera transporté du côté intrados et l'autre du côté extrados [163, 176]. En plus de ce mécanisme simple, d'autres phénomènes plus complexes peuvent aussi apparaître, avec par exemple des interactions entre les vortex en fer à cheval et les vortex de passage [283]. Enfin, sur les plans 1 et 3, la vorticité induite par les films de refroidissement est aussi visible.

Dans le cas **S2** (Fig. 5.59), les marqueurs de l'écoulement décrits pour les deux cas précédents sont aussi présents, mais avec une intensité plus forte puisque les instationnarités de l'écoulement sont très faibles. Cependant, des structures supplémentaires apparaissent aussi nettement. En particulier, un gros tourbillon au centre du canal qui contourne la pale #2. Ce vortex, dont l'origine est expliquée et schématisée par Jacobi et al. [139], provient de l'interaction entre le point chaud en rotation et la pale. Dans le cas **S2**, à cause de l'absence de turbulence, le point chaud n'est quasiment pas dissipé avant d'impacter la pale #2. Ainsi, au centre du canal, le déficit de pression totale du point chaud en rotation génère un champ de vitesse non uniforme comme le montre par exemple la Fig. 5.43. À cause de cette vitesse plus faible au centre, l'écoulement dans cette région est plus facilement entrainé par le champ potentiel de la pale, créant un effet d'enroulement de l'écoulement à mi-hauteur du canal. Comme décrit dans [139], l'enroulement se fait dans le même sens que la giration résiduelle du coté de l'extrados et dans le sens opposé du côté de l'intrados (non visible sur les plans présentés ici). Pour les cas de référence et **F65**, le déficit de vitesse au plan 40 est aussi présent. Mais, le niveau élevé de turbulence en entrée déforme et dissipe la giration résiduelle avant d'impacter la pale, ce qui atténue fortement ce phénomène.

Enfin, pour le cas **T2** (Fig. 5.60), la dynamique de l'écoulement est proche de celle de la référence. Cela montre que la condition limite instationnaire avec injection de turbulence synthétique est capable de produire un écoulement en entrée assez proche de la référence avec un niveau de fluctuations de vitesse suffisant. Ainsi, les différences observées notamment sur les contours de température adiabatique en paroi sont principalement dues au manque de fluctuations de température en entrée et non pas à un champ de vitesse erroné. Cette dernière observation confirme que pour reproduire le couplage entre la chambre et la turbine, une condition d'entrée d'une simulation isolée doit être capable de reproduire à la fois la dynamique et la thermique de l'écoulement. Dans le cas de la convection d'un point chaud dans la turbine, cette thermique peut s'avérer cruciale pour déterminer les contraintes imposées aux parois des pales situées en aval.

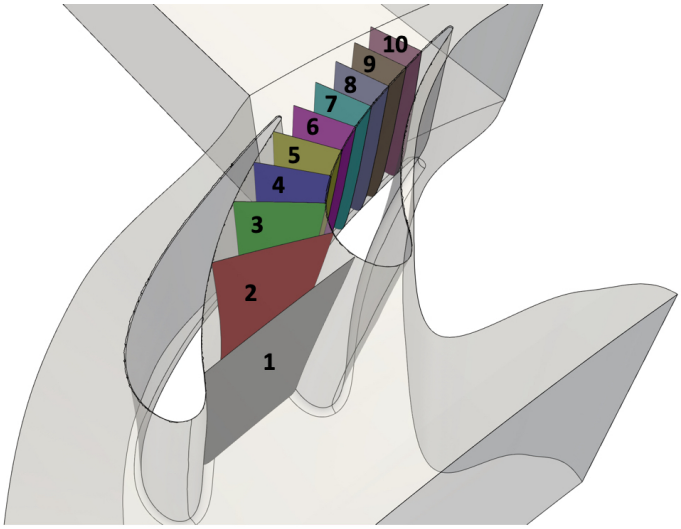
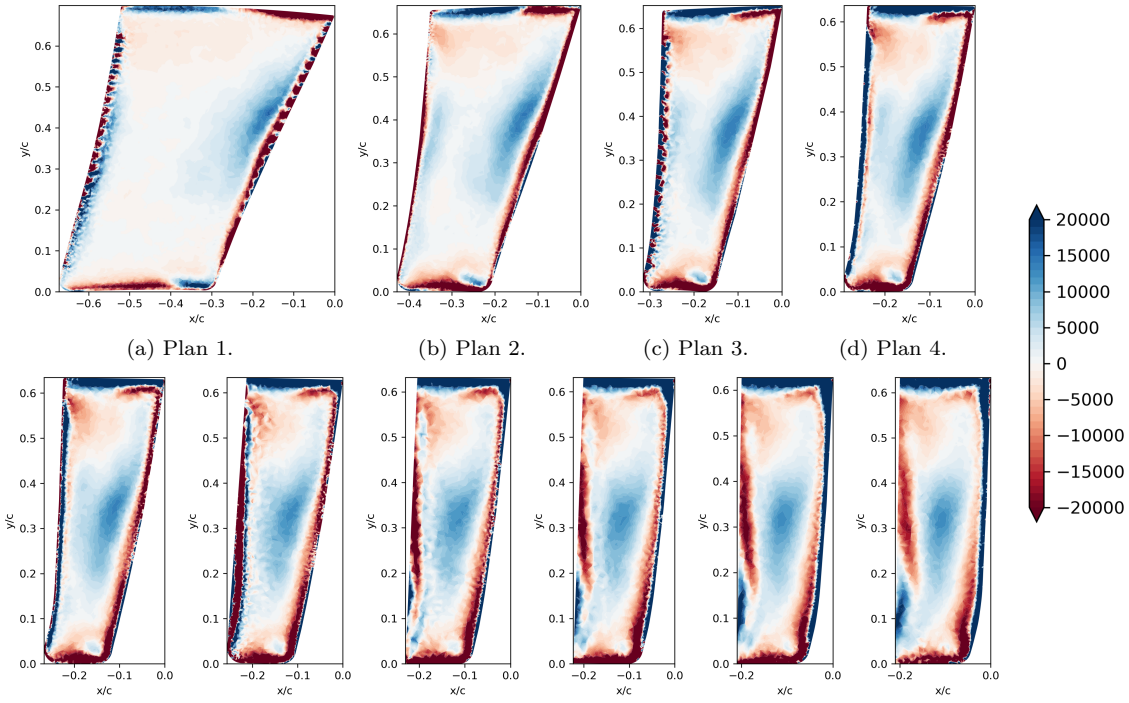


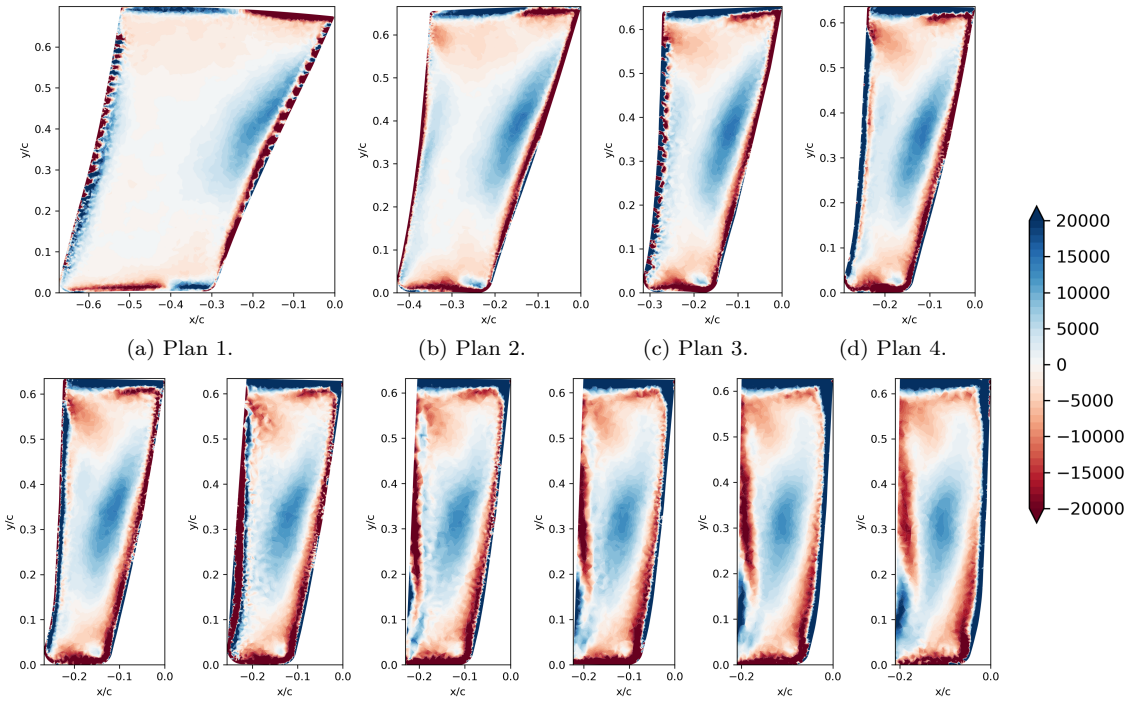
Figure 5.56: Localisation et numérotation des plans normaux à la surface de la pale #2.



(a) Plan 1. (b) Plan 2. (c) Plan 3. (d) Plan 4.

(e) Plan 5. (f) Plan 6. (g) Plan 7. (h) Plan 8. (i) Plan 9. (j) Plan 10.

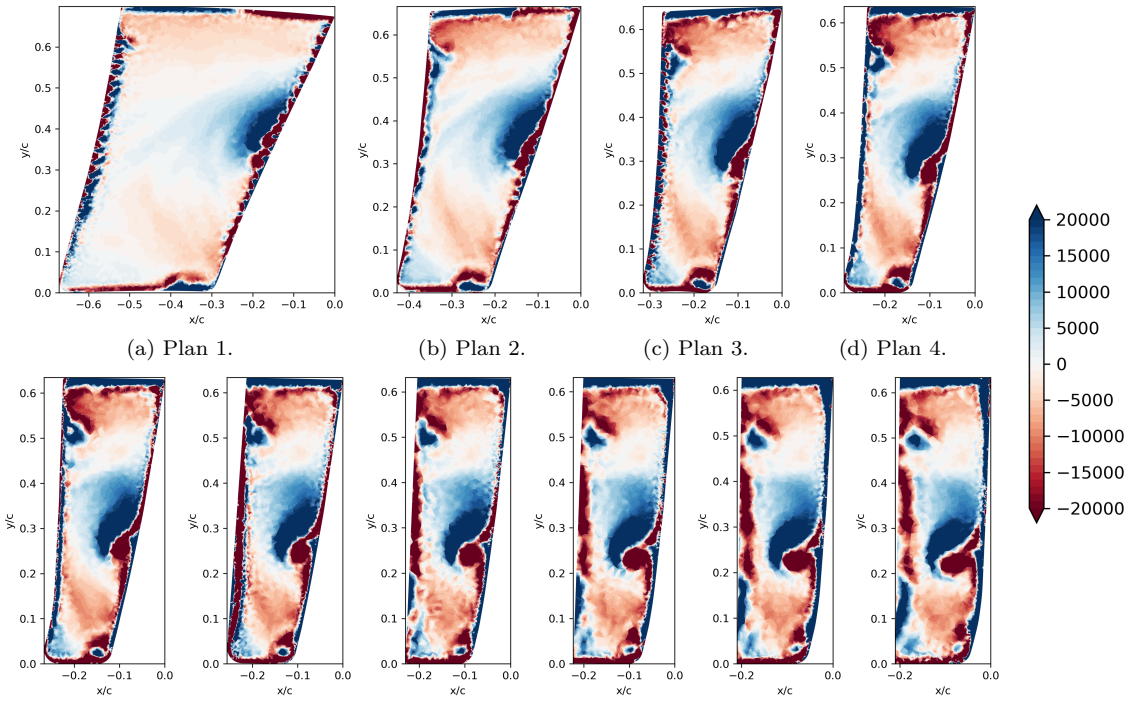
Figure 5.57: Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas de référence issue d'une solution moyenne.



(a) Plan 1. (b) Plan 2. (c) Plan 3. (d) Plan 4.

(e) Plan 5. (f) Plan 6. (g) Plan 7. (h) Plan 8. (i) Plan 9. (j) Plan 10.

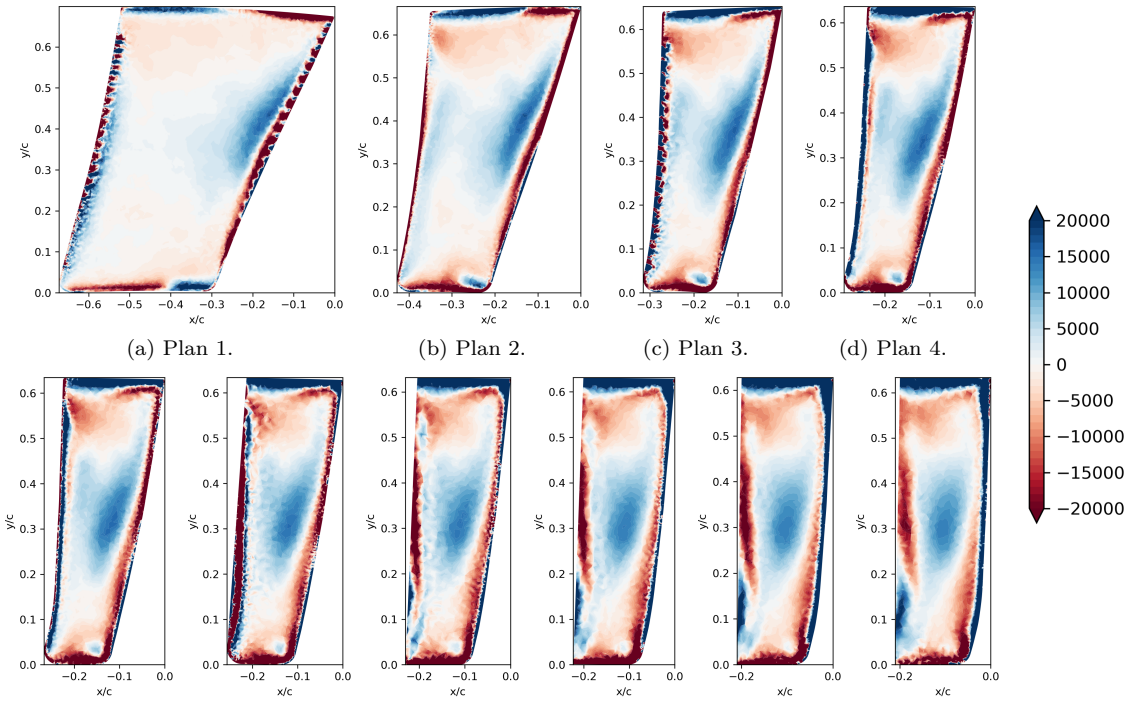
Figure 5.58: Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas F65 issue d'une solution moyenne.



(a) Plan 1. (b) Plan 2. (c) Plan 3. (d) Plan 4.

(e) Plan 5. (f) Plan 6. (g) Plan 7. (h) Plan 8. (i) Plan 9. (j) Plan 10.

Figure 5.59: Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas S2 issue d'une solution moyenne.



(a) Plan 1. (b) Plan 2. (c) Plan 3. (d) Plan 4.

(e) Plan 5. (f) Plan 6. (g) Plan 7. (h) Plan 8. (i) Plan 9. (j) Plan 10.

Figure 5.60: Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas T2 issue d'une solution moyenne.

5.4.7 Surcoût de la condition limite instationnaire

Comme mentionné précédemment, l'étude des reconstructions partielles permet de mieux comprendre la dynamique de l'écoulement à l'interface chambre/turbine en produisant un modèle réduit de la base de données. Pour ce point particulier, l'intérêt réside donc dans une meilleure analyse de la complexité des phénomènes se produisant dans un domaine qui génère un couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine. Cependant, ce n'est pas l'unique intérêt. Les comparaisons précédentes ont montré que la décomposition modale par SPOD était un puissant outil pour réduire la taille initiale de la base de données, tout en conservant les propriétés et les caractéristiques d'un écoulement rendant compte d'un couplage chambre/turbine. La décomposition modale a ainsi pu être utilisée pour générer des conditions limites réalistes dans le cas d'une configuration de turbine isolée. Cette technique a fait ses preuves en termes de prédictivité, cependant, pour qu'elle présente un réel intérêt, le coût induit par la méthode doit rester largement inférieur à celui d'une simulation complète comprenant la chambre et la turbine. Pour vérifier ce point, la Table 5.6 présente le coût CPU de la simulation intégrée de référence et celui des deux types de conditions limites utilisés pour la durée totale du temps physique simulé (0.1 s). Les valeurs sont adimensionnées par le coût CPU de la condition limite (CL) standard. La ligne avec les CL standards correspond au coût moyen des cas **S0**, **T0**, **S2** et **T2**, qui utilisent simplement des grandeurs 0D ou 2D, avec ou sans injection de turbulence. La ligne CL réalistes donne le coût moyen des cas **F99**, **F90**, **F65**, **F20** et **F10** qui utilisent l'approche SPOD pour générer la condition limite d'entrée instationnaire. La Table 5.6 montre aussi que l'utilisation des CL réalistes entraine une augmentation de 8.9 % du coût total de simulation. À noter que cette augmentation de coût n'est pas dépendante de la quantité d'énergie conservée par rapport à la base de données initiale lors de la reconstruction. Cette augmentation est liée au fait que la base de données reconstruite partiellement est lue et imposée à chaque nœud du plan d'entrée du domaine isolé. La lecture de cette base de données constitue donc une opération supplémentaire qui n'est pas présente dans le cas d'une condition limite standard, d'où le coût plus important. Néanmoins, malgré le coût plus important (qui peut être amélioré), la simulation avec condition limite réaliste reste largement moins coûteuse que la simulation intégrée, ce qui démontre le bénéfice de la condition limite instationnaire proposée.

	Coût CPU adimensionné par le cas CL standards pour la simulation de 0.1 s	Différence relative par rapport à la condition limite standard
Ref.	3.375	+ 237.5 %
CL standards : S0, T0, S2, T2	1.0	-
CL réalistes : F99, F90, F65, F20, F10	1.089	+ 8.9 %

Table 5.6: Comparaison du coût CPU de la simulation de référence par rapport aux simulations isolées avec conditions limites standards et SPOD.

5.5 Conclusion et perspectives de l'étude

L'objectif de l'étude présentée dans ce chapitre était de mettre en évidence l'intérêt d'une condition limite réaliste, instationnaire, turbulente et capable de répliquer le couplage multi-composants dans le cas d'une simulation de turbine isolée. Les résultats ont montré qu'une base de données constituée d'instantanés de l'écoulement enregistrés à l'interface entre la chambre de combustion et la turbine d'une simulation intégrée peut servir à construire une condition d'entrée réaliste tenant compte des fluctuations de vitesse et de température naturellement présentes dans une simulation couplée. La base de données enregistrée a d'abord été analysée par plusieurs méthodes de décomposition modale. La méthode SPOD a fait preuve de caractéristiques intéressantes pour analyser la dynamique globale de l'écoulement et pour mettre en évidence les structures prédominantes de l'écoulement. À la suite de cette décomposition modale réalisée dans le domaine fréquentiel, il a été possible de générer plusieurs reconstructions plus ou moins partielles de la base de données initiales. Ces reconstructions ont ensuite été utilisées au niveau du plan d'entrée du domaine turbine isolée pour construire des conditions limites réalistes et instationnaires. Cela a aussi eu pour effet de réduire la taille globale de la base de données tout en conservant les informations essentielles des effets de la chambre de combustion.

Par ailleurs, il a été démontré que si la reconstruction conserve une part suffisante de l'énergie totale des perturbations (au moins environ 65 %), la condition limite reconstruite donne des résultats très comparables à la simulation intégrée de référence. Et contrairement à l'utilisation d'une méthode d'injection de turbulence synthétique, la reconstruction est capable d'injecter des fluctuations à la fois pour les composantes de vitesse et pour la température. Ces fluctuations ont une importance capitale pour retrouver des températures et des niveaux de fluctuations de température à la surface des pales correctes. Or, pour le développement d'une turbine, ces paramètres sont largement utilisés lors des choix technologiques.

Dans cette étude, la SPOD a aussi démontré sa capacité à compresser la taille de la base de données initiale, tout en conservant les informations essentielles permettant de rendre compte du couplage entre la chambre et la turbine. Dans ce cadre, la SPOD présente un avantage majeur sur la POD puisque sur une étude similaire, la POD s'était révélée inefficace pour compresser de manière importante une base de données similaire [262]. Avec cette méthode, la corrélation entre la température et le champ de vitesse est aussi naturellement reproduite puisque la condition limite instationnaire est construite à partir d'une simulation intégrée. Cela représente un atout indéniable par rapport aux méthodes d'injection de turbulence synthétique qui sont en général assez défaillante sur ce point précis. L'étude a aussi montré que des conditions limites standards utilisant des grandeurs 0D ou des cartographies 2D, avec ou sans injection de turbulence synthétique, ne permettent pas de reproduire le couplage entre la chambre de combustion et la turbine. Dans certains cas, quand les paramètres de la condition limite sont définis de manière précise, il est

possible d'obtenir les niveaux de fluctuations de vitesse de la simulation de référence. Cependant, à cause de la méthode d'injection de turbulence utilisée, les fluctuations de température sont toujours trop basses pour ces conditions limites standards.

En termes de perspectives, une piste qui pourrait être étudiée serait l'utilisation de la même base de données et des mêmes reconstructions partielles pour réaliser des simulations isolées avec un alignement différent des pales par rapport à l'injecteur. Seule une configuration a été utilisée ici, pour laquelle l'injecteur est aligné avec le bord d'attaque de la pale #2. La modification de l'alignement permettrait de savoir si la base de données et les conditions limites réalistes sont capables de reproduire avec précision le couplage chambre/turbine malgré la modification de configuration. Cette poursuite d'étude s'inscrit dans une logique de bureau d'études lors du développement de géométries de turbine. En effet, pendant cette phase de développement, de nombreuses itérations sont faites sur la géométrie et les dimensions des pales ou des systèmes de refroidissement. La méthode proposée pourrait ainsi permettre de ne réaliser qu'une seule simulation intégrée pour générer une base de données et des reconstructions partielles tenant compte des propriétés dominantes de l'écoulement. Ensuite, à partir de ces conditions limites réalistes disponibles, les différentes géométries pourraient être analysées dans le cas d'un domaine de turbine isolée tout en tenant compte de l'effet de la chambre au plan d'entrée.

Une autre idée pourrait consister à adapter les conditions limites réalistes obtenues dans ce chapitre à d'autres points de fonctionnement sans refaire le calcul couplé. En effet, même si la température de la chambre ou le débit sont modifiés (avec des valeurs qui restent relativement proches du calcul couplé), il est attendu que la dynamique de l'écoulement conserve les mêmes caractéristiques principales. En faisant une mise à l'échelle des quantités d'intérêt, il serait ainsi envisageable d'adapter les conditions limites réalistes au nouveau point de fonctionnement choisi, évitant le calcul et la convergence d'une simulation intégrée complète. Cette étape nécessite toutefois une analyse complète et théorique pour garantir une mise à l'échelle. Une seconde étape de validation devrait ensuite être initiée.

Enfin, dans ce chapitre, l'effet de la condition limite d'entrée a été abondamment étudié. Néanmoins, il serait également pertinent de regarder ce que pourrait donner une méthode similaire dans le cas d'une condition limite de sortie. Plusieurs cas tests peuvent être envisagés, en considérant par exemple la configuration précédente pour comprendre les effets de la condition limite de sortie sur une simulation de chambre de combustion isolée. Un autre exemple intéressant serait la configuration fan du DGEN introduite au début de cette thèse. Les résultats présentés ont mis en évidence un effet important du compresseur situé en aval du fan sur l'acoustique dans le domaine. La méthode décrite dans ce chapitre pourrait permettre de reproduire l'effet du compresseur par le biais d'une condition limite de sortie plus réaliste.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Cette thèse s'est intéressée aux méthodes numériques et aux conditions limites rendant possibles la simulation aux grandes échelles du couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine. La thèse est divisée en cinq chapitres décrivant chacun une problématique liée à la mise en place d'une simulation multi-composants.

Le premier chapitre s'attache à décrire les outils de modélisation permettant une simulation précise de l'écoulement au sein d'une turbomachine, *i.e.* en cherchant à prendre en compte le plus de composants possibles dans un même calcul et leur géométrie réelle. Par ailleurs, la turbulence joue aussi un rôle important dans la physique globale et en particulier celle qui se développe en proche paroi. Des traitements et modèles spécifiques s'avèrent ainsi nécessaires tout particulièrement dans des calculs utilisant la simulation aux grandes échelles. Plusieurs méthodes de couplage permettant l'échange d'informations entre plusieurs domaines de calcul sont aussi nécessaires et décrites avec attention dans ce chapitre. À noter que l'utilisation de ces méthodes de couplage est un prérequis indispensable à la réalisation de calculs turbomachine multi-composants à cause de leur particularité importante : une turbomachine est composée d'éléments fixes et mobiles (en rotation) qui doivent pouvoir échanger numériquement entre eux pour reproduire le couplage qui existe dans la machine réelle. Pour finir, la fin du chapitre s'intéresse à une simulation assez inédite dans le domaine de la simulation instationnaire d'une turbomachine, puisqu'il s'agit d'une simulation d'un moteur complet réalisée dans le cadre du projet DGA ATOM grâce à une allocation PRACE et en lien avec ce travail de thèse. Grâce à cette simulation qui reproduit le couplage entre les différents composants du moteur, il est possible de mettre en évidence les bénéfices d'une simulation couplée par rapport aux simulations isolées. En particulier, la dernière section fournit des éléments de comparaison entre une simulation isolée de la soufflante seule et cette simulation complète sur la base desquelles plusieurs observations ont été faites. En effet, cette analyse montre des différences significatives, notamment sur le champ de pression dans le domaine de la soufflante, étant donné que des fluctuations générées dans le compresseur remontent l'écoulement jusqu'au domaine de la soufflante. Cette comparaison constitue une très bonne justification des chapitres qui suivent dans la thèse. Elle met en lumière l'importance des simulations couplées, qui ont néanmoins le gros inconvénient d'être encore très coûteuses. L'objectif de la suite du manuscrit est de présenter des méthodes numériques permettant de réduire ce coût ou de développer des conditions limites capables de reproduire le couplage d'une simulation multi-composants dans le cas d'un domaine isolé.

Le second chapitre s'intéresse à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour la simulation aux grandes échelles dans le code AVBP. Il introduit l'opération de filtrage requise pour séparer les échelles de la turbulence résolues et non résolues. Ces dernières n'étant pas résolues, elles doivent faire l'objet d'une modélisation pour assurer la dissipation de l'énergie dans le calcul et empêcher son accumulation. Les méthodes numériques du code AVBP y sont aussi décrites, en particulier le formalisme *cell-vertex*, qui est un élément important qui participe à la précision et aux performances intéressantes du code AVBP. Dans le cadre de ce formalisme, les différents schémas de convection disponibles dans le code sont introduits, en parallèle de la résolution des termes diffusifs, de la discrétisation temporelle et de la viscosité artificielle. Le dernier élément important détaillé dans le chapitre, qui a un rôle primordial pour la réalisation de simulations de configurations réelles de qualité, correspond aux conditions limites. Cet élément est particulièrement important pour la

simulation aux grandes échelles compressible puisque les conditions limites doivent être capables d'évacuer les ondes acoustiques du domaine sans perturber l'écoulement à l'intérieur. Dans le prolongement de la section sur les conditions limites, la méthode MISCOG est aussi décrite. Cette méthode correspond à un choix numérique dans AVBP pour réaliser des simulations turbomachines car elle permet de mettre en place le couplage entre plusieurs composants. Ce couplage se fait par interpolation d'ordre élevé des grandeurs conservatives au niveau d'une région de superposition entre les différents domaines.

Le troisième chapitre donne un premier élément de réponse à la problématique de réalisation des simulations couplées précises et aussi peu coûteuses que possible. Pour ce faire, ce chapitre s'applique à détailler les différents schémas numériques déjà présents dans AVBP, puisque ces derniers sont des acteurs majeurs de la performance et de la précision du code. Pour mieux comprendre l'impact d'un schéma numérique sur une simulation, diverses analyses numériques sont ensuite mises en place pour déterminer les propriétés des schémas (ordre de convergence, dissipation, dispersion, etc.), mais aussi leurs avantages et inconvénients associés. Une attention particulière est apportée au comportement des schémas sur maillages perturbés puisque dans une configuration réaliste, le maillage est très rarement régulier. Ces analyses ont mis en lumière certains défauts qui pénalisent ces schémas numériques dans le cas de simulations concrètes. En parallèle de ce chapitre, l'Annexe B.1 a cherché à identifier des pistes d'optimisation pour améliorer ces schémas et ainsi tenter de résoudre les problèmes des schémas existants. Ces premières pistes d'amélioration n'ont malheureusement pas donné pleine satisfaction et c'est pourquoi, la dernière section du chapitre introduit des schémas numériques nouveaux, assez différents des schémas existants. À ce titre, le formalisme de Petrov-Galerkin avec reconstruction quadratique semble être très prometteur puisqu'il se révèle être très peu sensible à la qualité du maillage. Étant donné le caractère nouveau du formalisme, des travaux complémentaires sont toutefois nécessaires pour évaluer et optimiser pleinement la méthode.

Le quatrième chapitre traite d'une méthode permettant de réduire le coût de calcul d'une simulation entre plusieurs composants d'une turbomachine. Le code AVBP étant un code de calcul explicite, le pas de temps d'une simulation est contraint par la condition CFL. Or, dans le cas d'une configuration réelle, à cause de cette condition, le pas de temps est souvent contraint par les plus petites mailles du domaine localisées uniquement dans des régions spécifiques du domaine. À cause de ces mailles, le pas de temps de l'ensemble des autres mailles est maintenu à cette valeur alors qu'il pourrait être plus élevé si la condition CFL était définie localement. Et, c'est exactement l'objet de la méthode introduite dans ce chapitre : une méthode de pas de temps local rendant possible la décomposition d'un domaine de calcul initial en plusieurs sous-domaines pour s'affranchir de la condition CFL globale. L'utilisation de cette méthode est rendue possible par la méthode MISCOG permettant le couplage entre plusieurs instances du code AVBP. Dans le chapitre, la méthode de pas de temps local est validée sur un ensemble de cas tests académiques pour s'assurer que son utilisation n'entraine pas une dégradation des performances des schémas numériques. Une fois la méthode validée, elle est finalement appliquée à des configurations plus concrètes : un canal turbulent, la cascade de turbine haute pression LS89 et la configuration chambre et étage haute pression FACTOR. Sur l'ensemble de ces cas d'applications, la méthode de pas de temps local a montré qu'elle était capable de reproduire les résultats d'une simulation classique tout en réduisant significativement le coût de calcul.

Le dernier chapitre aborde le sujet des conditions limites. La simulation moteur complet de la fin du premier chapitre, en la comparant à une simulation isolée, a mis en évidence l'incapacité des conditions limites classiques à reproduire précisément le couplage entre plusieurs composants. L'objectif de ce chapitre est de décrire une méthode permettant de générer des conditions d'entrée plus réalistes rendant compte de ce couplage même dans le cas d'une simulation isolée. Le point de départ consiste à introduire une méthode de décomposition modale dans le domaine spectral : la SPOD. Ensuite, grâce à la configuration FACTOR, composée ici de la chambre de combustion et de la première moitié de la turbine, une base de données instationnaire à l'interface entre les deux composants est constituée. La décomposition SPOD de la base de données permet d'identifier les structures de l'écoulement qui caractérisent le couplage entre les deux composants. En particulier, à

l'aide de la décomposition modale, des reconstructions partielles de la base de données sont générées pour créer des conditions limites réalistes et instationnaires. Pour évaluer ces nouvelles conditions limites, elles sont comparées à des conditions limites classiques pour un domaine contenant seulement la turbine isolée. La méthode a montré des résultats très satisfaisants puisqu'elle est capable de reproduire avec précision le couplage chambre/turbine dans le cas d'une simulation isolée.

En conclusion, le premier chapitre a montré qu'il était possible de faire des calculs complets en turbomachine avec de la LES, malgré un coût très élevé. La première piste étudiée pour augmenter la robustesse et réduire les coûts calculs a été de chercher à améliorer les schémas, notamment en faisant progresser l'ordre de convergence de ces derniers sur maillages perturbés. La deuxième piste s'est intéressée à une méthode de pas de temps local qui permet de réduire le coût de calcul des simulations couplées en atténuant la restriction sur le pas de temps liée à la contrainte de stabilité. La dernière piste a montré qu'il était possible d'améliorer la qualité des calculs isolés en utilisant des conditions limites plus réalistes construites à partir d'une simulation couplée par décomposition modale. Au final, la majorité des développements menés au cours de cette thèse sont aujourd'hui disponibles à l'industriel dans des phases de design ou de recherche.

Perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont pour objectif d'être aussi détaillés et complets que possible. Malgré tout, certains résultats ont permis de soulever des questions supplémentaires et certaines pistes restent à explorer. L'objet de cette section est de fournir différentes idées qui mériteraient d'être approfondies à la suite de cette thèse.

- *Nouveaux schémas numériques pour le traitement des termes convectifs dans AVBP.* Concernant le chapitre qui traite des schémas numériques convectifs, le formalisme Petrov-Galerkin a montré des résultats très intéressants. Utilisé avec une reconstruction quadratique et cubique, il s'est révélé être peu sensible à la qualité du maillage, tout en ayant un ordre de convergence répondant aux exigences de la LES. Plusieurs éléments doivent néanmoins être améliorés ou étudiés pour imaginer son utilisation dans un contexte académique ou industriel. À ce titre, la question du coût de la méthode est central et des optimisations sont encore nécessaires, en particulier au niveau de la parallélisation et de la méthode d'inversion de la matrice de masse. La question du traitement de la matrice Jacobienne des flux a aussi été soulevée. Dans les travaux présentés, elle est considérée comme constante pour les équations d'Euler. Il serait donc intéressant d'explorer d'autres possibilités, en exprimant par exemple les termes de la matrice Jacobienne à l'aide de polynômes, comme il a été fait pour les flux. Par ailleurs, l'adaptation de la reconstruction quadratique au code AVBP a déjà été traitée. Mais, pour le cas de la reconstruction cubique, certaines questions se posent encore pour son adaptation aux équations d'Euler à deux ou trois dimensions.

- *Généralisation de la méthode de pas de temps local.* Le chapitre qui s'intéresse à la méthode de pas de temps local dans AVBP a montré des résultats très encourageants pour réduire le coût de calcul de simulations couplées multi-composants. Néanmoins, la question de la mise en place des sous-domaines lors de l'utilisation de la méthode de pas de temps local se pose. Dans certaines configurations, la division en sous-domaines se fait naturellement. C'est le cas par exemple de simulations turbomachines avec un domaine fixe et un domaine mobile. Pour ce type de simulations, les deux domaines sont nécessairement isolés dans deux instances propres du code AVBP puisque leur vitesse de déplacement est différente. En imaginant que le domaine tournant présente des mailles très petites à cause par exemple de la discrétisation du jeu en tête de pale, l'utilisation d'un pas de temps plus faible pour cette instance apparaît assez naturellement puisque la division en sous-domaines est déjà faite. La division en sous-domaines peut toutefois être plus compliquée à mettre en place dans certains cas. Pour le cas de la turbine LS89 présenté dans le Chapitre 4, il a par exemple été nécessaire de découper la région proche paroi à l'aide d'un logiciel permettant de manipuler la géométrie puis de mailler séparément les deux sous-domaines. Dans un contexte d'exploration de la méthodologie, ces manipulations assez chronophages ne posent pas de problèmes particuliers. Malgré tout, pour

imaginer une généralisation de l'utilisation de la méthode, certaines simplifications pourraient être apportées pour faciliter sa mise en place. La possibilité d'utiliser des ratios de pas de temps non entiers est une première étape qui facilite la vie de l'utilisateur. Pour aller plus loin, il est aussi possible d'imaginer une implémentation permettant un découpage automatique en sous-domaines pour éviter à l'utilisateur une mise en place manuelle. À l'aide d'une solution grossièrement convergée, le code pourrait identifier les régions avec des pas de temps très pénalisant pour les isoler en découpant le maillage de manière adéquate. Cette automatisation présente toutefois plusieurs difficultés. La première est que la méthode de pas de temps local (la méthode MISCOG plus exactement) nécessite une région de superposition pour permettre l'échange d'informations entre les sous-domaines. Or, dans un code non structuré, avec également des problématiques de parallélisation, ces régions sont en pratique très difficiles à construire automatiquement.

➤ *Utilisation des conditions limites réalistes sur d'autres géométries ou d'autres points de fonctionnement.* Le chapitre traitant de l'utilisation de conditions limites réalistes, générées à partir d'une base de données provenant d'une simulation couplée, a montré des résultats très encourageants dans le cas d'une simulation isolée. Néanmoins, ce type de conditions limites nécessite la mise en place et la convergence de la simulation couplée pour obtenir la base de données à l'interface entre les deux composants. Ceci demande donc des ressources supplémentaires par rapport à une condition limite classique pour laquelle cette étape n'est pas nécessaire. L'intérêt des conditions limites réalistes est donc de pouvoir réaliser plusieurs simulations avec la même base de données pour "amortir" le coût supplémentaire de la simulation couplée. Il est tout à fait envisageable d'imaginer cette démarche dans un bureau d'études. En effet, lors des phases de design, un grand nombre de géométries et de points de fonctionnement sont considérés. Or, il est attendu qu'une petite modification de géométrie ne perturbe pas significativement l'écoulement en amont de la turbine. La condition limite réaliste générée à partir d'une base de données initiale pourrait donc être utilisée pour tester différentes géométries tout en reproduisant de manière plus précise le couplage avec la chambre de combustion. L'idée est la même pour le point de fonctionnement : une légère modification du débit ou de la température d'entrée par exemple ne devrait pas beaucoup changer la topologie de l'écoulement. Ainsi, avec un adimensionnement adéquat, il serait possible d'utiliser la même base de données sans nécessiter une nouvelle simulation couplée au nouveau point de fonctionnement. Ces pistes de recherche n'ont pas encore été vérifiées, mais la géométrie FACTOR constitue une configuration très intéressante pour effectuer ce type de validation. D'autres part, dans le chapitre traitant des conditions limites d'entrée, seul l'impact de la chambre de combustion sur la turbine a été étudié, mais il pourrait aussi être envisageable d'étudier le problème inverse, en analysant les effets de la condition limite de sortie sur la chambre de combustion isolée. Comme expliqué au début de cette thèse dans le cas du DGEN, la condition limite de sortie joue également un rôle important, notamment en termes d'acoustique pour cet exemple particulier.

Liste des Figures

1 Dessins de Léonard de Vinci sur les tourbillons formés par l'écoulement de l'eau [68]. 13
2 Exemples de disciplines nécessitant la compréhension de la dynamique d'un fluide. 14
3 Évolution des équations résolues au fil des années [141]. 15
4 Diagramme température-entropie du cycle théorique de Brayton [1]. 16
5 Schéma en coupe d'un turboréacteur équipant un avion illustrant son principe de fonctionnement [272]. 16
6 Évolution de la quantité de CO_2 émise par le secteur aéronautique [112]. 17

1.1 Cascade énergétique [119]. 22
1.2 Illustration de la séparation des structures de l'écoulement entre celles simulées explicitement et les autres plus petites que la taille de maille qui doivent être modélisées [221]. 23
1.3 Illustration de la méthode de modification géométrique. À gauche la configuration initiale et à droite, la configuration modifiée [25]. 26
1.4 Illustration de la méthode de transformation de profil [25]. 27
1.5 Vue générale du domaine de calcul complet. La direction de l'écoulement est indiquée par les flèches bleues. Les positions des plans et des sondes utilisés dans les comparaisons à suivre sont aussi indiquées. 29
1.6 Diagramme de la décomposition en sous-domaines de la configuration moteur complet. 30
1.7 Contour de pression statique moyenne adimensionnée par la pression d'entrée à mi-hauteur de veine pour les deux simulations. 33
1.8 Contour de fluctuation RMS de pression statique à mi-hauteur de veine pour les deux simulations. 34
1.9 Coupe méridienne de fluctuation RMS de pression statique pour les deux simulations. 34
1.10 Densités spectrales de puissance du signal de pression statique des sondes dans le domaine statique OGV. 36
1.11 Densités spectrales de puissance du signal de pression statique de la sonde E : entrée fan (la sonde est en rotation avec le maillage). 37

2.1 Comparaison des méthodes de discrétisation [161]. 45
2.2 Représentation des notations introduites. 46
2.3 Illustration des différents types d'éléments pouvant être utilisés dans AVBP. De gauche à droite : triangle, quadrilatère, tétraèdre, hexaèdre, pyramide, prisme [161]. 47
2.4 Calcul de la normale d'une face quadrangulaire [161]. 47
2.5 Calcul de la normale à un vertex appartenant à un triangle et un quadrilatère quelconque. 48
2.6 Volume de contrôle associé au nœud j. 49
2.7 Fonctions de forme linéaires pour des éléments $\mathbb{P}_1$ [161]. À gauche la fonction "chapeau" en 1D et à droite une fonction "tente" sur un maillage triangulaire. . . . 52
2.8 Illustration des différents types d'éléments en 1D, 2D et 3D. Les éléments de type $\mathbb{P}_1$ sont associés à des fonctions linéaires, et par extension les éléments de type $\mathbb{P}_2$ sont associés à des fonctions quadratiques. Les éléments de type $\mathbb{Q}_1$ sont associés à des fonctions bilinéaires. 52
2.9 Illustration de l'interpolation des grandeurs conservatives sur un nœud récepteur à partir de nœuds émetteurs. 63

2.10 Exemple de couplage entre un stator et un rotor avec la méthode MISCOG [202]. . 65

3.1 Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 76
3.2 Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 77
3.3 Représentation d'un maillage composé de triangles isocèles réguliers de côté Δx. . 78
3.4 Définition de l'angle α_c et construction des courbes représentant $|G(k,\alpha_c)|$ et $c_R^*(k,\alpha_c)/c$ à un nombre d'onde fixé en fonction d'α_c. . . . 79
3.5 Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma LW pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire. . . . 80
3.6 Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma TTGC(0.01) pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire. . . . 81
3.7 Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) du schéma TTG4A pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL sur maillage triangulaire. . . . 82
3.8 Illustration du choix du paramètre b_Δ pour définir la perturbation du maillage. . . 83
3.9 Représentation de la configuration de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle. . . . 83
3.10 Visualisation des maillages pour différents b_Δ pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = L_x/16$). . . . 84
3.11 Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation $\Delta x = L_x/32$ après 1 tour à $\nu = 0.7$. . . . 85
3.12 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 86
3.13 Représentation de la configuration de la convection d'un vortex isentropique. . . . 87
3.14 Profils de pression en $y = 0.15$ après un tour pour $\Delta x = L_x/64$ pour deux niveaux de perturbations du maillage pour le cas du vortex isentropique. . . . 88
3.15 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01) et TTG4A pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 89
3.16 Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 94
3.17 Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 95
3.18 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTGC(0.01), TTG4A, TTG1-3S et TTG2-3S pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 96
3.19 Discrétisation d'un domaine monodimensionnel par un maillage irrégulier. . . . 97
3.20 Illustration de la configuration monodimensionnelle avec les fonctions de forme associées aux nœuds $i-1$, i et $i+1$. . . . 100
3.21 Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 105
3.22 Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 106
3.23 Illustration d'un triangle quelconque avec ses trois vertex et les trois points aux demi-arrêtes. . . . 108
3.24 Reconstruction quadratique de la solution au sein d'un triangle quelconque. . . . 108

3.25 Mise en évidence des plus proches voisins dans le cas d'un maillage triangulaire. . . 109
3.26 Points de quadrature linéaire ($N_g = 1$), quadratique ($N_g = 3$) et cubique ($N_g = 4$). 111
3.27 Transformation linéaire entre K_e et $\tilde{K}_e$. 112
3.28 Représentation 2D des coefficients du terme de la matrice de masse sur un maillage triangulaire régulier. 115
3.29 Dissipation numérique et dispersion numérique du schéma TTG4A-R2 pour différentes longueurs d'onde en fonction de α_c et pour deux valeurs de CFL. 116
3.30 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. 117
3.31 Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation de $\Delta x = L_x/32$ après 1 tour à $\nu = 0.7$. 117
3.32 Coupe selon l'axe x de la convection d'une Gaussienne entropique sur un maillage triangulaire avec une discrétisation de $\Delta x = L_x/20$ après 1 tour à $\nu = 0.7$. 118
3.33 Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi sur le schéma TTG4A-R2 pour différents niveaux de perturbations et à $\nu = 0.7$ dans le cas de l'onde entropique. 118
3.34 Évolution de l'erreur quadratique pour le cas de l'onde entropique en fonction du coût adimensionné de chaque schéma pour deux niveaux de perturbations à $\nu = 0.7$ (avec 20 itérations de la méthode de Jacobi pour les schémas éléments finis). 119
3.35 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et TTG4A-R2 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. 120
3.36 Profils de pression en $y = 0.15$ après un tour pour $\Delta x = L_x/64$ pour deux niveaux de perturbations du maillage pour le cas du vortex isentropique. 120
3.37 Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi sur le schéma TTG4A-R2 pour différents niveaux de perturbations et à $\nu = 0.7$ dans le cas du vortex isentropique. 121
3.38 Évolution de l'erreur quadratique pour le cas du vortex isentropique en fonction du coût adimensionné de chaque schéma pour deux niveaux de perturbations à $\nu = 0.7$ (avec 10 itérations de la méthode de Jacobi pour les schémas éléments finis). 122
3.39 Profil moyen de vitesse. 123
3.40 Profil de vitesse initial avec la superposition de la perturbation. 124
3.41 Taux de croissance σ de l'instabilité hydrodynamique de la couche de cisaillement en fonction de la longueur d'onde réduite kd. 125
3.42 Évolution temporelle du champ de vorticité pour TTGC à $b_\Delta = 0$. 125
3.43 Évolution temporelle de $0.5 \log(Ec(v))$. 126
3.44 Illustration d'un tétraèdre quelconque avec ses quatre vertex et les six points aux demi-arrêtes. 128
3.45 Illustration de la contrainte du nombre de voisins sur un maillage non structuré. Les ronds rouges correspondent aux nœuds ayant un nombre de voisins strictement inférieur à 5. 131
3.46 Histogramme présentant la répartition en termes de nombre de voisins des noeuds du maillage de la Fig. 3.45. Cette répartition est exprimée en termes de nombre relatif de noeuds, *i.e.* le nombre de noeuds ayant un nombre de voisins donné, divisé par le nombre total de nœuds du maillage. 131
3.47 Illustration des contraintes imposées à un triangle quelconque composé de trois vertex (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) pour une reconstruction cubique C^0. 139
3.48 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. 140
3.49 Reconstructions polynomiales cubiques C^0 et leurs deux dérivées premières dans le cas de trois triangles quelconques avec des valeurs nodales arbitraires. 141
3.50 Reconstructions polynomiales cubiques C^1 de Hsieh-Clough-Tocher et leurs deux dérivées premières dans le cas de trois triangles quelconques avec des valeurs nodales arbitraires (les mêmes que la Fig. 3.49). 142

4.1 Illustration de la relation entre les pas de temps des deux instances. 154

4.2 Exemple de répartition de cellules pour appliquer une méthode de pas de temps local. 155
4.3 Iso-lignes de S_p dans le plan $N_{dt} - N_n$ en noir pour $\eta = 0.01$ et en rouge pointillé pour $\eta = 0.2$. 156
4.4 Illustration du problème pour un domaine unique. 157
4.5 Valeurs absolues des contributions des voisins dans la matrice globale pour différentes valeurs de ν. 163
4.6 Valeurs absolues des contributions des voisins dans la matrice globale pour différentes valeurs de ν avec une échelle logarithmique. 163
4.7 Ordres spatiaux de **LW**, **TTG4A**, **TTGC** et **TTGC-J** pour différents ν avec un domaine unique. 165
4.8 Illustration du problème avec deux domaines et $N_{\text{overlap}} = 2$. 166
4.9 Zoom sur le processus d'échange dans la région de superposition de la Fig. 4.8. . . 166
4.10 Ordres spatiaux de **LW** et **LW-2** pour différents ν. 168
4.11 Évolution de l'erreur relative de **LW-2** en fonction de Δx pour différents N_{overlap} par rapport à **LW** à $\nu = 0.9$. 169
4.12 Ordres spatiaux de **TTGC** et **TTGC-2** pour différents ν. 170
4.13 Différence relative entre les termes diagonaux de la matrice $\boldsymbol{K}_{\mathbf{total}}$ avec inversion exacte de la matrice de masse et son approximation par la méthode de Jacobi. . . 171
4.14 Ordres spatiaux de **TTGC** et **TTGC-2J** pour différents ν. 172
4.15 Évolution de l'erreur relative de **TTGC-2J** en fonction de Δx pour différents N_{overlap} par rapport à LW à $\nu = 0.9$. 173
4.16 Ordres spatiaux de **TTG4A** et **TTG4A-2** pour différents ν. 174
4.17 Visualisation de la fonction Gaussienne utilisée pour initialiser la perturbation. . . 175
4.18 Propagation d'une onde acoustique monodimensionnelle dans un maillage uniforme simulée avec deux approches : l'approche standard avec une instance unique et l'approche couplée avec MISCOG. 176
4.19 Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{overlap} à CFL = 0.8. 177
4.20 Évolution de l'erreur en fonction de N_{overlap} pour TTG4A à CFL = 0.8. 178
4.21 Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW avec $N_{\text{overlap}} = 1$, TTGC et TTG4A avec $N_{\text{overlap}} = 4$ à CFL = 0.2. 178
4.22 Propagation d'une onde acoustique 1D simulée à l'aide de deux approches : l'approche standard avec une instance unique et l'approche couplée avec MISCOG. 180
4.23 Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{dt} à CFL = 0.8. 181
4.24 Convection d'une onde acoustique en 1D : erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différentes valeurs de N_{dt} à CFL = 0.2. 182
4.25 Illustration du problème lié à la condition limite dans une simulation avec pas de temps local. 184
4.26 Représentation du domaine de calcul pour le cas de la convection d'un vortex isentropique. 186
4.27 Zoom sur la région d'interface des cas couplés. Les cercles bleus correspondent aux nœuds récepteurs de l'instance 1 et les cercles rouges aux nœuds récepteurs de l'instance 2. La région rouge met en évidence la zone ajoutée pour éviter qu'aucun nœud ne soit à la fois donneur et récepteur. 187
4.28 Erreur quadratique sur la pression au temps $t = T$ pour LW, TTGC et TTG4A et pour différents N_{dt}. 188
4.29 Différence relative entre le débit massique moyen en sortie du cas MISCOG par rapport au cas *Reference large dt* pour $N_{dt} = 1$, $N_{dt} = 2$, $N_{dt} = 4$ et $N_{dt} = 8$. . . . 189
4.30 Comparaison entre le *speedup* théorique et le *speedup* effectif pour différentes valeurs de N_{dt} au raffinement $\Delta x = L_x/270$. 190
4.31 Illustration de la relation entre les pas de temps de deux instances. 192

4.32 Évolution de S_p en fonction de N_{dt} pour les deux options décrites et pour deux valeurs de N_n. 193
4.33 Domaine classique pour une simulation de canal turbulent [13]. 194
4.34 Domaine unique du cas de référence. 196
4.35 Deux sous-domaines avec une région de superposition pour le cas LTS. 196
4.36 Pas de temps local instantané dans le plan xy pour le cas de référence. 197
4.37 Profil de vitesse moyenne (grandeurs adimensionnées). 198
4.38 Profil de fluctuations de vitesse RMS (grandeurs adimensionnées). 198
4.39 Contrainte de cisaillement de Reynolds (grandeurs adimensionnées). 198
4.40 Distribution des contraintes de cisaillement (grandeurs classiques). 199
4.41 Visualisation du profil de la pale LS89. 200
4.42 Domaine de calcul pour la configuration LS89. 201
4.43 Domaine de la simulation de référence. 202
4.44 Domaine de la simulation LTS. 202
4.45 Aperçu du maillage avec les tailles de mailles ciblées pour le cas MUR129. 203
4.46 Pas de temps local instantané dans la région de sillage de la pale pour le cas MUR129. 204
4.47 Évolution de y^+ le long de l'abscisse curviligne (MUR129). 204
4.48 Coefficient de transfert de chaleur moyen pour le cas MUR129. Comparaison entre l'expérience et les simulations de référence et LTS. 206
4.49 Mach isentropique et contrainte de cisaillement moyens pour le cas MUR129. . . . 206
4.50 Contour instantané de $|\nabla P|/P$ pour le cas MUR129. 207
4.51 Flux de chaleur instantané à la surface de la pale pour le cas MUR129. 208
4.52 Comparaison de la densité spectrale de puissance du signal de pression de différentes sondes pour le cas MUR129. 209
4.53 Pas de temps local instantané dans la région de sillage de la pale pour le cas MUR235. 210
4.54 Aperçu du maillage avec les tailles de mailles ciblées pour le cas MUR235. 210
4.55 Évolution de y^+ le long de l'abscisse curviligne (MUR235). 211
4.56 Coefficient de transfert de chaleur moyen pour le cas MUR235. Comparaison entre l'expérience et les simulations de référence et LTS. 212
4.57 Mach isentropique et contrainte de cisaillement moyens pour le cas MUR235. . . . 212
4.58 Contour instantané de $|\nabla P|/P$ avec un iso-contour à $Ma = 1$ en vert pour le cas MUR235. 213
4.59 Contour instantané de $|\nabla \rho|/\rho$ seuillé par la valeur du plan d'entrée pour le cas MUR235. 214
4.60 Flux de chaleur instantané à la surface de la pale pour le cas MUR235. 215
4.61 Comparaison de la densité spectrale de puissance du signal de pression de différentes sondes pour le cas MUR235. 216
4.62 Domaine de simulation de la configuration FACTOR. 218
4.63 Contour des pas de temps locaux dans une simulation de référence. Les mailles mises en évidence en rouge correspondent à des mailles avec un pas de temps local inférieur à 3.0×10^{-8} s. 218
4.64 Découpage en sous-domaines de la configuration FACTOR avec les pas de temps moyens associés pour le cas LTS. 219
4.65 Évolution de la pression totale et de la température totale à différents plans de la configuration. La courbe bleue donne l'évolution de la différence relative entre la simulation de référence et le cas LTS pour les deux grandeurs. 220
4.66 Coupe méridienne dans le chambre pour la pression totale moyenne. 221
4.67 Coupe méridienne dans le chambre pour la température totale moyenne. 221
4.68 Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 40. 222
4.69 Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 41. 222
4.70 Pression totale et température totale adimensionnées par les moyennes respectives des trois cas au plan 42. 223
4.71 Profils radiaux de température totale avec enveloppe RMS aux plans 40, 41 et 42. 223
4.72 Contour d'énergie cinétique turbulent aux plans 40, 41 et 42. 224

4.73 Densité spectrale de puissance des sondes de pression du domaine FACTOR. . . . 225
4.74 Iso-lignes de S_p dans le plan $N_{dt} - N_n$ en noir pour $\eta = 0.01$ et en rouge pontillé pour $\eta = 0.2$. Cette figure est identique à la Fig. 4.3 avec l'ajout des symboles correspondant aux applications présentées dans ce chapitre. Le cercle noir pour le canal turbulent, l'étoile rouge and le carré bleu pour la cascade LS89 pour les points de fonctionnement MUR129 et MUR235 respectivement et le triangle vert pour la configuration FACTOR. 226
4.75 Facteur d'accélération des simulations de référence et LTS en fonction du nombre de cœurs pour la configuration MUR129. 228

5.1 Schéma simplifié de l'utilisation de la méthode de Welch pour obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance. 236
5.2 Simulation FACTOR intégrée chambre de combustion/turbine. 242
5.3 Visualisation de la répartition des débits d'entrée et des multi-perforations. 243
5.4 Lignes de courant colorées par la température totale et initialisées à partir de la sortie de l'injecteur obtenues à partir d'un champ moyen. 244
5.5 Vue instantanée de l'activité turbulente dans la simulation intégrée : le PVC est visible en noir (iso-surface de pression statique) et les structures turbulentes sont mises en évidence par une iso-surface de critère Q [144] colorée par la température statique. 244
5.6 Vitesse axiale moyenne et fluctuations RMS [m.s^{-1}] à mi-hauteur de veine dans le domaine des deux NGV. 245
5.7 Température totale moyenne et fluctuations RMS [K] à mi-hauteur de veine dans le domaine des deux NGV. 245
5.8 Valeurs propres SPOD en fonction de la fréquence, normalisées par l'énergie totale sur l'ensemble des fréquences pour la base de données chambre complète. 246
5.9 Iso-contour du mode 1 pour la vitesse axiale à 500 Hz et 1500 Hz dans la chambre. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative. 247
5.10 Iso-contour du mode 1 pour la vitesse axiale et pour trois fréquences à la sortie de l'injecteur. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative. 247
5.11 Iso-contour du mode 1 pour la température à 500 Hz, 1000 Hz et 1500 Hz dans la chambre. La couleur rouge correspond à la valeur positive de l'iso-contour et la couleur bleue à la valeur négative. 248
5.12 Pression et température totales moyennes adimensionnées au plan 40. 249
5.13 Pression et température totales moyennes adimensionnées au plan 41. 249
5.14 Visualisation de la température statique [K] à différents instants de la base de données à partir d'un temps t_0 arbitraire. 250
5.15 Visualisation de la vitesse axiale [m/s] à différents instants de la base de données à partir d'un temps t_0 arbitraire. 250
5.16 Moyenne spatiale des valeurs RMS de la vitesse axiale et de la température statique pour l'ensemble des nœuds de l'interface en fonction du temps de moyenne. Les lignes pointillées correspondent aux valeurs finales pour un temps de moyenne égal à $t_{\text{sim}} = 0.1$ s. 251
5.17 Enveloppe de convergence locale des valeurs RMS. 252
5.18 Spectre de l'énergie cinétique turbulente à l'interface chambre/turbine. 254
5.19 Valeurs propres SPOD en fonction de la fréquence, normalisées par l'énergie totale sur l'ensemble des fréquences. 255
5.20 Valeurs propres SPOD normalisées par l'énergie totale à chaque fréquence. 255
5.21 Mode 1 - Température. 257
5.22 Mode 2 - Température. 257
5.23 Mode 1 - Vitesse axiale. 257
5.24 Mode 2 - Vitesse axiale. 258
5.25 Contribution des valeurs propres de la base POD en pourcentage de l'énergie turbulente totale. 259

5.26 Contour des densités spectrales de puissance des coefficients temporaux de la POD normalisées par la valeur maximale de la densité spectrale de puissance de chaque coefficient. 260
5.27 Modes POD adimensionnés - Température. 260
5.28 Modes POD adimensionnés - u. 260
5.29 Densité spectrale de puissance des coefficients temporels des deux premiers modes de la base POD. 261
5.30 Somme des deux premiers modes POD adimensionnés. 261
5.31 Valeurs propres de la DMD visualisées en fonction de leurs parties réelle et imaginaire. 262
5.32 Spectres DMD. 262
5.33 Configuration NGV isolée. 263
5.34 Spectres SPOD des reconstructions partielles. 264
5.35 Résumé des cas comparés. 266
5.36 Évolution de la température statique moyennée sur l'ensemble des nœuds du plan d'entrée. 266
5.37 Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan d'entrée (à l'interface) pour les reconstructions partielles (avant l'application des conditions limites). 267
5.38 Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan d'entrée (à l'interface) pour les simulations (après l'application des conditions limites). 267
5.39 Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan 40 pour les simulations. 268
5.40 Densité spectrale de puissance du signal de vitesse axiale d'une sonde placée à mi-hauteur de veine et à un angle de 8° du plan 41 pour les simulations. 268
5.41 Comparaison des distributions de température statique au plan d'entrée. 269
5.42 Évolution de l'énergie cinétique turbulente le long de la position axiale adimensionnée par le maximum du cas de référence. Les positions du plan 40, du bord d'attaque (LE), du bord de fuite (TE) et du plan 41 sont indiquées. 272
5.43 Comparaison de la vitesse axiale moyenne [m.s^{-1}] au plan 40. 274
5.44 Comparaison de la température totale moyenne [K] au plan 40. 274
5.45 Comparaison de la vitesse axiale RMS moyenne [m.s^{-1}] au plan 40. 274
5.46 Comparaison de la température totale RMS moyenne [K] au plan 40. 275
5.47 Comparaison des profils radiaux de température totale moyenne entre les cas isolés et la référence au plan 40. 275
5.48 Comparaison de la vitesse axiale moyenne [m.s^{-1}] au plan 41. 276
5.49 Comparaison de la température totale moyenne [K] au plan 41. 276
5.50 Comparaison de la vitesse axiale RMS moyenne [m.s^{-1}] au plan 41. 277
5.51 Comparaison de la température totale RMS moyenne [K] au plan 41. 277
5.52 Comparaison des profils radiaux de température totale moyenne entre les cas isolés et la référence au plan 41. 278
5.53 Évolution de la température adiabatique moyenne en paroi le long de l'abscisse curviligne de la pale #2 avec l'enveloppe des températures minimales et maximales. La position 0 correspond au bord d'attaque de la pale. Une abscisse curviligne négative à l'intrados et une abscisse positive à l'extrados. 279
5.54 Température adiabatique moyenne en paroi de la pale #2 [K]. 280
5.55 Fluctuations RMS de température adiabatique moyenne en paroi de la pale #2 [K]. 280
5.56 Localisation et numérotation des plans normaux à la surface de la pale #2. 282
5.57 Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas de référence issue d'une solution moyenne. 282
5.58 Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas F65 issue d'une solution moyenne. . 283
5.59 Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas S2 issue d'une solution moyenne. . . 283
5.60 Vorticité normale au plan ω_n [1/s] pour le cas T2 issue d'une solution moyenne. . . 284

A.1 Représentation de cellules triangulaires et quadrilatères situées sur un bord. 324

A.2 Maillages utilisés pour le cas de l'onde acoustique linéaire. De gauche à droite, des triangles réguliers, des triangles perturbés, des quadrilatères réguliers et des quadrilatères perturbés. . . . 328
A.3 Profil 1D de la solution initiale de l'onde acoustique linéaire. . . . 328
A.4 Illustration du problème de la cavité acoustique monodimensionnelle [161]. . . . 330
A.5 Profil 1D de la solution initiale de la cavité résonante. . . . 330
A.6 Maillages utilisés pour le cas de la cavité résonante. . . . 331
A.7 Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma LW et pour un maillage composé de triangles. . . . 332
A.8 Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma LW et pour un maillage composé de quadrilatères. . . . 333
A.9 Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma TTGC et pour un maillage composé de triangles. . . . 333
A.10 Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma TTGC et pour un maillage composé de quadrilatères. . . . 334

B.1 Effet de la viscosité d'ordre 2. . . . 336
B.2 Effet de la viscosité d'ordre 4. . . . 336
B.3 Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi. . . . 337
B.4 Détermination des nombres d'onde ξ_m correspondant à $Dissip_m$ et $Dispers_m$. . . . 339
B.5 Front de Pareto de l'optimisation 1. . . . 340
B.6 Dissipation (module de G) et dispersion numériques (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTG4A et TTG-Opt1 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 341
B.7 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A et TTG-Opt1 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 342
B.8 Front de Pareto de l'optimisation 2. La croix rouge correspond à TTGC(0.01) et le point vert à TTG-Opt2. . . . 343
B.9 Front de Pareto de l'optimisation 3 et lien entre ϵ_1 et la dissipation. . . . 344
B.10 Front de Pareto de l'optimisation 4. . . . 345
B.11 Dissipation (module de G) et dispersion numériques (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTGC(0.01), TTG4A et TTG-Opt4 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 346
B.12 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTGC(0.01), TTG4A et TTG-Opt4 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 347
B.13 Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTGC(γ) pour différentes valeurs de γ et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. 348
B.14 Courbe d'évolution du CFL critique en fonction de γ pour le schéma TTGC(γ) en 1D. . . . 349
B.15 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas TTGC(0.01), TTGC(0.05), TTGC(0.1) et TTGC(0.2) pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 350
B.16 Illustration du décalage entre la position d'un nœud et le centre de gravité de la cellule duale associée à ce nœud. . . . 351
B.17 Évolution de l'erreur quadratique sur la pression en fonction de la valeur globale de γ pour différents niveaux de perturbations et pour deux raffinements. . . . 351
B.18 Courbe d'évolution de γ optimal en fonction de $\bar{\Delta}_{\mathrm{CGCD}}$ pour deux niveaux de raffinements. La courbe pointillée verte correspond à la loi d'évolution linéaire définie pour relier $\bar{\Delta}_{\mathrm{CGCD}}$ et γ. . . . 352
B.19 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas TTGC(0.01) et TTGC(γ) avec une loi d'évolution linéaire pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage. . . . 353

B.20 Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 355
B.21 Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 356
B.22 Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 363
B.23 Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL. . . . 364
B.24 Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A-R2, TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 pour deux valeurs de CFL et pour deux niveaux de perturbations du maillage. . . . 364

C.1 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 1. . . . 367
C.2 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 1. . . . 367
C.3 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 2. . . . 368
C.4 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 2. . . . 368
C.5 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 3. . . . 368
C.6 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 3. . . . 369
C.7 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 4. . . . 369
C.8 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 4. . . . 369
C.9 Méthode permettant d'obtenir l'élément de référence associé à un élément déformé [96]. 370
C.10 Déplacements (flèches rouges) et forces correspondantes (flèches bleues) requis pour transformer un élément déformé vers son élément de référence associé [96]. . . . 370
C.11 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 1. . . . 373
C.12 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 1. . . . 373
C.13 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 2. . . . 373
C.14 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 2. . . . 374
C.15 Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 3. . . . 374
C.16 Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 3. . . . 374

D.1 Décomposition en simplex du volume dual associé au nœud I. . . . 380
D.2 Représentation des notations introduites pour un nœud I dont le voisinage est composé des nœuds J, K et L [32]. . . . 381
D.3 Visualisation des maillages triangulaires pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = 1/16$). . . . 388
D.4 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et RK3-HO3 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages triangulaires). . . . 388
D.5 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas RK3-HO3 et RK3-HO2 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages triangulaires). . . . 389
D.6 Visualisation des maillages hybrides triangles/quadrilatères pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = 1/16$). . . . 390

D.7 Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et RK3-HO3 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages hybrides tri/quad). 390

Liste des Tables

1.1 Détails des modifications du nombre de pales de chaque étage pour obtenir une périodicité sectorielle. . . . 30
1.2 Détails numériques de la simulation moteur complet FULLEST. . . . 31
1.3 Détails numériques de la simulation isolée FAN + OGV. . . . 31
1.4 Différences relatives du débit, de la température totale et de la pression totale des deux simulations par rapport aux données expérimentales (les valeurs absolues ne sont pas données pour des raisons de confidentialité). . . . 32

2.1 Coefficients des schémas TTG. . . . 54

3.1 Paramètres généraux du cas test de la couche linéaire de cisaillement. . . . 124
3.2 Comparaison du taux de croissance de l'instabilité. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la valeur théorique. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %. . . . 126
3.3 Comparaison des schémas classiques (Section 3.2). . . . 147
3.4 Comparaison des schémas améliorés (Annexe B.1). . . . 147
3.5 Comparaison des nouveaux schémas (Section 3.3). . . . 148

4.1 Dimensions du domaine de simulation. . . . 194
4.2 Caractéristiques du maillage. . . . 195
4.3 Pas de temps utilisés pour chaque domaine pour les cas de référence et LTS. . . . 197
4.4 Nombre de mailles pour les cas de référence et LTS. . . . 197
4.5 Paramètres géométriques de la pale LS89. . . . 199
4.6 Détails des deux points de fonctionnement. . . . 200
4.7 Pas de temps pour les simulations de référence et LTS du cas MUR129. . . . 204
4.8 Nombre de cellules des cas de référence et LTS pour le point de fonctionnement MUR129. . . . 205
4.9 Pas de temps pour les simulations de référence et LTS du cas MUR235. . . . 210
4.10 Nombre de cellules des cas de référence et LTS pour le point de fonctionnement MUR235. . . . 211
4.11 Détails du point de fonctionnement du banc de test annulaire FACTOR installé au DLR Göttingen (pour l'ensemble des 20 secteurs). . . . 217
4.12 Pas de temps des trois instances pour les simulations de référence et LTS. . . . 219
4.13 Gains en coût de calcul obtenus pour les différentes applications. . . . 226
4.14 Temps de simulation pour chaque application pour les cas de référence et LTS. Les détails de la configuration des supercalculateurs sont donnés dans la Table 4.15 . . 227
4.15 Configuration des supercalculateurs utilisés. . . . 227

5.1 Valeurs des débits d'entrée et des multi-perforations pour la configuration 360°. Les valeurs correspondantes au secteur de 18° sont entre parenthèses. . . . 243
5.2 Détails de chaque reconstruction avec l'énergie totale contenue dans la condition d'entrée et le coût de stockage par rapport à la base de données initiale. . . . 264

5.3 Comparaison du débit réduit $Q_r = \frac{Q\sqrt{RT_t^{40}}}{P_t^{40}L^2}$ (avec Q le débit massique, R la constante des gaz parfaits et L le rayon à mi-hauteur de veine) et des ratios de pression et température totales entre le plan 40 et la sortie. 270
5.4 Moyenne spatiale de l'énergie cinétique turbulente, des fluctuations RMS des trois composantes de vitesse, de l'intensité turbulente et des fluctuations RMS de température totale au plan 40. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la référence. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %. 271
5.5 Moyenne spatiale de l'énergie cinétique turbulente, des fluctuations RMS des trois composantes de vitesse, de l'intensité turbulente et des fluctuations RMS de température totale au plan 41. Les couleurs sont déterminées par la différence relative de chaque valeur par rapport à la référence. Vert pour une différence relative inférieure à 5 %, orange entre 5 % et 20 % et rouge pour une différence relative supérieure à 20 %. 271
5.6 Comparaison du coût CPU de la simulation de référence par rapport aux simulations isolées avec conditions limites standards et SPOD. 285

A.1 Erreurs relatives sur l'intensité de l'onde sortante pour les différents cas par rapport à la valeur analytique donnée par l'Eq. (A.22). Les valeurs en vert correspondent à une erreur proche de la précision machine, en orange à une erreur inférieure à 1 % et en rouge supérieure à 1 %. 329
A.2 Valeurs de l'erreur obtenues pour TTGC pour différents maillages avec des flux linéaires. 329
A.3 Coefficient d'amplification G_a [s^{-1}] de l'onde acoustique dans la cavité résonante. . 332

B.1 Évolution du CFL critique en fonction de γ pour le schéma TTGC(γ) en 1D et 2D. 349

D.1 Coefficients intervenant dans les différents schémas Runge-Kutta à faible stockage. 387

Bibliographie

[1] Qu'est-ce que le cycle de Brayton. (cité p. 16 et 291.)

[2] H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo. Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence. Journal of Fluids Engineering, 123(2):382–393, 2001. (cité p. 193 et 195.)

[3] R. Abgrall. Toward the ultimate conservative scheme: Following the quest. Journal of Computational Physics, 167(2):277–315, 2001. (cité p. 51)

[4] R. Abgrall. Essentially non-oscillatory residual distribution schemes for hyperbolic problems. Journal of Computational Physics, 214:773–808, 05 2006. (cité p. 51)

[5] R. Abgrall, N. Andrianov, and M. Mezine. Towards very high-order accurate schemes for unsteady convection problems on unstructured meshes. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 47(8-9):679–691, 2005. (cité p. 97)

[6] R. Abgrall, K. Mer-Nkonga, and B. Nkonga. A Lax-Wendroff type theorem for residual schemes, pages 243–266. 01 2002. (cité p. 51)

[7] R. Abgrall and M. Mezine. Residual distribution scheme for steady problems. Novel Methods for Solving Convection Dominated Systems, VKI LS 2003-05, 2003. (cité p. 51 et 97.)

[8] R. Abgrall and M. Ricchiuto. High-Order Methods for CFD, pages 1–54. John Wiley & Sons, Ltd, 2017. (cité p. 97)

[9] R. Abgrall and M. Ricchiuto. Hyperbolic balance laws: residual distribution, local and global fluxes, 2021. (cité p. 51 et 97.)

[10] R. Abgrall and P. Roe. High order fluctuation schemes on triangular meshes. Journal of Scientific Computing, 19:3–36, 12 2003. (cité p. 51 et 97.)

[11] E. Achenbach and E. Heinecke. On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers 6×10^3 to 5×10^6. Journal of Fluid Mechanics, 109:239–251, 1981. (cité p. 208 et 215.)

[12] M. G. Adams, P. F. Beard, M. R. Stokes, F. Wallin, K. S. Chana, and T. Povey. Effect of a combined hot-streak and swirl profile on cooled 1.5-stage turbine aerodynamics: An experimental and computational study. Journal of Turbomachinery, 143(2), 2021. (cité p. 242)

[13] G. Alfonsi, S. Ciliberti, M. Mancini, and L. Primavera. Direct numerical simulation of turbulent channel flow on high-performance GPU computing system. Computation, 4:Art. 13, 2016. (cité p. 194 et 295.)

[14] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2012. (cité p. 50, 51 et 69.)

[15] A. Andreini, T. Bacci, M. Insinna, L. Mazzei, and S. Salvadori. Hybrid RANS-LES modeling of the aero-thermal field in an annular hot streak generator for the study of combustor-turbine interaction. volume 5B: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2016. (cité p. 242)

[16] A. Andreini, T. Bacci, M. Insinna, L. Mazzei, and S. Salvadori. Modelling strategies for the prediction of hot streak generation in lean burn aeroengine combustors. Aerospace Science and Technology, 79:266 – 277, 2018. (cité p. 242)

[17] A. Andreini, B. Facchini, M. Insinna, L. Mazzei, and S. Salvadori. Hybrid RANS-LES modeling of a hot streak generator oriented to the study of combustor-turbine interaction. volume 5C: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2015. (cité p. 242)

[18] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(5):1749–1779, 2002. (cité p. 96)

[19] T. Arts, M. Lambert de Rouvroit, and A. Rutherfordl. Aero-thermal investigation of a highly loaded transonic linear turbine guide vane cascade: A test case for inviscid and viscous flow computations. Technical report, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1990. (cité p. 199, 205 et 211.)

[20] The AVBP HandBook, 2011. (cité p. 43 et 327.)

[21] T. Bacci, G. Caciolli, B. Facchini, L. Tarchi, C. Koupper, and J.-L. Champion. Flowfield and temperature profiles measurements on a combustor simulator dedicated to hot streaks generation. volume 5C: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2015. (cité p. 217 et 242.)

[22] S. Balay, S. Abhyankar, M. F. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, A. Dener, V. Eijkhout, W. D. Gropp, D. Kaushik, M. G. Knepley, D. A. May, L. C. McInnes, R. T. Mills, T. Munson, K. Rupp, P. Sanan, B. F. Smith, S. Zampini, H. Zhang, and H. Zhang. PETSc Web page, 2021. https://petsc.org. (cité p. 375)

[23] S. Balay, S. Abhyankar, M. F. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, A. Dener, V. Eijkhout, W. D. Gropp, D. Kaushik, M. G. Knepley, D. A. May, L. C. McInnes, R. T. Mills, T. Munson, K. Rupp, P. Sanan, B. F. Smith, S. Zampini, H. Zhang, and H. Zhang. PETSc users manual. Technical Report ANL-95/11 - Revision 3.15, Argonne National Laboratory, 2021. (cité p. 375)

[24] S. Balay, W. D. Gropp, L. C. McInnes, and B. F. Smith. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, Modern Software Tools in Scientific Computing, pages 163–202. Birkhauser Press, 1997. (cité p. 375)

[25] F. Bardoux. Modélisation des interactions instationnaires rotor-stator en turbomachine multi-étages. 2000. (cité p. 26, 27 et 291.)

[26] G. Barigozzi, S. Mosconi, A. Perdichizzi, and S. Ravelli. The effect of hot streaks on a high pressure turbine vane cascade with showerhead film cooling. International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power, 2(3), 2017. (cité p. 242)

[27] T. Barth and D. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. 1989. (cité p. 44)

[28] G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2000. (cité p. 13)

[29] K. Bathe. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 2006. (cité p. 372)

[30] P. F. Beard, A. D. Smith, and T. Povey. Experimental and computational fluid dynamics investigation of the efficiency of an unshrouded transonic high pressure turbine. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, 225(8):1166–1179, 2011. (cité p. 28)

[31] A. Bejan, A. Kraus, and P. Kraus. Heat Transfer Handbook. Number vol. 1 in Heat Transfer Handbook. Wiley, 2003. (cité p. 194)

[32] M. Bernard, G. Lartigue, G. Balarac, V. Moureau, and G. Puigt. A framework to perform high-order deconvolution for finite-volume method on simplicial meshes. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 92(11):1551–1583, 2020. (cité p. 149, 299, 379, 381, 387, 389 et 390.)

[33] R. Bhaskaran and S. Lele. Heat transfer prediction in high pressure turbine cascade with free-stream turbulence using LES. 41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2011. (cité p. 199)

[34] R. Bizzari, D. Lahbib, A. Dauptain, F. Duchaine, L. Gicquel, and F. Nicoud. A thickened-hole model for Large Eddy Simulations over multiperforated liners. Flow, Turbulence and Combustion, 101(3):705–717, 2018. (cité p. 30, 217, 218 et 243.)

[35] J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section. 1897. (cité p. 22)

[36] A. N. Brooks and T. J. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32(1):199–259, 1982. (cité p. 51)

[37] C. Brown and D. Sutliff. DGEN aeropropulsion research turbofan (DART): Lossless projection of measured engine noise spectra to a 1-foot-radius arc. volume 2018 AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2018. (cité p. 35)

[38] V. Brunet, E. Croner, A. Minot, J. de Laborderie, E. Lippinois, S. Richard, J.-F. Boussuge, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, T. Poinsot, G. Puigt, G. Staffelbach, L. Segui, O. Vermorel, N. Villedieu, J.-S. Cagogne, K. Hillewaert, M. Rasquin, G. Lartigue, V. Moureau, V. Couaillier, E. Martin, M. de la Llave Plata, J.-M. Le Gouez, and F. Renac. Comparison of various CFD codes for LES simulations of turbomachinery: from inviscid vortex convection to multi-stage compressor. In ASME Turbo Expo, Oslo, Norway, 2018. (cité p. 121)

[39] D. Caraeni, M. Caraeni, and L. Fuchs. A parallel multidimensional upwind algorithm for LES. 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 06 2001. (cité p. 96)

[40] D. Caraeni and L. Fuchs. Compact third-order multidimensional upwind scheme for Navier–Stokes simulations. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 15:373–401, 07 2002. (cité p. 96)

[41] D. Caraeni and L. Fuchs. Compact third-order multidimensional upwind discretization for steady and unsteady flow simulations. Computers & Fluids, 34(4):419–441, 2005. (cité p. 96)

[42] R. Carpentier. Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle : I: calcul au sommet - pentes centrées. Technical Report RR-2824, INRIA, 1996. (cité p. 44)

[43] R. Carpentier. Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle : II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma. Technical Report RR-3360, INRIA, 1998. (cité p. 44)

[44] R. Carpentier, A. D. L. Bourdonnaye, and B. Larrouturou. Sur le calcul des équations équivalentes pour l'analyse des méthodes numériques linéaires. C. R. Acad. sci., Sér. 1 Math., 319:757–760, 1994. (cité p. 73)

[45] CERFACS. (cité p. 14)

[46] S.-C. Chang. A critical analysis of the modified equation technique of Warming and Hyett. Journal of Computational Physics, 86(1):107–126, 1990. (cité p. 73)

[47] D. R. Chapman and G. D. Kuhn. The limiting behaviour of turbulence near a wall. Journal of Fluid Mechanics, 170:265–292, 1986. (cité p. 24)

[48] F. Charru. Instabilités hydrodynamiques. EDP Sciences, 2008. (cité p. 122)

[49] H. Choi and P. Moin. Grid-point requirements for Large Eddy Simulation: Chapman's estimates revisited. Physics of Fluids, 24, 2012. (cité p. 24 et 25.)

[50] B.-T. Chu. On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (part I). Acta Mechanica, 1:215–234, 1965. (cité p. 240)

[51] P. G. Ciarlet. Interpolation error estimates for the reduced Hsieh-Clough-Tocher triangles. Mathematics of Computation, 32:335–344, 1978. (cité p. 141)

[52] R. W. Clough and J. L. Tocher. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, pages 515–545, Ohio, 1965. (cité p. 141)

[53] C. Coello. Evolutionary multi-objective optimization: A historical view of the field. Computational Intelligence Magazine, IEEE, 1:28 – 36, 2006. (cité p. 338)

[54] O. Colin. Simulations aux grandes échelles de la combustion turbulente prémélangée dans les statoréacteurs. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2000. (cité p. 58 et 59.)

[55] O. Colin. A finite element operator for diffusion terms in AVBP. Technical report, Institut Français du Pétrole, 2003. (cité p. 57 et 58.)

[56] O. Colin, F. Ducros, D. Veynante, and T. Poinsot. A thickened flame model for Large Eddy Simulations of turbulent premixed combustion. Physics of Fluids, 12(7):1843–1863, 2000. (cité p. 30)

[57] O. Colin and M. Rudgyard. Development of high-order Taylor-Galerkin schemes for LES. Journal of Computational Physics, 162(2):338 – 371, 2000. (cité p. 54, 56, 57, 58, 68, 69, 71, 75, 118, 157, 160, 326, 327, 336 et 344.)

[58] E. Collado Morata, N. Gourdain, F. Duchaine, and L. Gicquel. Effects of free-stream turbulence on high pressure turbine blade heat transfer predicted by structured and unstructured LES. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(21):5754 – 5768, 2012. (cité p. 24, 199 et 207.)

[59] E. M. Constantinescu and A. Sandu. Multirate timestepping methods for hyperbolic conservation laws. Journal of Scientific Computing, 33(3):239–278, 2007. (cité p. 152)

[60] C. Cornelius, T. Biesinger, L. Zori, R. Campregher, P. Galpin, and A. Braune. Efficient time resolved multistage CFD analysis applied to axial compressors. volume 2 of Proceedings of the ASME Turbo Expo, 2014. (cité p. 27)

[61] F. Cottier, P. Pinchaud, and G. Dumas. Aerothermal predictions of combustor/turbine interactions using advanced turbulence modeling. 13th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, 2019. (cité p. 242)

[62] J. M. Coulson, J. F. Richardson, and J. M. Coulson. Chemical engineering . Volume 1 . Fluid flow, heat transfer and mass transfer. Butterworth-Heinemann, 6th edition edition, 1999. (cité p. 41)

[63] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. Mathematische Annalen, 100(1):32–74, 1928. (cité p. 14 et 61.)

[64] G. R. Cowper. Gaussian quadrature formulas for triangles. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7(3):405–408, 1973. (cité p. 111 et 139.)

[65] P. Crumpton. An efficient cell vertex method for unstructured tetrahedral grids. 1995. (cité p. 59)

[66] P. Crumpton, J. Mackenzie, and K. Morton. Cell vertex algorithms for the compressible Navier-Stokes equations. Journal of Computational Physics, 109(1):1 – 15, 1993. (cité p. 45 et 49.)

[67] S. Cubeda, L. Mazzei, T. Bacci, and A. Andreini. Impact of predicted combustor outlet conditions on the aerothermal performance of film-cooled hpt vanes. volume 5C: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2018. (cité p. 242)

[68] L. da Vinci. Studies of flowing water, with notes. ca. 1510-13. (cité p. 13 et 291.)

[69] C. Dapogny, C. Dobrzynski, and P. Frey. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. Journal of Computational Physics, 2014. (cité p. 31)

[70] G. Daviller, M. Brebion, P. Xavier, G. Staffelbach, J.-D. Mueller, and T. Poinsot. A mesh adaptation strategy to predict pressure losses in LES of swirled flows. Flow, Turbulence and Combustion, 99:1–26, 2017. (cité p. 31)

[71] J. de Laborderie, F. Duchaine, L. Gicquel, O. Vermorel, G. Wang, and S. Moreau. Numerical analysis of a high-order unstructured overset grid method for compressible LES of turbomachinery. Journal of Computational Physics, 363:371 – 398, 2018. (cité p. 30, 64, 65, 185 et 187.)

[72] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. IEEE Trans. Evol. Comput., 6:182–197, 2002. (cité p. 338)

[73] H. Deconinck and M. Ricchiuto. Residual Distribution Schemes: Foundations and Analysis, pages 1–53. John Wiley & Sons, Ltd, 2017. (cité p. 51)

[74] H. Deconinck, K. Sermeus, and R. Abgrall. Status of multidimensional upwind residual distribution schemes and applications in aeronautics. Fluids 2000 Conference and Exhibit, Denver, 2000. (cité p. 50)

[75] H. Deconinck, R. Struijs, and P. Roe. Fluctuation splitting for multidimensional convection problems: an alternative to finite volume and finite element methods. In its Computational Fluid Dynamics, 2, 1990. (cité p. 51)

[76] J. C. Del Alamo, P. Zandonade, and R. Moser. Scaling of the energy spectra of turbulent channels. Journal of Fluid Mechanics, 500:135 – 144, 2004. (cité p. 22)

[77] J. D. Denton. Loss mechanisms in turbomachines. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 1993. (cité p. 281)

[78] J. D. Denton and U. K. Singh. Time marching methods for turbomachinery flow calculation. In Von Karman Inst. for Fluid Dyn. Appl. of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines, 1979. (cité p. 26)

[79] A. Dervieux and J.-A. Desideri. Compressible flow solvers using unstructured grids. Research Report RR-1732, INRIA, 1992. (cité p. 44)

[80] G. Desquesnes, M. Terracol, E. Manoha, and P. Sagaut. On the use of high order overlapping grid method for coupling CFD/CAA. Journal of Computational Physics, 220:355–382, 2006. (cité p. 64)

[81] S. Dixon and C. Hall. Butterworth-Heinemann, Boston, seventh edition edition, 2014. (cité p. 15)

[82] J. Donea. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20(1):101–119, 1984. (cité p. 160)

[83] J. Donea, L. Quartapelle, and V. Selmin. An analysis of time discretization in the finite element solution of hyperbolic problems. Journal of Computational Physics, 70(2):463–499, 1987. (cité p. 53 et 54.)

[84] P. G. Drazin and W. H. Reid. Hydrodynamic Stability. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2004. (cité p. 122)

[85] F. Duchaine. Optimisation de forme multi-objectif sur machines parallèles avec méta-modèles et coupleurs : application aux chambres de combustion aéronautiques. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2007. (cité p. 337 et 338.)

[86] F. Duchaine, J. Dombard, L. Gicquel, and C. Koupper. On the importance of inlet boundary conditions for aerothermal predictions of turbine stages with Large Eddy Simulation. Computers & Fluids, 154:60 – 73, 2017. (cité p. 28 et 218.)

[87] F. Duchaine, S. Jauré, D. Poitou, E. Quémerais, G. Staffelbach, T. Morel, and L. Gicquel. Analysis of high performance conjugate heat transfer with the OpenPALM coupler. Computational Science & Discovery, 8(1):015003, 2015. (cité p. 30 et 64.)

[88] F. Duchaine, N. Maheu, V. Moureau, G. Balarac, and S. Moreau. Large-Eddy Simulation and conjugate heat transfer around a low-mach turbine blade. Journal of Turbomachinery, 136, 2013. (cité p. 25)

[89] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-Eddy Simulation of transition to turbulence in a boundary layer spatially developing over a flat plate. J. Fluid Mech, 286:1–36, 1998. (cité p. 42)

[90] F. Ducros, N. Franck, and T. Poinsot. Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries. Numerical Methods for Fluid Dynamics VI, 1998. (cité p. 30 et 218.)

[91] M. Dumbser, D. Balsara, E. Toro, and C.-D. Munz. A unified framework for the construction of one-step finite-volume and discontinuous Galerkin schemes. Journal of Computational Physics, 227:8209–8253, 09 2008. (cité p. 97)

[92] M. Dumbser and M. Käser. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case. Geophysical Journal International, 167(1):319–336, Oct. 2006. (cité p. 97)

[93] M. Dumbser and C.-D. Munz. Building blocks for arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes. J. Sci. Comput., 27:215–230, 06 2006. (cité p. 97)

[94] C. Duprat, G. Balarac, O. Metais, P. Congedo, and O. Brugiere. A wall-layer model for Large-Eddy Simulations of turbulent flows with/out pressure gradient. Physics of Fluids, 23, 2011. (cité p. 25)

[95] D. Dupuy, L. Gicquel, N. Odier, F. Duchaine, and T. Arts. Analysis of the effect of intermittency in a high-pressure turbine blade. Physics of Fluids, 32(9):095101, 2020. (cité p. 199, 211 et 214.)

[96] R. Durand, B. Pantoja Rosero, and V. Oliveira. A general mesh smoothing method for finite elements. Finite Elements in Analysis and Design, 158:17–30, 2019. (cité p. 299, 367, 370 et 372.)

[97] J. I. Erdos, E. Alzner, and W. McNally. Numerical solution of periodic transonic flow through a fan stage. AIAA Journal, 15(11):1559–1568, 1977. (cité p. 27)

[98] O. Esnault, M. Boileau, R. Vicquelin, B. Fiorina, and O. Gicquel. A method to accelerate LES explicit solvers using local time-stepping. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2010. (cité p. 152)

[99] R. Feng. High order cubic-polynomial interpolation schemes on triangular meshes. Communications in Computational Physics, 12(5):1588–1602, 2012. (cité p. 64)

[100] O. Ø. Førde. Analysis of the turbulent energy dissipation. 2012. (cité p. 252)

[101] A. Fourmaux. Assessment of a low storage technique for multistage turbomachinery Navier-Stokes computations. ASME winter annual meeting, 2002. (cité p. 27)

[102] B. Franzelli, E. Riber, M. Sanjosé, and T. Poinsot. A two-step chemical scheme for kerosene–air premixed flames. Combustion and Flame, 157(7):1364–1373, 2010. (cité p. 30)

[103] F. Fruth, D. Vogt, and T. Fransson. Influence of the blade count ratio on aerodynamic forcing: Part ii-high pressure transonic turbine. volume 6: Structures and Dynamics, Parts A and B of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 1343–1354, 2011. (cité p. 26)

[104] W. K. George, P. D. Beuther, and J. L. Lumley. Processing of random signals. In B. W. Hansen, editor, Proceedings of the Dynamic Flow Conference 1978 on Dynamic Measurements in Unsteady Flows, pages 757–800. Springer Netherlands, 1978. (cité p. 237)

[105] N. Georgiadis, D. Rizzetta, and C. Fureby. Large-Eddy Simulation: Current capabilities, recommended practices, and future research. AIAA Journal, 48:1772–1784, 2010. (cité p. 24)

[106] G. A. Gerolymos, G. J. Michon, and J. Neubauer. Analysis and application of chorochronic periodicity in turbomachinery rotor/stator interaction computations. Journal of Propulsion and Power, 18(6):1139–1152, 2002. (cité p. 27)

[107] A. Ghate, N. Ghaisas, S. Lele, and A. Towne. Interaction of small scale homogenenous isotropic turbulence with an actuator disk. 2018 Wind Energy Symposium, 2018. (cité p. 232)

[108] A. Ghate and S. Lele. Subfilter-scale enrichment of planetary boundary layer Large Eddy Simulation using discrete Fourier–Gabor modes. Journal of Fluid Mechanics, 819:494–539, 2017. (cité p. 232)

[109] A. S. Ghate, A. Towne, and S. K. Lele. Broadband reconstruction of inhomogeneous turbulence using spectral proper orthogonal decomposition and Gabor modes. Journal of Fluid Mechanics, 888:R1, 2020. (cité p. 232)

[110] L. Gicquel, G. Staffelbach, and T. Poinsot. Large Eddy Simulations of gaseous flames in gas turbine combustion chambers. Progress in Energy and Combustion Science, 38(6):782–817, 2012. (cité p. 24)

[111] M. B. Giles. Calculation of unsteady wake/rotor interaction. Journal of Propulsion and Power, 4(4):356–362, 1988. (cité p. 27)

[112] Global Aviation Industry. The right flightpath to reduce aviation emissions. (cité p. 17 et 291.)

[113] N. Gourdain. High-performance computing of gas turbine flows: current and future trends. Habilitation à diriger des recherches, 2011. (cité p. 27)

[114] N. Gourdain. Validation of Large-Eddy Simulation for the prediction of compressible flow in an axial compressor stage. volume 6C: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2013. (cité p. 28)

[115] N. Gourdain, S. Burguburu, F. Leboeuf, and G. Michon. Simulation of rotating stall in a whole stage of an axial compressor. Computers & Fluids, 39:1644–1655, 2010. (cité p. 28)

[116] N. Gourdain, F. Duchaine, L. Gicquel, and E. Collado. Advanced numerical simulation dedicated to the prediction of heat transfer in a highly loaded turbine guide vane. volume 7: Turbomachinery, Parts A, B, and C of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 807–820, 2010. (cité p. 199)

[117] C. Gout, D. Papadogiannis, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, and N. Odier. Assessment of profile transformation for turbomachinery Large Eddy Simulations - from academic to industrial applications. volume Volume 2C: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2021. (cité p. 27)

[118] V. Granet, O. Vermorel, T. Léonard, L. Gicquel, and T. Poinsot. Comparison of nonreflecting outlet boundary conditions for compressible solvers on unstructured grids. AIAA Journal, 48:2348–2364, 2010. (cité p. 201 et 243.)

[119] V. Gravemeier. The variational multiscale method for laminar and turbulent incompressible flow. 2003. (cité p. 22 et 291.)

[120] N. Guezennec and T. Poinsot. Acoustically nonreflecting and reflecting boundary conditions for vorticity injection in compressible solvers. AIAA Journal, 47, 2009. (cité p. 265)

[121] M. Hall. Cell vertex multigrid solution of the Euler equations for transonic flow past aerofoils. Royal Aerospace Establishment, 1984. (cité p. 49)

[122] M. Harnieh. Prédiction de la génération des pertes des écoulements compressibles anisothermes appliquée aux distributeurs hautes pressions de turbine avec les simulations aux grandes échelles. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2020. (cité p. 269)

[123] M. Harnieh, M. Thomas, B. Romain, J. Dombard, F. Duchaine, and L. Gicquel. Assessment of a coolant injection model on cooled high-pressure vanes with Large-Eddy Simulation. Flow, Turbulence and Combustion, 104, 2020. (cité p. 243)

[124] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. Journal of Computational Physics, 131(1):3–47, 1997. (cité p. 96)

[125] X. He and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. Physical Review E, 56:6811–6817, 1997. (cité p. 14)

[126] G. Heinzel, A. Rüdiger, and R. Schilling. Spectrum and spectral density estimation by the discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new flat-top windows. Max Plank Inst, 12, 2002. (cité p. 235)

[127] K. Hillewaert. Development of the discontinuous Galerkin method for high-resolution, large scale CFD and acoustics in industrial geometries. PhD Thesis, 2013. (cité p. 121)

[128] C. Hirsch. Numerical Computation of Internal and External Flows. Butterworth-Heinemann, Oxford, second edition edition, 2007. (cité p. 44, 60, 70, 71, 72, 73, 75, 158, 162, 347 et 386.)

[129] S. M. Hosseini, F. Fruth, D. Vogt, and T. Fransson. Effect of scaling of blade row sectors on the prediction of aerodynamic forcing in a highly-loaded transonic turbine stage. volume 6: Structures and Dynamics, Parts A and B of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 1297–1307, 2011. (cité p. 26)

[130] M. Hubbard. Non-oscillatory third order fluctuation splitting schemes for steady scalar conservation laws. Journal of Computational Physics, 222(2):740–768, 2007. (cité p. 97)

[131] M. Hubbard. Discontinuous fluctuation distribution. Journal of Computational Physics, 227:10125–10147, 12 2008. (cité p. 51)

[132] M. Hubbard and N. Mebrate. Very high order, non-oscillatory fluctuation distribution schemes. In H. Deconinck and E. Dick, editors, Computational Fluid Dynamics 2006, pages 65–70, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg. (cité p. 97)

[133] M. E. Hubbard and P. Roe. Multidimensional upwind fluctuation distribution schemes for scalar time dependent problems. Technical report, University of Reading, Department of Mathematics, 1998. (cité p. 51)

[134] W. Hundsdorfer, A. Mozartova, and V. Savcenco. Monotonicity Conditions for Multirate and Partitioned Explicit Runge-Kutta Schemes. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. (cité p. 152)

[135] Infoclimat. (cité p. 14)

[136] M. Insinna, S. Salvadori, and F. Martelli. Simulation of combustor/NGV interaction using coupled RANS solvers: Validation and application to a realistic test case. volume 2C: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2014. (cité p. 28)

[137] K. Iwamoto. Database of fully developed channel flow. University of Tokyo, Internal Report, 2002. (cité p. 193 et 197.)

[138] P. D. J. N. Reddy. Introduction to the Finite Element Method, Fourth Edition. McGraw-Hill Education, 2019. (cité p. 97)

[139] S. Jacobi, C. M. Mazzoni, K. Chana, and B. Rosic. Investigation of unsteady flow phenomena in first vane caused by combustor flow with swirl. Journal of Turbomachinery, 139, 2017. (cité p. 28 et 281.)

[140] F. Jaegle, O. Cabrit, S. Mendez, and T. Poinsot. Implementation methods of wall functions in cell-vertex numerical solvers. Flow, Turbulence and Combustion, 85(2):245–272, 2010. (cité p. 217)

[141] A. Jameson. Computational fluid dynamics: Past, present and future. 2012. (cité p. 15 et 291.)

[142] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes. 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, 1981. (cité p. 58, 59 et 151.)

[143] G. Jeanmasson, I. Mary, and L. Mieussens. Explicit local time stepping scheme for the unsteady simulation of turbulent flows. Tenth International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD10), 2018. (cité p. 152)

[144] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. Journal of Fluid Mechanics, 285:69–94, 1995. (cité p. 244 et 296.)

[145] Z. Ji, L. Liu, and G. Wang. A global laplacian smoothing approach with feature preservation. In Ninth International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics, 2005. (cité p. 365)

[146] J. Jiménez, J. C. Del Alamo, and O. Flores. The large-scale dynamics of near-wall turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 505:179 – 199, 2004. (cité p. 22)

[147] J. Jiménez and P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 225:213–240, 1991. (cité p. 204)

[148] F. Johnson, E. Tinoco, and N. Yu. Thirty years of development and application of CFD at Boeing commercial airplanes. Computers & Fluids, 34:1115–1151, 2005. (cité p. 14)

[149] W. Jones and B. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15(2):301–314, 1972. (cité p. 23)

[150] Y. Kanani, S. Acharya, and F. Ames. Numerical predictions of turbine cascade secondary flows and heat transfer with inflow turbulence. volume 7B: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2020. (cité p. 281)

[151] S. Kawai and J. Larsson. Wall-modeling in Large Eddy Simulation: Length scales, grid resolution, and accuracy. Physics of Fluids, 24(1):015105, 2012. (cité p. 24)

[152] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, and K. Yamamoto. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. International Journal of Heat and Fluid Flow, 19:482–491, 1998. (cité p. 23)

[153] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, 177:133–166, 1987. (cité p. 193)

[154] A. N. Kolmogorov, V. Levin, J. C. R. Hunt, O. M. Phillips, and D. Williams. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 434(1890):9–13, 1991. (cité p. 22)

[155] C. Koupper. Unsteady multi-component simulations dedicated to the impact of the combustion chamber on the turbine of aeronautical gas turbines. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2015. (cité p. 218 et 269.)

[156] C. Koupper, G. Bonneau, L. Gicquel, and F. Duchaine. Large Eddy Simulations of the combustor turbine interface: Study of the potential and clocking effects. volume 5B: Heat Transfer of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2016. (cité p. 242)

[157] C. Koupper, L. Gicquel, F. Duchaine, T. Bacci, B. Facchini, A. Picchi, L. Tarchi, and G. Bonneau. Experimental and numerical calculation of turbulent timescales at the exit of an engine representative combustor simulator. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 138(2):021503–021503, 2015. (cité p. 242)

[158] C. Koupper, L. Gicquel, F. Duchaine, and G. Bonneau. Advanced combustor exit plane temperature diagnostics based on Large Eddy Simulations. Flow, Turbulence and Combustion, 95(1):79–96, 2015. (cité p. 242 et 243.)

[159] H.-O. Kreiss and G. Scherer. Finite element and finite difference methods for hyperbolic partial differential equations. In C. de Boor, editor, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, pages 195–212. Academic Press, 1974. (cité p. 75)

[160] A. Krumme, M. Tegeler, and S. Gattermann. Design, integration and operation of a rotating combustor-turbine-interaction test rig within the scope of the EC FP7 project FACTOR. In Proceedings of 13th European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics & Thermodynamics ETC13, Lausanne, Switzerland, 2019. (cité p. 217 et 242.)

[161] N. Lamarque. Schémas numériques et conditions limites pour la simulation aux grandes échelles de la combustion diphasique dans les foyers d'hélicoptère. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2007. (cité p. 45, 47, 51, 52, 61, 72, 75, 76, 77, 79, 291, 298, 324, 330, 331, 336, 337 et 338.)

[162] N. Lamarque and T. Poinsot. Boundary conditions for acoustic eigenmodes computation in gas turbine combustion chambers. AIAA Journal, 46(9):2282–2292, 2008. (cité p. 328)

[163] L. S. Langston. Secondary flows in axial turbines - a review. Annals of the New York Academy of Sciences, 934(1):11–26, 2001. (cité p. 281)

[164] P. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13:217–237, 1960. (cité p. 49)

[165] P. D. Lax and B. Wendroff. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. Communications on Pure and Applied Mathematics, 17(3):381–398, 1964. (cité p. 30, 49, 193 et 242.)

[166] D. Lee, D. Fahey, A. Skowron, M. Allen, U. Burkhardt, Q. Chen, S. Doherty, S. Freeman, P. Forster, J. Fuglestvedt, A. Gettelman, R. De León, L. Lim, M. Lund, R. Millar, B. Owen, J. Penner, G. Pitari, M. Prather, R. Sausen, and L. Wilcox. The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018. Atmospheric Environment, 244, 2021. (cité p. 17)

[167] F. Lekien and J. Marsden. Tricubic interpolation in three dimensions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63:455–471, 2005. (cité p. 64)

[168] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics, 103(1):16–42, 1992. (cité p. 24)

[169] X.-S. Li and X.-L. Li. All-speed Roe scheme for the Large Eddy Simulation of homogeneous decaying turbulence. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 30(1):69–78, 2016. (cité p. 385 et 386.)

[170] L. Liu, X. Li, and F. Q. Hu. Nonuniform time-step Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustics. Journal of Computational Physics, 229(19):6874 – 6897, 2010. (cité p. 153)

[171] L. Liu, X. Li, and F. Q. Hu. Non-uniform time-step explicit Runge-Kutta scheme for high-order finite difference method. Computers & Fluids, 105:166 – 178, 2014. (cité p. 153)

[172] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. Journal of Computational Physics, 115(1):200–212, 1994. (cité p. 96)

[173] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flow. Atmospheric turbulence and radio propagation, pages 166–178, 1967. (cité p. 258)

[174] J. L. Lumley. Stochastic tools in turbulence. Academic Press, 1970. (cité p. 232 et 258.)

[175] H. Luo, Y. Xia, S.-J. Li, R. Nourgaliev, and C. Cai. A hermit WENO reconstruction-based discontinuous Galerkin method for the Euler equations on tetrahedral grids. Journal of Computational Physics, 231, 2012. (cité p. 96)

[176] P. Marchal and C. Sieverding. Secondary flows within turbomachinery bladings. volume Proc. of AGARD-CP-24 of Secondary Flows in Turbomachines, 1977. (cité p. 281)

[177] D. Mavripilis, A. Jameson, and L. Martinelli. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes. AIAA Journal, 28, 1989. (cité p. 44)

[178] M. Mayorca, J. Andrade, D. Vogt, H. Martensson, and T. Fransson. Effect of scaling of blade row sectors on the prediction of aerodynamic forcing in a highly loaded transonic compressor stage. Journal of Turbomachinery, 133, 2011. (cité p. 25 et 26.)

[179] L. Mazzei, A. Picchi, A. Andreini, B. Facchini, and I. Vitale. Unsteady CFD investigation of effusion cooling process in a lean burn aero-engine combustor. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 139, 2016. (cité p. 242)

[180] M. McClain and C. Witzgall. Surface Energy Formula for a Hsieh-Clough-Tocher Element, 1999. (cité p. 141)

[181] G. Medic, G. Kalitzin, D. You, M. Herrmann, F. Ham, E. Weide, H. Pitsch, and J. Alonso. Integrated RANS/LES computations of turbulent flow through a turbofan jet engine. Annual Research Briefs 2006, 2006. (cité p. 232)

[182] G. Medic, D. You, and G. Kalitzin. On coupling of RANS and LES for integrated computations of jet engines. volume 6: Turbo Expo 2007, Parts A and B of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 1181–1187, 2007. (cité p. 28)

[183] G. Medic, D. You, G. Kalitzin, M. Herrmann, F. Ham, H. Pitsch, E. van der Weide, and J. Alonso. Integrated computations of an entire jet engine. volume 6: Turbo Expo 2007, Parts A and B of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 1841–1847, 2007. (cité p. 28 et 232.)

[184] M. Mezine, M. Ricchiuto, R. Abgrall, and H. Deconinck. Monotone and stable residual distribution schemes on prismatic space–time elements for unsteady conservation laws. von Karman Institute Lecture Series, 2003. (cité p. 51)

[185] K. Miki, J. Moder, and M. Liou. Computational study of combustor–turbine interactions. Journal of Propulsion and Power, 34:1–13, 2018. (cité p. 28)

[186] P. Moin, K. Squires, W. Cabot, and S. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, 3(11):2746–2757, 1991. (cité p. 44)

[187] K. W. Morton and S. M. Stringer. Artificial viscosity and the cell vertex method. In P. Kutler, J. Flores, and J.-J. Chattot, editors, Fifteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pages 111–116, Berlin, Heidelberg, 1997. Springer Berlin Heidelberg. (cité p. 58 et 61.)

[188] K. W. Morton, M. Stynes, and E. Süli. Analysis of a cell-vertex finite volume method for convection-diffusion problems. Mathematics of Computation, 66(220):1389–1406, 1997. (cité p. 45 et 51.)

[189] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. Physics of Fluids, 11(4):943–945, 1999. (cité p. 193)

[190] G. Mouret. Adaptation of phase-lagged boundary conditions to Large-Eddy Simulation in turbomachinery configuration. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2016. (cité p. 27)

[191] J.-D. Müller. Coarsening 3-d hybrid meshes for multigrid methods. In In 9th Copper Mountain Multigrid Conference, 1999. (cité p. 31)

[192] NASA/ESA. (cité p. 14)

[193] A. Nentchev. Numerical analysis and simulation in microelectronics by vector finite elements. PhD Thesis, 2008. (cité p. 110 et 128.)

[194] R.-H. Ni. A multiple-grid scheme for solving the Euler equations. AIAA Journal, 20(11):1565–1571, 1982. (cité p. 49)

[195] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor. Flow, Turbulence and Combustion, 62(3):183–200, 1999. (cité p. 43 et 242.)

[196] F. Nicoud, H. B. Toda, O. Cabrit, S. Bose, and J. Lee. Using singular values to build a subgrid-scale model for Large Eddy Simulations. Phys. Fluids, 23, 2011. (cité p. 24, 43, 193 et 201.)

[197] N. Odier, M. Sanjosé, L. Gicquel, T. Poinsot, S. Moreau, and F. Duchaine. A characteristic inlet boundary condition for compressible, turbulent, multispecies turbomachinery flows. Computers & Fluids, 178:41 – 55, 2019. (cité p. 30 et 201.)

[198] Y. Omelchenko and H. Karimabadi. Self-adaptive time integration of flux-conservative equations with sources. Journal of Computational Physics, 216(1):179 – 194, 2006. (cité p. 152)

[199] Y. Omelchenko and H. Karimabadi. A time-accurate explicit multi-scale technique for gas dynamics. Journal of Computational Physics, 226(1):282 – 300, 2007. (cité p. 152)

[200] S. Osher and R. Sanders. Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids. Mathematics of Computation, 41(164):321–336, 1983. (cité p. 152)

[201] X. Ottavy. Cours de turbomachine à fluide compressible, 2007. (cité p. 15)

[202] D. Papadogiannis. Coupled Large Eddy Simulations of combustion chamber-turbine interactions. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2015. (cité p. 64, 65 et 292.)

[203] V. Pareto. Manuale di Economia Politica. Piccola Biblioteca Scientifica, Milan, 1906. (cité p. 337)

[204] T. Passot and A. Pouquet. Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime. Journal of Fluid Mechanics, 181:441 – 466, 1987. (cité p. 201 et 265.)

[205] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for Large-Eddy Simulations. Annual Review of Fluid Mechanics, 34:349–374, 2002. (cité p. 23 et 25.)

[206] U. Piomelli and J. Chasnov. Large Eddy Simulation: theory and applications. vol 2. Springer, 1996. (cité p. 42)

[207] M. Piotrowicz, P. Flaszynski, and P. Doerffer. Effect of hot spot location on flow structure in nozzle guide vane. Journal of Physics: Conference Series, 1101:012025, 2018. (cité p. 242)

[208] T. Poinsot and S. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. Journal of Computational Physics, 101(1):104–129, 1992. (cité p. 30, 63, 201, 217 et 243.)

[209] T. Poinsot and D. Veynante. Theoretical and Numerical Combustion. R.T. Edwards Inc., 2005. (cité p. 327)

[210] S. Pope. Ten questions concerning the Large-Eddy Simulation of turbulent flows. New Journal of Physics, 6, 2004. (cité p. 24)

[211] S. B. Pope. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000. (cité p. 22, 23, 24, 41 et 42.)

[212] M. Porta. Development, verification and validation of LES tools for the study of combustion noise and combustion-acoustic-turbulence interaction. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2007. (cité p. 327 et 328.)

[213] A. Poubeau, R. Paoli, A. Dauptain, F. Duchaine, and G. Wang. Large-Eddy Simulations of a single-species solid rocket booster jet. AIAA Journal, 53(6):1477–1491, 2015. (cité p. 152 et 153.)

[214] R. Prosser and J. Schluter. Toward improved boundary conditions for the DNS and LES of turbulent subsonic flows. Journal of Computational Physics, 222:395–410, 2004. (cité p. 63)

[215] C. Pérez Arroyo, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, B. Martin, N. Odier, and G. Staffelbach. Towards the Large-Eddy Simulation of a full engine: Integration of a 360 azimuthal degrees fan, compressor and combustion chamber. part i: Methodology and initialisation. Journal of the Global Power and Propulsion Society, 2021. (cité p. 29, 30, 31, 32, 37 et 232.)

[216] C. Pérez Arroyo, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, B. Martin, N. Odier, and G. Staffelbach. Towards the Large-Eddy Simulation of a full engine: Integration of a 360 azimuthal degrees fan, compressor and combustion chamber. part ii: Comparison against stand-alone simulations. Journal of the Global Power and Propulsion Society, 2021. (cité p. 29, 32, 35, 37 et 232.)

[217] C. Pérez Arroyo, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, N. Odier, G. Exilard, S. Richard, N. Buffaz, and J. Démolis. Large-Eddy Simulation of an integrated high-pressure compressor and combustion chamber of a typical turbine engine architecture. volume 2C: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2020. (cité p. 28)

[218] L. Quartapelle and V. Selmin. High-order Taylor-Galerkin methods for nonlinear multidimensional problems. Finite Elements Fluids, 1993. (cité p. 54)

[219] A. M. Quarteroni and A. Valli. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. 1994. 2nd printing edition, 2008. (cité p. 51)

[220] M. M. Rai. Navier-Stokes simulations of rotor/stator interaction using patched and overlaid grids. Journal of Propulsion and Power, 3(5):387–396, 1987. (cité p. 63)

[221] B. Raverdy. Simulation des grandes échelles de l'écoulement se développant dans un étage complet de turbine basse pression. PhD Thesis, 2004. (cité p. 23 et 291.)

[222] A. Refloch, B. Courbet, A. Murrone, P. Villedieu, C. Laurent, P. Gilbank, J. Troyes, L. Tessé, G. Chaineray, J. Dargaud, E. Quémerais, and F. Vuillot. CEDRE Software. AerospaceLab, (2):1–10, 2011. (cité p. 30 et 64.)

[223] O. Reynolds. XXIX. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 174:935–982, 1883. (cité p. 22)

[224] M. Ricchiuto, A. Csik, and H. Deconinck. Residual distribution for general time-dependent conservation laws. Journal of Computational Physics, 209:249–289, 10 2005. (cité p. 51)

[225] L. F. Richardson. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 210:307–357, 1911. (cité p. 14)

[226] M. Rietmann, D. Peter, O. Schenk, B. Uçar, and M. Grote. Load-balanced local time stepping for large-scale wave propagation. In 2015 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium, pages 925–935, 2015. (cité p. 227)

[227] A. W. Rizzi and M. Inouye. Time-split finite-volume method for three-dimensional blunt-body flow. AIAA Journal, 11(11):1478–1485, 1973. (cité p. 44)

[228] P. Roe. Fluctuations and signals - a framework for numerical evolution problems. volume Numerical methods for fluid dynamics of Proc. Conf. Reading/U.K, pages 219–257, 1982. (cité p. 51)

[229] P. Roe. Error estimates for cell-vertex solutions of the compressible Euler equations. NASA Langley Research Center, 1987. (cité p. 44 et 45.)

[230] P. L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. Annual Review of Fluid Mechanics, 18:337–365, 1986. (cité p. 384)

[231] L. Romagnosi, Y. Li, M. Mezine, M. Teixeira, S. Vilmin, J. E. Anker, K. Claramunt, Y. Baux, and C. Hirsch. A methodology for steady and unsteady full-engine simulations. volume 2C: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2019. (cité p. 28)

[232] M. Rudgyard. Cell vertex methods for steady inviscid flow. In VKI, 1993. (cité p. 45)

[233] M. Rudgyard. Multidimensional wave decompositions for the Euler equations. von Karman Institute Lecture Series, 1993. (cité p. 51)

[234] A. Safjan and J. Oden. High-order Taylor-Galerkin and adaptive h-p methods for second-order hyperbolic systems: Application to elastodynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 103(1):187–230, 1993. (cité p. 90)

[235] A. Safjan and J. Oden. High-order Taylor-Galerkin methods for linear hyperbolic systems. J. Comput. Phys., 120(2):206–230, 1995. (cité p. 54 et 90.)

[236] P. Sagaut. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. Springer, 2002. (cité p. 41, 42 et 44.)

[237] S. Salvadori, G. Riccio, M. Insinna, and F. Martelli. Analysis of combustor/vane interaction with decoupled and loosely coupled approaches. volume 8: Turbomachinery, Parts A, B, and C of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, pages 2641–2652, 2012. (cité p. 28)

[238] M. Schlegel, O. Knoth, M. Arnold, and R. Wolke. Multirate Runge-Kutta schemes for advection equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 226(2):345 – 357, 2009. (cité p. 152)

[239] H. Schlichting and K. Gersten. Boundary-Layer Theory. 2000. (cité p. 24)

[240] J. Schlüter, S. Apte, G. Kalitzin, E. v. d. Weide, J. Alonso, and H. Pitsch. Large-scale integrated LES-RANS simulations of a gas turbine engine. Annual Research Briefs, page 111–120, 2005. (cité p. 28)

[241] P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. Journal of Fluid Mechanics, 656:5–28, 2010. (cité p. 261 et 262.)

[242] O. T. Schmidt and T. Colonius. Guide to spectral proper orthogonal decomposition. AIAA Journal, 58(3):1023–1033, 2020. (cité p. 239)

[243] P. Schmitt, T. Poinsot, B. Schuermans, and K. P. Geigle. Large-Eddy Simulation and experimental study of heat transfer, nitric oxide emissions and combustion instability in a swirled turbulent high-pressure burner. Journal of Fluid Mechanics, 570:17–46, 2007. (cité p. 243)

[244] T. Schoenfeld and M. Rudgyard. Steady and unsteady flow simulations using the hybrid flow solver AVBP. AIAA journal, 37(11):1378–1385, 1999. (cité p. 242)

[245] L. M. Segui Troth. Multiphysics coupled simulations of gas turbines. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2017. (cité p. 200, 205, 210, 211 et 212.)

[246] V. Selmin. Third-order finite element schemes for the solution of hyperbolic problems. Research Report RR-0707, INRIA, 1987. (cité p. 54 et 69.)

[247] V. Semiletov and S. Karabasov. Cabaret scheme for computational aero acoustics: Extension to asynchronous time stepping and 3d flow modelling. International Journal of Aeroacoustics, 13:321–336, 2014. (cité p. 152)

[248] T. K. Sengupta. Fundamentals of computational fluid dynamics. Universities Press, Hyderabad (India), pages 378–379, 2004. (cité p. 72, 75 et 151.)

[249] B. Seny, J. Lambrechts, T. Toulorge, V. Legat, and J.-F. Remacle. An efficient parallel implementation of explicit multirate Runge-Kutta schemes for discontinuous Galerkin computations. Journal of Computational Physics, 256:135–160, 2014. (cité p. 227)

[250] O. Sharma and T. Butler. Predictions of endwall losses and secondary flows in axial flow turbine cascades. 1986. (cité p. 281)

[251] S. Sherer and J. Scott. High-order compact finite-difference methods on general overset grids. Journal of Computational Physics, 210:459–496, 2005. (cité p. 64)

[252] Shift project. Pouvoir voler en 2050, quelle aviation dans un monde contraint ? 2021. (cité p. 17)

[253] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i - coherent structures. ii - symmetries and transformations. iii - dynamics and scaling. Quarterly of Applied Mathematics, 45, 1987. (cité p. 232)

[254] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I. the basic experiment. Monthly Weather Review, 91:99–164, 1963. (cité p. 42)

[255] B. Song, W. Ng, J. Cotroneo, D. Hofer, and G. Siden. Aerodynamic design and testing of three low solidity steam turbine nozzle cascades. Journal of Turbomachinery, 129, 2007. (cité p. 26)

[256] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA, 439, 1992. (cité p. 23)

[257] R. Struijs. Multi-dimensional upwind discretization method for the Euler equations on unstructured grids. PhD Thesis, Technische Univ., Delft (Netherlands), 1994. (cité p. 47 et 51.)

[258] W. Sutherland. LII. the viscosity of gases and molecular force. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 36(223):507–531, 1893. (cité p. 40)

[259] R. C. Swanson and R. Radespiel. Cell centered and cell vertex multigrid schemes for the Navier-Stokes equations. AIAA Journal, 29(5):697–703, 1991. (cité p. 44 et 45.)

[260] E. Süli. The accuracy of cell vertex finite volume methods on quadrilateral meshes. Mathematics of Computation, 59(200):359–382, 1992. (cité p. 45)

[261] H. Tang and G. Warnecke. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws and convection–diffusion equations with varying time and space grids. Journal of Computational Mathematics, 24:121–140, 2006. (cité p. 152)

[262] M. Thomas. Combustor-turbine interactions: Hot spot migration and thermal environment prediction for a better understanding and design of helicopter engines. PhD Thesis, Université de Toulouse, 2020. (cité p. 247 et 285.)

[263] M. Thomas, A. Dauptain, F. Duchaine, L. Gicquel, C. Koupper, and F. Nicoud. Comparison of heterogeneous and homogeneous coolant injection models for Large Eddy Simulation of multiperforated liners present in a combustion simulator. volume 2B: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2017. (cité p. 242)

[264] M. Thomas, J. Dombard, F. Duchaine, L. Gicquel, and C. Koupper. Large Eddy Simulation of combustor and complete single-stage high-pressure turbine of the FACTOR test rig. volume 2A: Turbomachinery of Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2019. (cité p. 28)

[265] K. W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. Journal of Computational Physics, 68(1):1–24, 1987. (cité p. 63)

[266] H. B. Toda, O. Cabrit, G. Balarac, S. Bose, J. Lee, H. Choi, and F. Nicoud. A subgrid-scale model based on singular values for LES in complex geometries. Proc. Summer Program, 2010. (cité p. 43 et 193.)

[267] A. Toumi, G. Dufour, R. Perrussel, and T. Unfer. Asynchronous numerical scheme for modeling hyperbolic systems. Comptes Rendus Mathematique, 353, 2015. (cité p. 152)

[268] A. Towne, O. T. Schmidt, and T. Colonius. Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis. Journal of Fluid Mechanics, 847:821–867, 2018. (cité p. 232, 237, 254, 258 et 259.)

[269] P. Tucker. Computation of unsteady turbomachinery flows: Part 2 - LES and hybrids. Progress in Aerospace Sciences, 47:546–569, 2011. (cité p. 199)

[270] J. C. Tyacke and P. G. Tucker. Future Use of Large Eddy Simulation in Aero-engines. Journal of Turbomachinery, 137(8), 2015. (cité p. 199)

[271] T. Unfer. An asynchronous framework for the simulation of the plasma/flow interaction. Journal of Computational Physics, 236:229 – 246, 2013. (cité p. 152)

[272] U.S. Federal Aviation Administration. Airplane flying handbook. 2004. (cité p. 16 et 291.)

[273] S. Vajjala and N. Singh. Solving Navier-Stokes equation for flow past cylinders using single-block structured and overset grids. Journal of Computational Physics, 229:178–199, 2010. (cité p. 64)

[274] E. Van der Weide. Compressible flow simulation on unstructured grids using multi-dimensional upwind schemes. PhD Thesis, Technische Univ., Delft (Netherlands), 1998. (cité p. 51)

[275] D. Van Zante, J.-P. Chen, M. Hathaway, and R. Chriss. The influence of compressor blade row interaction modeling on performance estimates from time-accurate, multi-stage, Navier-Stokes simulations. Journal of Turbomachinery, 130, 2008. (cité p. 25)

[276] J. Vanharen, G. Puigt, X. Vasseur, J.-F. Boussuge, and P. Sagaut. Revisiting the spectral analysis for high-order spectral discontinuous methods. Journal of Computational Physics, 337:379–402, 2017. (cité p. 62)

[277] R. Vichnevetsky and J. Bowles. Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982. (cité p. 72)

[278] T. Von Kármán. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Sonderdrucke aus den Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen : Mathematisch-physische Klasse. Weidmannsche Buchh., 1930. (cité p. 24)

[279] T. Von Kármán. Turbulence and skin friction. Journal of the Aeronautical Sciences, 1(1):1–20, 1934. (cité p. 194)

[280] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. Subgrid-modelling in LES of compressible flow. Flow, turbulence and combustion, 54(3):191–204, 1995. (cité p. 23)

[281] P. Walters. An Introduction to Ergodic Theory. Springer, 1982. (cité p. 234)

[282] G. Wang, F. Duchaine, D. Papadogiannis, I. Duran, S. Moreau, and L. Gicquel. An overset grid method for Large Eddy Simulation of turbomachinery stages. Journal of Computational Physics, 274:333–355, 2014. (cité p. 30, 64, 65 et 176.)

[283] H. Wang, S. Olson, R. Goldstein, and E. Eckert. Flow visualization in a linear turbine cascade of high performance turbine blades. Journal of Turbomachinery, 119(1):1–8, 1997. (cité p. 281)

[284] Z. Wang, K. Fidkowski, R. Abgrall, F. Bassi, D. Caraeni, A. Cary, H. Deconinck, R. Hartmann, K. Hillewaert, H. Huynh, N. Kroll, G. May, P.-O. Persson, B. van Leer, and M. Visbal. High-order CFD methods: current status and perspective. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 72(8):811–845, 2013. (cité p. 97)

[285] R. Warming and B. Hyett. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. Journal of Computational Physics, 14(2):159–179, 1974. (cité p. 73)

[286] A. J. Wathen. On relaxation of Jacobi iteration for consistent and generalized mass matrices. Communications in Applied Numerical Methods, 7(2):93–102, 1991. (cité p. 161)

[287] E. Weide, G. Kalitzin, J. Schluter, G. Medic, and J. Alonso. On large scale turbomachinery computations. 2005. (cité p. 28)

[288] P. Welch. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 15(2):70–73, 1967. (cité p. 234 et 237.)

[289] A. Wheeler, R. Sandberg, N. Sandham, R. Pichler, V. Michelassi, and G. Laskowski. Direct numerical simulations of a high pressure turbine vane. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2015. (cité p. 199)

[290] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. AIAA Journal, 26(11):1299–1310, 1988. (cité p. 23)

[291] J. Wissink. DNS of separating, low Reynolds number flow in a turbine cascade with incoming wakes. International Journal of Heat and Fluid Flow, 24(4):626–635, 2003. (cité p. 23)

[292] A. Wray. Minimal storage time-advancement schemes for spectral methods. 1991. (cité p. 14)

[293] H. Yee, N. Sandham, and M. Djomehri. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters. Journal of Computational Physics, 150(1):199 – 238, 1999. (cité p. 86 et 184.)

[294] C. S. Yoo, Y. Wang, A. Trouve, and H. Im. Characteristic boundary conditions for direct simulations of turbulent counterflow flames. Combustion Theory and Modelling, 9(4):617–646, 2005. (cité p. 63)

Annexes

Annexe A

Fermeture des termes de bords pour les schémas LW et TTG

Jusqu'à maintenant, l'ensemble des analyses numériques présentées dans ce manuscrit se sont intéressées à l'expression de différents schémas numériques dans un domaine périodique. Néanmoins, pour simuler des configurations réalistes, l'utilisation de conditions limites est une étape essentielle pour n'importe quel code de calcul qui n'est pas purement académique. Pour les schémas LW et de la famille TTG, cette annexe traite en particulier le terme de second ordre du développement de Taylor qui nécessite une fermeture non triviale.

A.1 Introduction

Pour expliciter la problématique de la fermeture des termes de bords, l'expression des équations de Navier-Stokes dans leur forme compact sans terme source est rappelée,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0, \tag{A.1}$$

où $\mathbf{U}$ correspond au vecteur contenant les grandeurs conservatives des équations de Navier-Stokes et $\vec{\mathcal{F}}$ est le tenseur des flux de $\mathbf{U}$.

Comme détaillé dans le Chapitre 2, pour les équations de Navier-Stokes, les flux peuvent être décomposés en deux parties. Une partie convective qui correspond aux flux des équations d'Euler qui ne dépendent que de $\mathbf{U}$ et une partie visqueuse propre aux équations de Navier-Stokes qui dépend de $\mathbf{U}$ et de ses gradients. Les flux peuvent ainsi s'écrire comme,

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}^C(\mathbf{U}) + \vec{\mathcal{F}}^V(\mathbf{U}, \vec{\nabla}\mathbf{U}). \tag{A.2}$$

A.2 Formulations existantes

Dans le Chapitre 2, il a été expliqué que le terme de second ordre $\mathbf{LL}_j$ est obtenu par Intégration Par Parties (IPP), tel que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{LL}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) &= \int_\Omega \phi_j \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_h\right)^n dV, \\
&= \oint_{\partial\Omega} \phi_j \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_h\right)^n \cdot \vec{n} dS - \int_\Omega \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_h\right)^n \cdot \vec{\nabla}\phi_j dV, \quad \text{(IPP)} \\
&= \mathbf{BT}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right) + \mathbf{LL}_j^0\left(\mathbf{U}_h^n\right).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Puisque le chapitre s'intéressait à un domaine périodique, le premier terme était simplement omis puisqu'il est nul pour ce type de configuration. Néanmoins, ce n'est pas le cas pour une condition limite quelconque et en particulier pour un mur.

Le terme $\mathbf{BT}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ étant un artéfact issu de la méthode numérique, il n'est pas possible d'utiliser une condition limite physique pour calculer $\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}_h\right)^n$ dans l'intégrale. Ainsi, pour fixer une valeur à ce terme, deux formulations ont été introduites dans AVBP [161],

- la formulation USOT (pour Uncancelled Second Order Term), qui fixe ce terme à 0, *i.e.* $\mathbf{BT}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)=0$,
- la formulation CSOT (pour Cancelled Second Order Term), qui considère que le terme $\mathbf{BT}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)$ annule la contribution de $\mathbf{LL}_j^0\left(\mathbf{U}_h^n\right)$, ce qui revient à fixer $\mathbf{BT}_j\left(\mathbf{U}_h^n\right)=-\mathbf{LL}_j^0\left(\mathbf{U}_h^n\right)$.

Cependant, les deux formulations précédentes ne sont pas parfaites et sous-entendent chacune des hypothèses. L'objectif de la section qui suit est de dériver une nouvelle expression du terme de second ordre aux bords, pour s'affranchir des deux formulations décrites.

A.3 Nouvelle formulation pour la fermeture des termes de bords

Dans la suite, K_e dénote une cellule du domaine Ω qui partage une seule face notée $\partial\Omega_{1,2}$ avec les bords du domaine $\partial\Omega$ ($\partial\Omega_{1,2}=K_e\cap\partial\Omega$). Les deux nœuds appartenant à $\partial\Omega_{1,2}$ sont notés k_1 et k_2.

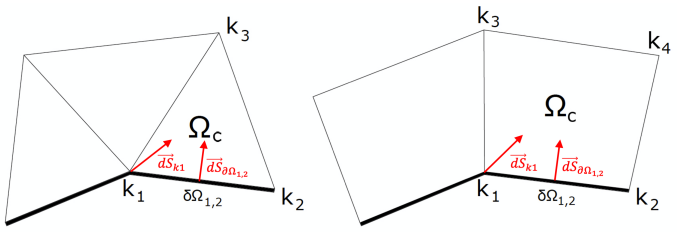


Figure A.1: Représentation de cellules triangulaires et quadrilatères situées sur un bord.

A.3.1 Cas des éléments linéaires (éléments $\mathbb{P}_1$)

Le résidu de K_e est défini par,

$$\mathbf{R}_{K_e}\approx\int_{K_e}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}dV. \tag{A.4}$$

De la même manière, la moyenne au sein de la cellule K_e de $\vec{\mathcal{A}}$, notée $\vec{\mathcal{A}}_{K_e}$, s'exprime comme,

$$\vec{\mathcal{A}}_{K_e}=\int_{K_e}\vec{\mathcal{A}}dV. \tag{A.5}$$

En considérant que $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{A}}$ sont constants au sein de la cellule K_e, la contribution du nœud k_1 au terme de second ordre de la cellule K_e notée $\mathbf{LL}_{k_1,K_e}$ s'écrit,

$$\begin{aligned}\mathbf{LL}_{k_1,K_e}&=\oint_{\partial\Omega\cap K_e}\phi_{k_1}\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}\right)\cdot\vec{n}dS-\int_{K_e}\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}\right)\cdot\vec{\nabla}\phi_{k_1}dV,\\&=\vec{\mathcal{A}}_{K_e}\cdot\mathbf{R}_{K_e}\cdot\oint_{\partial\Omega_{1,2}}\phi_{k_1}dS-\vec{\mathcal{A}}_{K_e}\cdot\mathbf{R}_{K_e}\cdot\int_{K_e}\vec{\nabla}\phi_{k_1}dV.\end{aligned} \tag{A.6}$$

L'intégrale volumique du second terme est remplacée par une intégrale surfacique,

$$\int_{K_e} \vec{\nabla}\phi_{k_1} dV = \oint_{\partial K_e} \phi_{k_1} dS. \tag{A.7}$$

En remplaçant l'intégrale volumique dans l'expression de $\mathbf{LL}_{k_1,K_e}$, l'expression suivante est obtenue,

$$\mathbf{LL}_{k_1,K_e} = \vec{\mathcal{A}}_{K_e} \cdot \mathbf{R}_{K_e} \cdot \left(\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1} dS - \oint_{\partial K_e} \phi_{k_1} dS \right). \tag{A.8}$$

La fonction de forme ϕ_{k_1} est définie comme valant 1 au nœud k_1 et 0 pour les deux $k \neq k_1$ (k_2 et k_3 pour le triangle représenté sur la Fig. A.1). Ce qui donne,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_e} \phi_{k_1} dS &= \oint_{\partial\Omega_{2,1}} \phi_{k_1} dS + \oint_{\partial\Omega_{1,3}} \phi_{k_1} dS, \\ &= \frac{1}{2}\left(y_{k_1} - y_{k_2}, x_{k_2} - x_{k_1}\right) + \frac{1}{2}\left(y_{k_3} - y_{k_1}, x_{k_1} - x_{k_3}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(y_{k_3} - y_{k_2}, x_{k_2} - x_{k_3}\right), \end{aligned} \tag{A.9}$$

et,

$$\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1} dS = \frac{1}{2}\left(y_{k_2} - y_{k_1}, x_{k_1} - x_{k_2}\right). \tag{A.10}$$

A l'aide de la Fig. A.1, les normales suivantes sont définies,

$$\begin{aligned} \vec{dS}_{k_1} &= \frac{1}{2}\left(y_{k_3} - y_{k_2}, x_{k_2} - x_{k_3}\right), \\ \vec{dS}_{\partial\Omega_{1,2}} &= \frac{1}{2}\left(y_{k_2} - y_{k_1}, x_{k_1} - x_{k_2}\right). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Au final, le terme de second ordre s'exprime comme,

$$\mathbf{LL}_{k_1,K_e} = -\vec{\mathcal{A}}_{K_e} \cdot \mathbf{R}_{K_e} \cdot \left(\vec{dS}_{k_1} - \vec{dS}_{\partial\Omega_{1,2}} \right). \tag{A.12}$$

Ainsi, le calcul du terme de second ordre complet $(\mathbf{BT}_j(\mathbf{U}_h^n) + \mathbf{LL}_j^0(\mathbf{U}_h^n))$ revient à modifier la normale du nœud k_1 au sein de l'élément K_e par la normale à la paroi $\vec{dS}_{\partial\Omega_{1,2}}$.

Dans la suite, cette formulation pour la fermeture des termes de bords est nommée BCSOT pour *Boundary Closed Second Order Term.*

A.3.2 Cas des éléments bilinéaires (éléments $\mathbb{Q}_1$)

Dans le cas des éléments bilinéaires, l'utilisation de ce précédent formalisme de fermeture des termes de bords ne peut pas simplement se faire par une modification de la normale de chaque nœud utilisée dans le terme de second ordre. Le point de départ reste toutefois le même que pour les éléments linéaires. Il consiste à transformer le terme de second ordre à l'aide d'une IPP, tel que,

$$\mathbf{LL}_{k_1,K_e} = \oint_{\partial\Omega\cap K_e} \phi_{k_1} \left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}\right)\cdot\vec{n}dS - \int_{K_e}\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}\right)\cdot\vec{\nabla}\phi_{k_1}dV. \tag{A.13}$$

À partir de cette étape, des différences apparaissent entre les éléments linéaires et bilinéaires. Le calcul du deuxième terme se fait par l'approximation introduite dans la Section 2.4.3. Dans cette section qui s'intéresse au traitement des termes de bords, c'est le premier terme qui est traité, c'est-à-dire le terme noté $\mathbf{\Gamma}_{k_1,K_e}$ dans la suite qui s'exprime comme,

$$\mathbf{\Gamma}_{k_1,K_e} = \oint_{\partial\Omega\cap K_e} \phi_{k_1}\left(\vec{\mathcal{A}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}\right)\cdot\vec{n}\,dS. \tag{A.14}$$

En supposant que $\vec{\mathcal{A}}$ est constante au sein de l'élément comme pour les éléments linéaires et en écrivant la divergence des flux à l'aide des fonctions de forme bilinéaires, l'équation précédente s'écrit,

$$\mathbf{\Gamma}_{k_1,K_e} = \oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\vec{\nabla}\phi_k\right)\cdot\vec{n}\,dS. \tag{A.15}$$

Avec les notations introduites dans le papier de Colin [57], le terme peut se reformuler comme,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{k_1,K_e} = &\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\overline{\vec{\nabla}\phi_k}\right)\cdot\vec{n}\,dS\\ &+\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\left(\vec{\nabla}\phi_k-\overline{\vec{\nabla}\phi_k}\right)\right)\cdot\vec{n}\,dS,\end{aligned} \tag{A.16}$$

avec,

$$\overline{\vec{\nabla}\phi_k} = \frac{1}{V_e}\int_{K_e}\vec{\nabla}\phi_k\,dV. \tag{A.17}$$

L'équation précédente est ensuite approximée par,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{k_1,K_e} = &\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\left(\vec{\nabla}\phi_k\right)_{FV}\right)\cdot\vec{n}\,dS\\ &+\oint_{\partial\tilde{\Omega}_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\overline{T}\left(\vec{\nabla}\phi_k\right)\right)\cdot\overline{P}\,\vec{n}\,dS\\ &-\oint_{\partial\tilde{\Omega}_{1,2}} \phi_{k_1}\vec{\mathcal{A}}\cdot\left(\sum_{k\in K_e}\vec{\mathcal{F}}_k\cdot\frac{\overline{T}}{I_c}\left(\int_{\tilde{\Omega}_C}\vec{\nabla}\phi_j d\tilde{V}\right)\right)\cdot\overline{P}\,\vec{n}\,dS.\end{aligned} \tag{A.18}$$

Les deux derniers termes sont intégrés sur l'élément de référence $\tilde{K}_e$ et $\partial\tilde{\Omega}_{1,2}$ correspond donc à la transformation de $\partial\Omega_{1,2}$ pour cet élément de référence. Comme dans [57], en notant R la transformation de l'élément de référence $\tilde{K}_e$ vers l'élément K_e,

$$\begin{aligned} R : \tilde{K}_e &\to K_e \\ \tilde{x} &\to x = \sum_{k \in K_e} x_k \phi_k(\tilde{x}), \end{aligned} \tag{A.19}$$

la matrice $P = \dfrac{\partial x}{\partial \tilde{x}}$ correspond à la Jacobienne de la transformation R et $T = |P|(P^T)^{-1}$.

Au final, l'Eq. (A.18) donne l'expression de la fermeture des termes de bords par le formalisme BCSOT pour les éléments bilinéaires. Les trois termes peuvent être calculés facilement à l'aide des matrices P et T déjà définies dans AVBP. À noter que sur un maillage régulier, le premier et le troisième termes s'annulent entre eux.

A.4 Validation de la formulation BCSOT

A.4.1 Onde acoustique linéaire

Le premier cas test utilisé pour quantifier la précision des formulations permettant la fermeture des termes de bords est un cas fictif. Il se base sur les travaux de Porta [212]. La configuration s'intéresse à un domaine rectangulaire de dimensions $L_x = 0.01$ m et $L_y = 0.025$ m dont le maillage est composé de triangles ou de quadrilatères réguliers ou perturbés (les quatre cas seront testés comme le montre la Fig. A.2). Les conditions limites sont définies comme périodiques en haut et en bas, et par des murs en $x = 0$ et $x = 0.01$ m. Au sein de ce domaine est initialisée une onde acoustique linéaire à pression constante dont le profil est donné par la Fig. A.3. Dans ce cas particulier d'une onde acoustique linéaire, l'expression des ondes entrantes et sortantes du domaine peut être facilement obtenue, en particulier par la relation suivante,

$$\mathcal{L}_- = \lambda_- \left(\frac{\partial P}{\partial n} - \rho a_0 \frac{\partial u}{\partial n} \right), \tag{A.20}$$

qui représente l'amplitude de l'onde acoustique sortante, comme expliqué dans [209]. Dans l'expression précédente, $\dfrac{\partial P}{\partial n}$ correspond au gradient de pression dans la direction normale à la paroi, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ au gradient de vitesse dans la direction normale à la paroi, ρ à la masse volumique, a_0 à la vitesse du son et $\lambda_- = u - a_0$ à la vitesse de l'onde acoustique sortante.

Étant donné que le profil de pression est constant dans le domaine, ce terme est nul dans l'Eq. (A.20). Par ailleurs, comme le profil de vitesse est linéaire, le terme $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ se remplace simplement par la pente du profil, soit $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 1$. Ainsi, l'Eq. (A.20) peut s'écrire pour ce cas particulier,

$$\mathcal{L}_- = \rho a_0^2. \tag{A.21}$$

Avec les notations de [20], l'intensité de l'onde sortante est calculée par,

$$\text{strength} = \frac{\mathcal{L}_- \Delta t}{\rho a_0} = a_0 \Delta t, \tag{A.22}$$

dont la valeur peut être obtenue analytiquement.

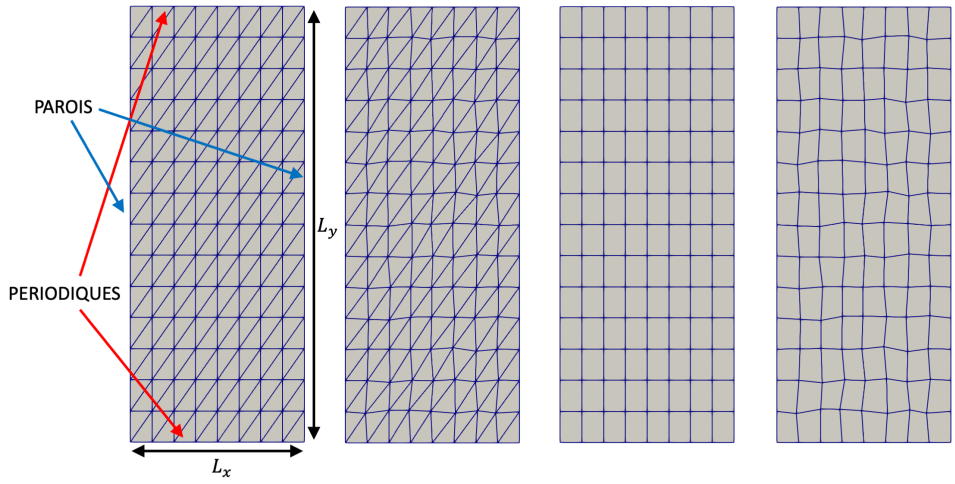
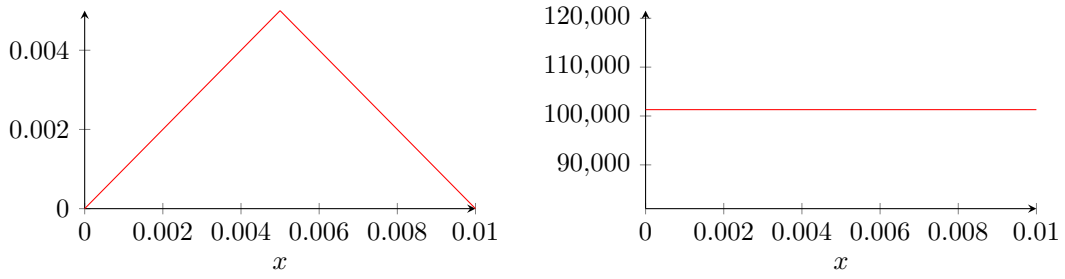


Figure A.2: Maillages utilisés pour le cas de l'onde acoustique linéaire. De gauche à droite, des triangles réguliers, des triangles perturbés, des quadrilatères réguliers et des quadrilatères perturbés.



(a) Profil de vitesse [m/s].

(b) Profil de pression [Pa].

Figure A.3: Profil 1D de la solution initiale de l'onde acoustique linéaire.

L'intensité de l'onde sortante après une itération est comparée pour les quatre maillages de la Fig. A.2 et pour les schémas LW et TTGC. Pour TTGC, lorsque le maillage contient des quadrilatères, le formalisme BCSOT adapté aux éléments bilinéaires est utilisé. Les erreurs relatives des différents cas par rapport à la solution analytique obtenue à partir de l'Eq. (A.22) sont données dans la Table A.1. Comme expliqué par Porta [212] et Lamarque [162], le formalisme CSOT donne un résultat exact quand le profil est linéaire (à la précision machine près). Malheureusement, dans le cas général, ce n'est pas le cas et c'est pourquoi le formalisme BCSOT a été introduit. À l'inverse, le formalisme CSOT est incapable de donner la bonne valeur d'intensité quel que soit le maillage utilisé. Enfin, le formalisme BCSOT est lui aussi exact pour tous les maillages à l'exception du maillage avec des quadrilatères perturbés (comme pour le formalisme CSOT). Le fait que TTGC ne donne pas un résultat exact sur un maillage composé de quadrilatères perturbés s'explique par l'approximation faite dans le cas des éléments bilinéaires. En effet, comme expliqué dans le Chapitre 2, les intégrales des termes de premier ordre et second ordre ne sont pas calculées exactement pour les éléments bilinéaires (par exactement, comprendre par l'intégrale des fonctions de forme). Ces intégrales sont approximées en ajoutant un terme de correction pour prendre en compte le caractère bilinéaire de l'élément au terme classique obtenu pour un élément linéaire. Or, cette approximation est exacte dans le cas d'un maillage régulier, mais elle introduit une erreur lorsque le maillage devient irrégulier. Ainsi, l'erreur observée sur l'intensité de l'onde sortante n'est pas causée par le formalisme choisi pour la fermeture des termes de bords, mais par l'approximation faite sur les intégrales dans le cas des éléments bilinéaires.

	LW			TTGC		
	CSOT	USOT	BCSOT	CSOT	USOT	BCSOT
Triangles réguliers	$1.9536 \cdot 10^{-6}$	$5.1375 \cdot 10^{-1}$	$1.9536 \cdot 10^{-6}$	$9.9307 \cdot 10^{-7}$	$1.0924 \cdot 10^{-1}$	$9.9307 \cdot 10^{-7}$
Triangles perturbés	$1.9409 \cdot 10^{-6}$	$5.1700 \cdot 10^{-1}$	$1.9409 \cdot 10^{-6}$	$1.0003 \cdot 10^{-6}$	$1.1161 \cdot 10^{-1}$	$1.0003 \cdot 10^{-6}$
Quadrilatères réguliers	$2.0223 \cdot 10^{-6}$	$5.1378 \cdot 10^{-1}$	$2.0223 \cdot 10^{-6}$	$1.0183 \cdot 10^{-6}$	$1.0924 \cdot 10^{-1}$	$1.0183 \cdot 10^{-6}$
Quadrilatères perturbés	$2.0017 \cdot 10^{-6}$	$5.1825 \cdot 10^{-1}$	$2.0017 \cdot 10^{-6}$	$1.2153 \cdot 10^{-3}$	$1.1080 \cdot 10^{-1}$	$1.1798 \cdot 10^{-3}$

Table A.1: Erreurs relatives sur l'intensité de l'onde sortante pour les différents cas par rapport à la valeur analytique donnée par l'Eq. (A.22). Les valeurs en vert correspondent à une erreur proche de la précision machine, en orange à une erreur inférieure à 1 % et en rouge supérieure à 1 %.

Expérience numérique dans le cas de flux linéaires

Pour illustrer le fait que l'approximation sur l'intégrale des éléments bilinéaires introduit une erreur seulement sur maillages perturbés composé de quadrilatères, une petite expérience numérique est présentée dans la suite. Ce cas fictif consiste à imposer une expression des flux linéaires dans l'ensemble du domaine. L'expression choisie des flux s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ \mathcal{F}_y &= a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \tag{A.23}$$

avec x et y les coordonnées d'un nœud du domaine et a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 des constantes réelles quelconques. Dans ce cas, après une itération, le résidu obtenu par le schéma numérique doit être exactement égal à,

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} = a_1 + b_2. \tag{A.24}$$

En pratique, l'expression précédente permet de comparer les résultats du schéma à la solution analytique pour estimer l'erreur sur l'ensemble du domaine. Dans le cas de TTGC, les erreurs obtenues sont présentées dans la Table A.2. Il est donc clair que le schéma est exact seulement pour les éléments linéaires et pour les éléments bilinéaires réguliers (à la précision machine). Alors que pour des éléments bilinéaires perturbés, l'approximation faite lors du calcul des intégrales introduit une erreur et le schéma n'est plus exact.

	Triangles	Quadrilatères
Réguliers	$6.1804 \cdot 10^{-23}$	$1.1937 \cdot 10^{-22}$
Perturbés	$1.1002 \cdot 10^{-22}$	399.8388

Table A.2: Valeurs de l'erreur obtenues pour TTGC pour différents maillages avec des flux linéaires.

A.4.2 Cavité résonante monodimensionnelle

Le deuxième cas de validation correspond à la cavité acoustique résonante et monodimensionnelle présentée dans la thèse de Lamarque [161]. Ce cas consiste à initialiser un champ de vitesse sinusoïdal et à étudier l'évolution temporelle du premier mode acoustique (demi-onde) de la cavité au niveau d'un point de mesure. Le problème est illustré par la Fig. A.4. Les parties gauche et droite correspondent à des parois.

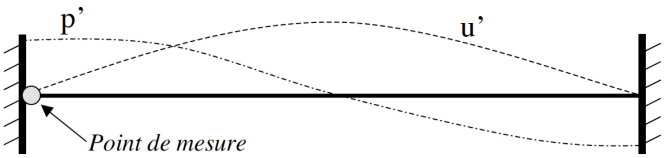
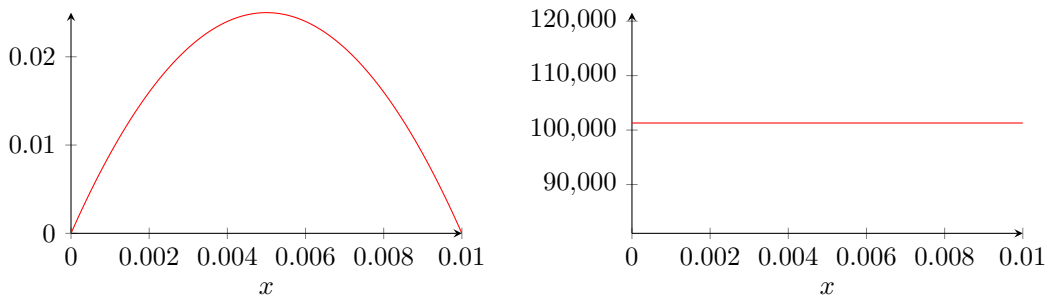


Figure A.4: Illustration du problème de la cavité acoustique monodimensionnelle [161].

Le champ de vitesse initial s'exprime comme,

$$u(x) = \frac{p'}{\rho a_0} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \tag{A.25}$$

avec $p' = 10$ Pa la fluctuation de pression équivalente, ρ la masse volumique, a_0 la vitesse du son et l la longueur de la cavité. La pression initiale dans le domaine est constante et égale à 101 300 Pa. Les champs de vitesse et de pression initiaux sont représentés sur la Fig. A.5.

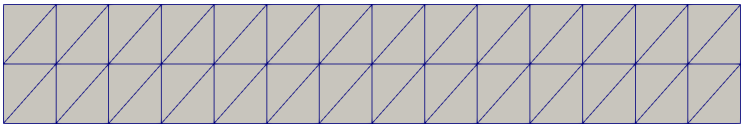


(a) Profil de vitesse [m/s].

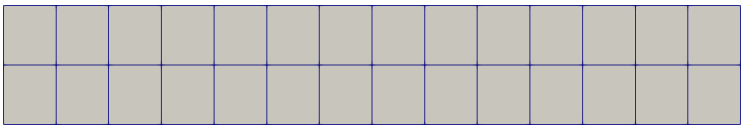
(b) Profil de pression [Pa].

Figure A.5: Profil 1D de la solution initiale de la cavité résonante.

Dans la suite, l'objectif est d'étudier l'influence du schéma et surtout du choix du formalisme pour la fermeture des termes de bords sur l'évolution temporelle de l'onde acoustique dans la cavité. Idéalement, l'onde acoustique devrait osciller en conservant la même amplitude, sans être modifiée par le schéma ou la condition limite. En comparant l'amplitude de l'onde acoustique initiale à la valeur en fin de simulation, il est donc possible d'estimer l'amplification ou la dissipation de l'onde. Cette estimation sera faite pour deux maillages avec des types d'éléments différents, l'un avec des triangles, l'autre avec des quadrilatères (Fig. A.6) et pour deux types de conditions limites, une condition de Dirichlet classique et une condition NSCBC.



(a) Maillage composé de triangles.



(b) Maillage composé de quadrilatères.

Figure A.6: Maillages utilisés pour le cas de la cavité résonante.

Les figures qui suivent présentent l'évolution du signal de pression au point de mesure indiqué sur la Fig. A.4. La Table A.3 donne les valeurs obtenues pour le coefficient d'amplification du signal de pression des différents cas. Le coefficient d'amplification G_a est défini à l'aide de la pression maximale de la première période $P_{0,\max}$ (à l'initialisation) et la pression maximale de la dernière période $P_{\mathrm{f},\max}$, à la fin de la simulation au temps T,

$$G_a = \frac{\log\left(P_{\mathrm{f},\max}/P_{0,\max}\right)}{T}, \tag{A.26}$$

avec T le temps total de la simulation.

Première observation, quel que soit le schéma et quel que soit le formalisme de fermeture, les résultats obtenus avec les conditions caractéristiques sont plus dissipés qu'avec les conditions de Dirichlet. Cette différence de dissipation est expliquée dans [161] et provient du traitement des dérivées aux bords. Pour les conditions caractéristiques, un nombre plus important d'approximations d'ordre faible intervient dans le calcul puisque la vitesse est elle aussi traitée de manière caractéristique, ce qui n'est pas le cas pour les conditions de Dirichlet. De plus, comme observé dans [161], le couple CSOT/Dirichlet est instable et ne peut pas être utilisé pour réaliser une simulation numérique.

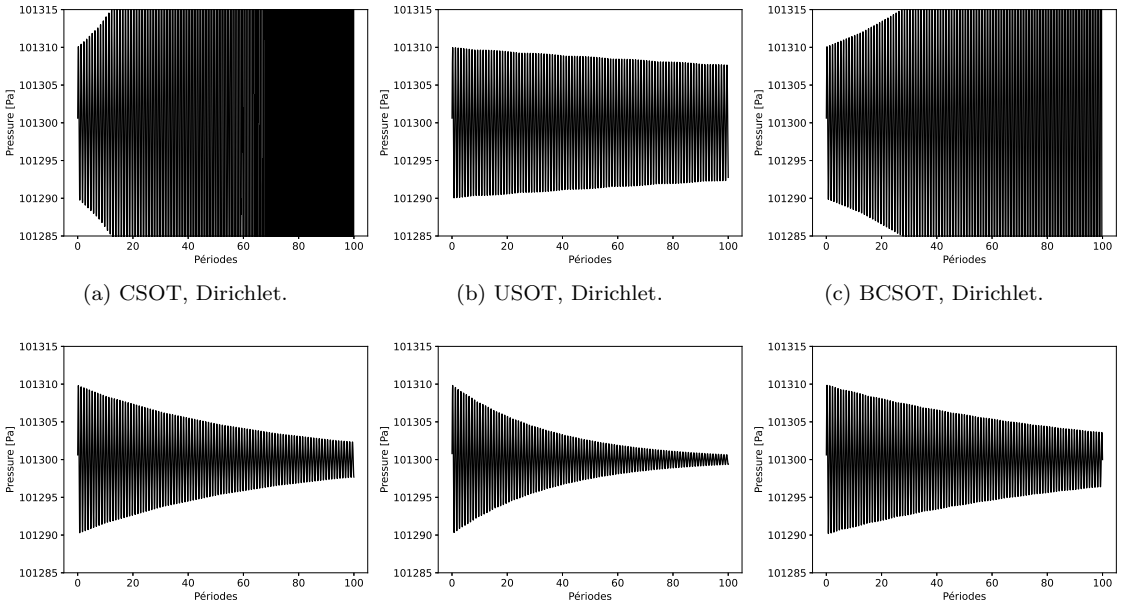
Par ailleurs, alors qu'il a été montré que le schéma TTGC était largement moins dissipatif que LW, la dissipation de TTGC est ici plus importante pour les cas avec maillages triangulaires où les informations aux parois sont imposées par des conditions limites caractéristiques. Il n'est pas étonnant d'obtenir ce résultat car le schéma TTGC est défini en deux étapes et les conditions limites sont appliquées aux deux étapes. Le nombre d'approximations d'ordre faible est donc deux fois plus important que pour le schéma LW à une étape, d'où la dissipation plus importante [161].

Enfin, en ce qui concerne le formalisme BCSOT qui fait l'objet de cette section, ses propriétés semblent assez intéressantes. Dans le cas des conditions de Dirichlet, même si les résultats de l'onde acoustique linéaire ont montré que BCSOT se comportait comme CSOT, BCSOT n'est pas instable avec ce type de conditions limites (à l'exception de LW sur maillage triangulaire). Pour les conditions NSCBC, BCSOT a aussi l'avantage de réduire le niveau de dissipation par rapport à CSOT.

À noter qu'une analyse similaire à celle décrite dans [161] pourrait être menée pour le nouveau formalisme BCSOT pour déterminer analytiquement sa stabilité. L'analyse consiste dans ce cas à exprimer le schéma sous forme matricielle et d'y inclure la modélisation choisie pour les parois. Cette approche s'apparente à celle présentée dans le Chapitre 4 où elle a été réalisée dans le cas d'un domaine périodique. L'ajout de l'effet du traitement des CL ne pose toutefois pas de difficultés particulières.

		LW			TTGC		
		CSOT	USOT	BCSOT	CSOT	USOT	BCSOT
Dirichlet	Triangles	1134.55	-46.19	250.21	10.73	-11.25	-1.27
	Quadrilatères	255.89	-37.75	-39.56	7.02	-8.51	-8.75
NSCBC	Triangles	-252.99	-481.66	-176.18	-448.01	-462.97	-398.29
	Quadrilatères	-428.30	-426.99	-381.79	-414.12	-404.55	-404.62

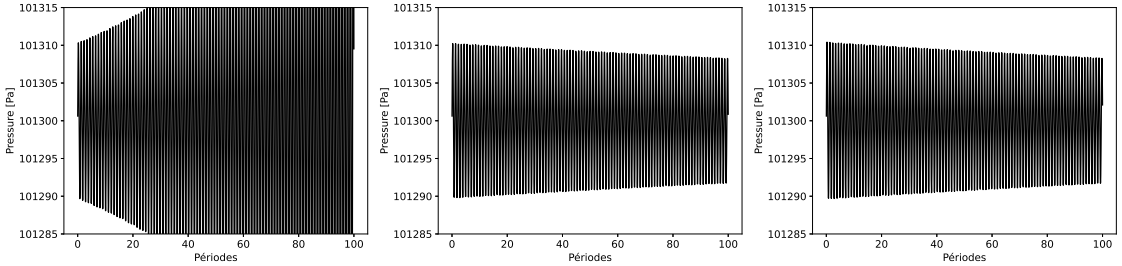
Table A.3: Coefficient d'amplification G_a [s^{-1}] de l'onde acoustique dans la cavité résonante.



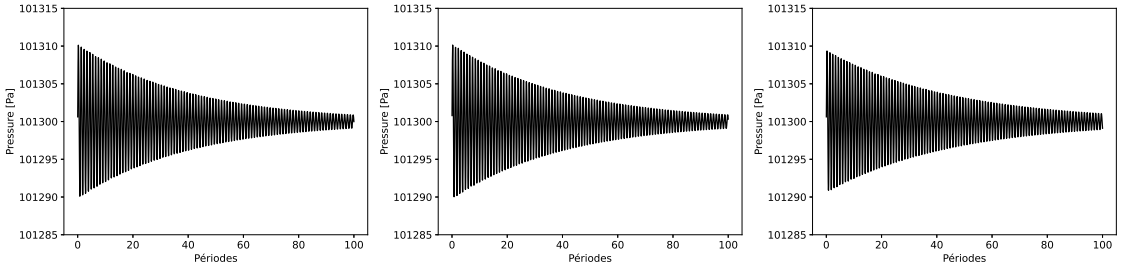
(a) CSOT, Dirichlet. (b) USOT, Dirichlet. (c) BCSOT, Dirichlet.

(d) CSOT, NSCBC. (e) USOT, NSCBC. (f) BCSOT, NSCBC.

Figure A.7: Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma LW et pour un maillage composé de triangles.

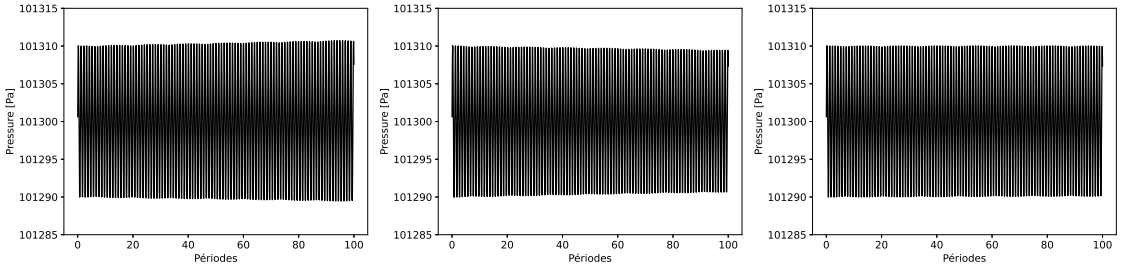


(a) CSOT, Dirichlet. (b) USOT, Dirichlet. (c) BCSOT, Dirichlet.

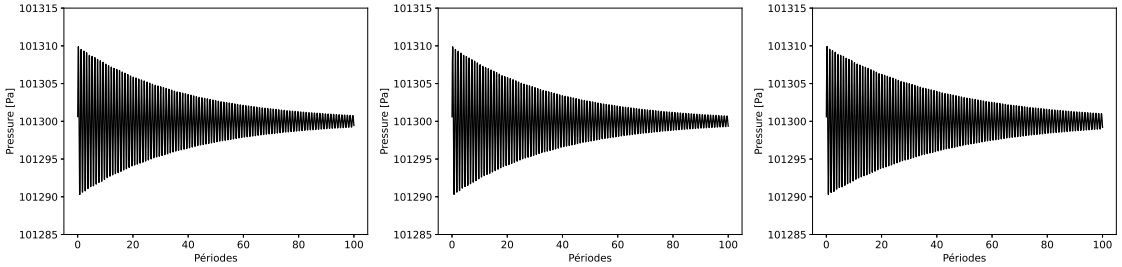


(d) CSOT, NSCBC. (e) USOT, NSCBC. (f) BCSOT, NSCBC.

Figure A.8: Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma LW et pour un maillage composé de quadrilatères.

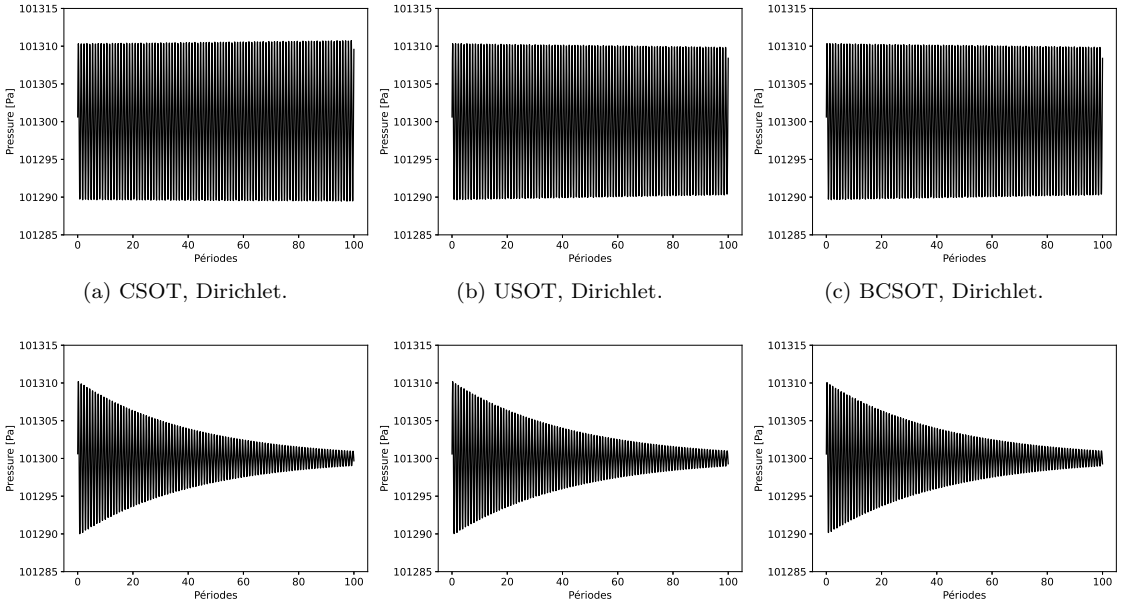


(a) CSOT, Dirichlet. (b) USOT, Dirichlet. (c) BCSOT, Dirichlet.



(d) CSOT, NSCBC. (e) USOT, NSCBC. (f) BCSOT, NSCBC.

Figure A.9: Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma TTGC et pour un maillage composé de triangles.



(a) CSOT, Dirichlet. (b) USOT, Dirichlet. (c) BCSOT, Dirichlet.

(d) CSOT, NSCBC. (e) USOT, NSCBC. (f) BCSOT, NSCBC.

Figure A.10: Variation temporelle de la pression dans la cavité résonante pour le schéma TTGC et pour un maillage composé de quadrilatères.

A.5 Conclusion

En conclusion, étant donné que la majorité des cas étudiés dans le manuscrit s'était intéressée à des domaines périodiques, cette annexe a brièvement abordé la question des conditions limites. À cause du terme de second ordre présent dans l'expression du schéma LW et de ceux de la famille TTGC, un terme supplémentaire apparaît aux bords et ne peut être déterminé sans modélisation. Pour calculer ce terme, un nouveau formalisme a été introduit qui semble mathématiquement plus juste que les deux formalismes existants. Ce nouveau formalisme a répondu aux attentes sur les deux cas tests présentés.

À noter ces travaux sur les termes de bords soulèvent une question plus large sur le traitement des conditions limites. Dans l'état actuel, les conditions limites sont imposées en écrasant la valeur du résidu provenant du schéma par la valeur calculée par la condition limite. Mais il est tout à fait possible de considérer une autre façon de faire. En effet, l'application des conditions limites pourrait être incluse directement dans le schéma lors du calcul des résidus aux nœuds. Ce point nécessite de nombreux changements dans les routines de conditions limites existantes mais peut potentiellement être une façon plus "propre" d'appliquer les conditions limites et mérite d'être étudié dans le futur.

Annexe B

Compléments de résultats au Chapitre 3

B.1 Amélioration des schémas existants

B.1.1 Effets de la viscosité artificielle

Une des solutions les plus simples consiste à utiliser le mécanisme de viscosité artificielle introduit dans la Section 2.4.5, déjà présent dans AVBP pour stabiliser les simulations numériques. Les observations présentées dans le Chapitre 3 ont par exemple mis en évidence l'apparition d'oscillations nœud à nœud sur maillages perturbés pour le schéma TTGC(0.01). Une solution envisageable est donc d'utiliser les deux opérateurs de viscosité artificielle pour atténuer ces oscillations et ainsi retrouver l'ordre de précision du schéma obtenu sur maillages réguliers.

Le cas test du vortex isentropique a l'avantage d'être assez simple à mettre en place puisqu'il est 2D et il permet également de déterminer facilement l'ordre de convergence d'un schéma. La Section 3.2 a aussi clairement mis en évidence l'apparition de *wiggles* pour TTGC(0.01) sur ce cas test, ce qui en fait un bon candidat pour déterminer l'effet de la viscosité artificielle sur l'ordre de convergence de ce schéma. Les effets de la viscosité de deuxième et quatrième ordre sont analysés de manière indépendante avec les modèles de Jameson et de Colin dans les deux cas.

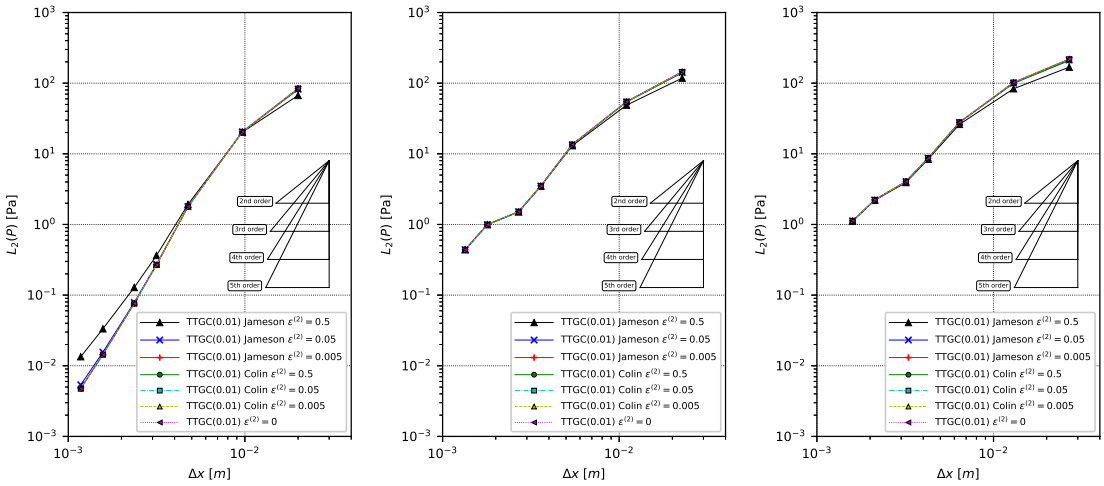
La Figure B.1 met en évidence l'effet de la viscosité de deuxième ordre pour les deux modèles de viscosité et pour trois intensités différentes, $\epsilon^{(2)} = 0.005$, $\epsilon^{(2)} = 0.05$ et $\epsilon^{(2)} = 0.5$. Pour tous les cas, la viscosité de quatrième ordre est fixée à 0, *i.e.* $\epsilon^{(4)} = 0$. Le cas de référence $\epsilon^{(2)} = 0$ correspond au cas sans viscosité artificielle de deuxième ordre. Pour les cas avec maillages perturbés, il est clair que l'utilisation de viscosité artificielle de deuxième ordre ne permet pas de réduire l'impact de la perturbation du maillage sur l'ordre de convergence du schéma TTGC(0.01).

La Figure B.2 présente de manière similaire l'effet de la viscosité de quatrième ordre avec une valeur de viscosité de deuxième ordre nulle, pour trois intensités différentes, $\epsilon^{(4)} = 0.005$, $\epsilon^{(4)} = 0.05$ et $\epsilon^{(4)} = 0.5$ et pour les deux modèles de viscosité. L'effet est plus marqué pour ce type de viscosité. Cela s'explique par la nature de la viscosité artificielle de quatrième ordre. Pour les maillages perturbés, dans le cas du maillage TTGC(0.01), la dégradation de l'ordre de convergence du schéma est principalement liée à l'apparition d'oscillations en damiers sur l'ensemble du maillage. Or, la viscosité de quatrième est justement construite pour dissiper les oscillations nœud à nœud.

Pour la valeur de viscosité la plus faible, $\epsilon^{(4)} = 0.005$, et pour les deux modèles, l'erreur sur la pression est légèrement réduite sur maillages perturbés par rapport au cas sans viscosité artificielle. Néanmoins, l'ordre global de convergence n'est pas modifié et le schéma TTGC(0.01) reste très sensible à la qualité du maillage malgré l'utilisation de viscosité de quatrième ordre.

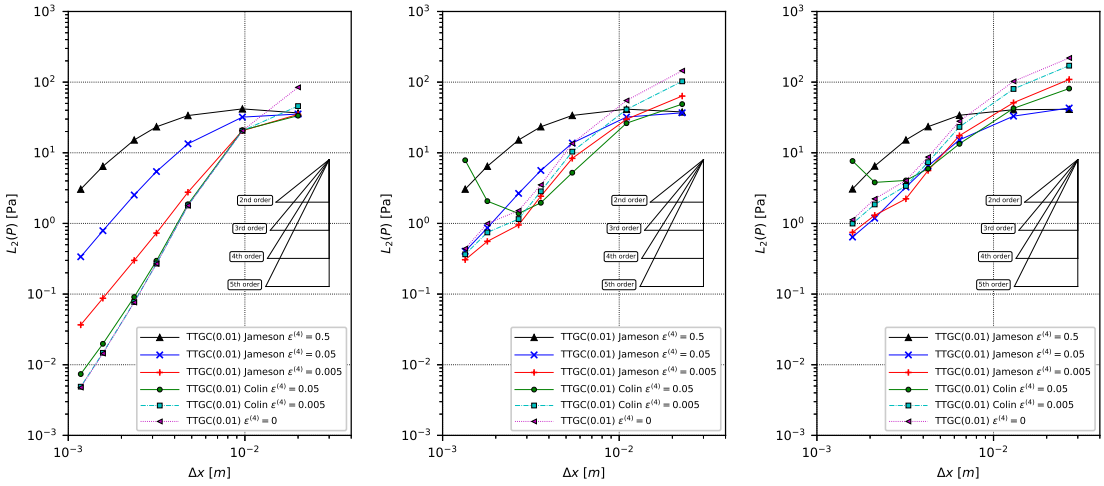
À noter que le cas $\epsilon^{(4)} = 0.05$ avec le modèle de Colin est instable pour les maillages irréguliers et diverge progressivement lorsque le raffinement du maillage augmente. Le cas $\epsilon^{(4)} = 0.5$ est instable pour tous les Δx et pour tous les niveaux de perturbations. Ce comportement s'explique par les

limites de stabilité des opérateurs de viscosité. Au delà d'une certaine valeur, la viscosité produit un effet inverse (de déstabilisation) et fait diverger le calcul. Cette mise en garde est rappelée dans la thèse de Lamarque [161] dans laquelle sont mentionnées les limites à ne pas dépasser dans un cas régulier. La viscosité artificielle peut rendre un calcul instable, en particulier l'hyperviscosité comme observé ici.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0.$ (b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2.$ (c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5.$

Figure B.1: Effet de la viscosité d'ordre 2.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0.$ (b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2.$ (c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5.$

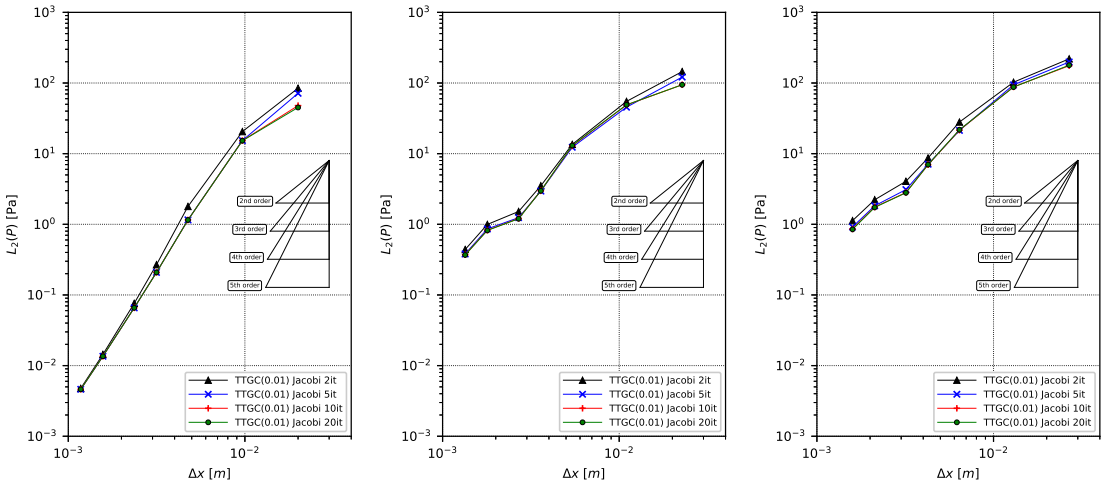
Figure B.2: Effet de la viscosité d'ordre 4.

B.1.2 Effets du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi

Une autre piste possible pour réduire la dégradation de l'ordre de convergence sur maillages perturbés est le nombre d'itérations de la méthode de Jacobi utilisée pour l'inversion de la matrice de masse. Historiquement, le papier de Colin [57] a conclu que seulement deux itérations donnaient un bon compromis entre le coût de calcul et la précision de l'approximation de l'inverse de la matrice de masse. Toutefois, comme toute approximation, l'utilisation de la méthode de Jacobi pour inverser la matrice de masse introduit une erreur par rapport à l'inversion exacte, en particulier si

seulement deux itérations sont utilisées. Une question légitime qui pose est donc de savoir si ce choix fait sur le nombre d'itérations accroît la sensibilité au maillage du schéma TTGC(0.01).

La comparaison qui va suivre permet de quantifier les apports de l'augmentation du nombre d'itérations en termes d'ordre de convergence sur maillages réguliers et perturbés sur le cas test de la convection d'un vortex isentropique. La Figure B.3 présente l'évolution de l'ordre de convergence pour les trois niveaux de perturbations de maillage déjà étudiés. Quatre nombres d'itérations sont testés : 2, la valeur standard utilisée dans le code AVBP, 5, 10 et 20. Clairement, l'augmentation du nombre d'itérations ne permet pas de corriger l'erreur introduite sur maillages perturbés. Une légère réduction de l'erreur est observée en passant de 2 à 5 itérations, mais augmenter davantage le nombre d'itérations n'a quasiment aucun effet (cela augmente cependant le coût du schéma [161]). Au final, le nombre d'itérations de la méthode de Jacobi n'est pas le bon levier pour réduire la sensibilité au maillage de TTGC(0.01) et d'autres pistes doivent donc être explorées.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0$. (b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2$. (c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5$.

Figure B.3: Effet du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi.

Les deux idées précédentes ont cherché à utiliser des leviers déjà existants dans AVBP pour tenter de résoudre les problèmes de sensibilité au maillage des schémas numériques, en particulier très visibles pour TTGC(0.01). Néanmoins, les expérimentions se sont révélées inefficaces pour diminuer cette sensibilité. Les deux sous-sections qui suivent présentent des pistes purement numériques pour aborder ce problème, en travaillant directement sur les coefficients des schémas TTG.

B.1.3 Optimisation sur les coefficients des schémas

Historiquement, lors du développement des schémas TTG4A et TTGC(0.01), leurs coefficients respectifs ont été choisis pour des raisons particulières. Dans le but d'améliorer ces schémas, une des pistes possible est de changer la logique initiale et de chercher à optimiser les coefficients des schémas de la famille TTG sur la base d'autres critères.

En terme d'optimisation, la stratégie est la même que celle décrite dans les thèses de Duchaine [85] et Lamarque [161], *i.e.* rechercher des valeurs optimales des paramètres (α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2), tout en respectant certaines contraintes spécifiées par l'utilisateur.

Dans le cadre proposé, un schéma optimal pour plusieurs fonctions objectifs est visé et il est donc nécessaire de mener une optimisation multi-objectifs. Or, dans le cas général, l'optimum de chaque fonction objectif n'est pas commun, mais correspond plutôt à un ensemble de points qui se nomme front de Pareto [203]. Le front de Pareto est composé des points non dominés de l'espace des paramètres, c'est-à-dire les points qui donnent le meilleur équilibre entre les

différentes fonctions objectifs. Pour ce type d'optimisation multi-objectifs dont le but est de déterminer efficacement le front de Pareto du problème, les algorithmes génétiques ont montré des performances intéressantes [53]. Les algorithmes génétiques s'inspirent de l'évolution naturelle d'une population soumise à son environnement. Ainsi, la population d'une génération suivante sera composée d'individus mieux adaptés à leur environnement. Dans le cas d'une optimisation multi-objectifs, cela correspond à des cas avec des meilleures performances en termes de fonctions objectifs. Pour permettre cette sélection, trois critères sont en général présents dans un algorithme génétique :

- le croisement entre individus pour favoriser la génération de nouveaux individus mieux adaptés à l'environnement à partir d'individus performants,
- la mutation des caractéristiques des individus pour explorer l'ensemble du champ des paramètres et donc trouver des optima globaux,
- et l'élitisme qui permet de conserver seulement les individus les plus adaptés à l'environnement pour les générations futures.

Dans le cadre de cette étude, comme pour les travaux de Duchaine [85] et Lamarque [161], c'est le code NSGA-II (*Non Dominated Shorting Genetic Algorithm version 2*) [72] qui est utilisé. Il répond aux exigences décrites précédemment pour un algorithme génétique. Autre propriété intéressante, il donne aussi la possibilité de spécifier des contraintes d'égalité ou d'inégalité, en plus des fonctions objectifs.

Comme déjà décrit, les schémas de la famille TTG s'expriment en deux étapes,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j^n &= U_j^n - M^{-1}\left(\alpha\nu\Delta_0 U_j^n - \beta\nu^2\delta^2 U_j^n\right), \\ U_j^{n+1} &= U_j^n - M^{-1}\left(\nu\left(\theta_1\Delta_0 U_j^n + \theta_2\Delta_0\tilde{U}_j^n\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\delta^2 U_j^n + \epsilon_2\delta^2\tilde{U}_j^n\right)\right). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Grâce à une analyse spectrale, le coefficient d'amplification de ce type de schémas s'exprime alors par,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(\xi) =& 1 - \left(i\alpha\nu\sin(\xi) + 4\beta\nu^2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{-1}, \\ G_{\mathrm{TTG}}(\xi) =& 1 - \Bigg[i\nu\left(\theta_1\sin(\xi) + \theta_2\sin(\xi)\tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(\xi)\right) \\ & + 4\nu^2\left(\epsilon_1\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \epsilon_2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\tilde{G}_{\mathrm{TTG}}(\xi)\right)\Bigg] \\ & \times\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

À partir de ce coefficient d'amplification, il est donc possible d'obtenir les propriétés de dissipation et de dispersion de chaque schéma. Et, c'est justement ces propriétés qui seront utilisées pour définir les fonctions objectifs de l'algorithme génétique. En particulier, l'idée est de :

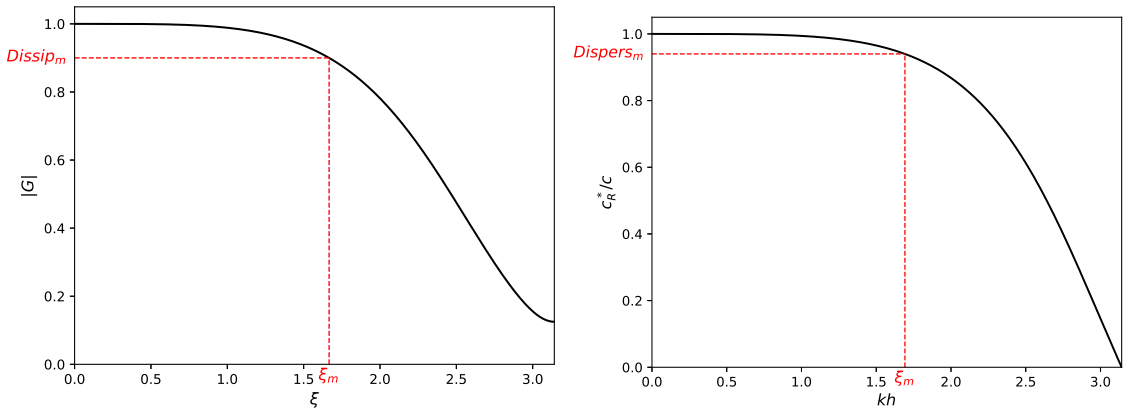
- Maximiser la plage de nombres d'onde ξ pour laquelle la dissipation est comprise entre $[Dissip_m, 1]$, avec $Dissip_m$ une dissipation minimale choisie avant l'optimisation. Cette fonction objectif a pour but de s'assurer que le schéma reste peu dissipatif sur la plage de fréquences la plus large possible.

- Maximiser la plage de nombres d'onde ξ pour laquelle la dispersion est comprise entre $[Dispers_m, 1]$, avec $Dispers_m$ une dispersion minimale choisie avant l'optimisation. De la même manière que pour la dissipation, cette fonction objectif remplit la même mission pour la dispersion.

Les fonctions objectifs sont en pratique définies sous la forme :

- $(\pi - \xi_m)_{\text{Dissip}}$ où ξ_m est le nombre d'onde adimensionné au delà duquel la dissipation est inférieure à la dissipation $Dissip_m$ (Fig. B.4a),
- $(\pi - \xi_m)_{\text{Dispers}}$ où ξ_m est le nombre d'onde adimensionné au delà duquel la dispersion est inférieure à la dispersion $Dispers_m$ (Fig. B.4b).

Pour la suite de l'étude, les valeurs suivantes sont utilisées : $Dissip_m = 0.995$ et $Dispers_m = 0.98$.



(a) Dissipation. (b) Dispersion.

Figure B.4: Détermination des nombres d'onde ξ_m correspondant à $Dissip_m$ et $Dispers_m$.

Le problème se caractérise donc par deux fonctions objectifs et un ensemble de six paramètres à optimiser. À noter que ces paramètres ne sont pas indépendants pour garantir un ordre temporel donné (voir Chapitre 3). Un ordre 3 en temps ajoute par exemple trois contraintes sur les coefficients données par le système (3.13), laissant donc trois paramètres à optimiser.

Il est aussi important de remarquer que les propriétés de dissipation et de dispersion des schémas varient largement avec le CFL. Ainsi, pour s'assurer que le comportement du schéma est optimal sur une large plage de CFL, les fonctions objectifs sont en pratique définies par la moyenne des fonctions objectifs décrites pour 9 valeurs de CFL allant de $\nu = 0.1$ à $\nu = 0.9$,

$$\min \begin{cases} \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{\nu} (\pi - \xi_m^{\nu})_{\text{dissip}}\,, \\ \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{\nu} (\pi - \xi_m^{\nu})_{\text{dispers}}\,, \\ \xi \in [0; \pi], \\ \nu \in [0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9]. \end{cases} \tag{B.3}$$

Par ailleurs, pour garantir la stabilité du schéma sur l'ensemble de la plage de fréquences, la valeur du module du coefficient d'amplification doit être strictement inférieure à 1 sur l'ensemble de la plage de fréquences. Plusieurs scénarios et schémas peuvent être ciblés à partir de ces fonctions objectifs et d'un ensemble de contraintes. Seul un panel réduit de possibilités est détaillé dans la suite.

Optimisation 1 : réduction du niveau de dissipation de TTG4A sans coefficients nuls

Le début du Chapitre 3 a montré que le schéma TTG4A était d'ordre 3 en espace et en temps et était peu sensible à la qualité du maillage. Néanmoins, cette faible sensibilité au maillage est liée à un niveau élevé de dissipation, qui complique son utilisation pour des simulations aux grandes échelles où la dissipation joue un rôle important dans la propagation des structures turbulentes.

L'objectif de cette première optimisation est donc d'explorer le champ des paramètres des schémas TTG pour définir un nouveau schéma, mais avec des propriétés de dissipation et de dispersion plus satisfaisantes que TTG4A. Les contraintes sur les coefficients sont les mêmes que pour le schéma TTG4A, avec une contrainte supplémentaire sur la stabilité du schéma sur l'ensemble de la plage de fréquences comme le montre le système (B.4). La contrainte $\beta\epsilon_2 = 1/24$ est volontairement ajoutée au système pour se placer dans un ensemble de contraintes identique à celui qui a été utilisé lors du développement de TTG4A. Néanmoins, il a été montré dans la Section 3.2 que la contrainte $\beta\epsilon_2 = 1/24$ seule (sans la contrainte $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$) n'était pas suffisante pour assurer un ordre 4.

$$\begin{cases} |G(\xi)| < 1 \quad \forall \xi \in [0, \pi], \\ \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ \beta\epsilon_2 = \dfrac{1}{24}. \end{cases} \tag{B.4}$$

Les fonctions objectifs correspondent à celles décrites dans le système (B.3). Le front de Pareto obtenu pour cette première optimisation est donné en Fig. B.5. Clairement, les propriétés de dissipation et de dispersion sont meilleures que pour le schéma TTG4A (fonctions objectifs plus faibles). Sur ce front de Pareto, le schéma appelé TTG-Opt1 avec la fonction objectif sur la dissipation la plus faible est choisi (croix verte sur la Fig. B.5). Les paramètres du schéma TTG-Opt1 correspondent au système (B.5).

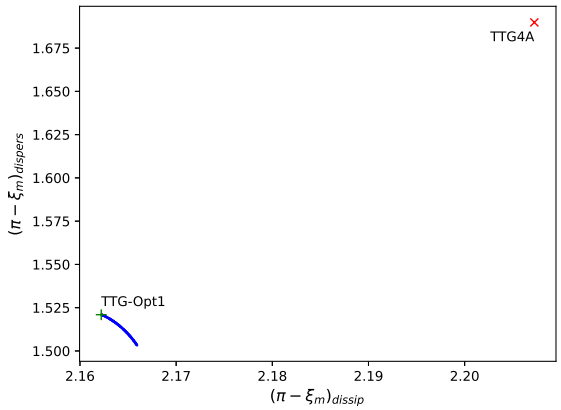
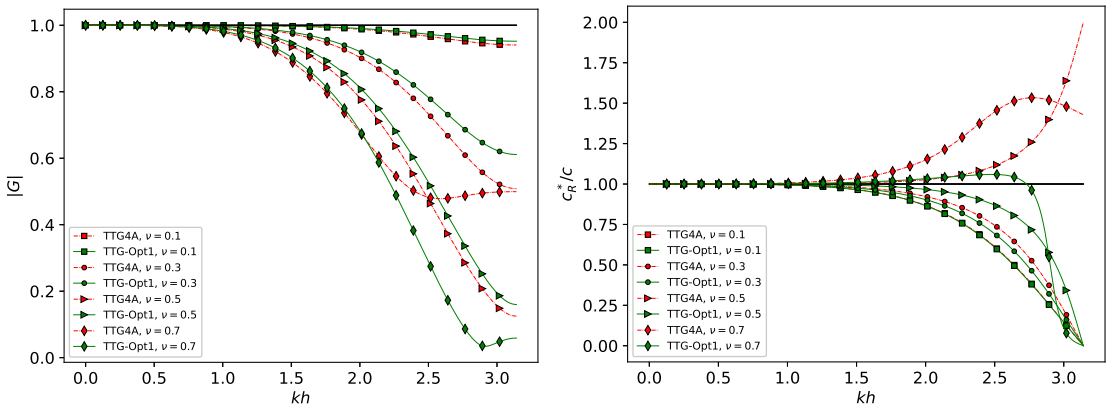


Figure B.5: Front de Pareto de l'optimisation 1.

$$\begin{cases} \alpha = 2949/9434, \\ \beta = 599/6346, \\ \theta_1 = 3233/4644, \\ \theta_2 = 1411/4644, \\ \epsilon_1 = -359/9861, \\ \epsilon_2 = 2457/5566. \end{cases} \quad \text{(TTG-Opt1)} \tag{B.5}$$

La dissipation et la dispersion numériques du schéma TTG-Opt1 sont comparées à TTG4A pour différentes valeurs de CFL. Pour les valeurs de CFL étudiées, les plages de fréquences pour laquelle la dissipation est comprise entre $[Dissip_m, 1]$ et pour laquelle la dispersion est comprise entre $[Dispers_m, 1]$ sont en effet plus larges que pour TTG4A.

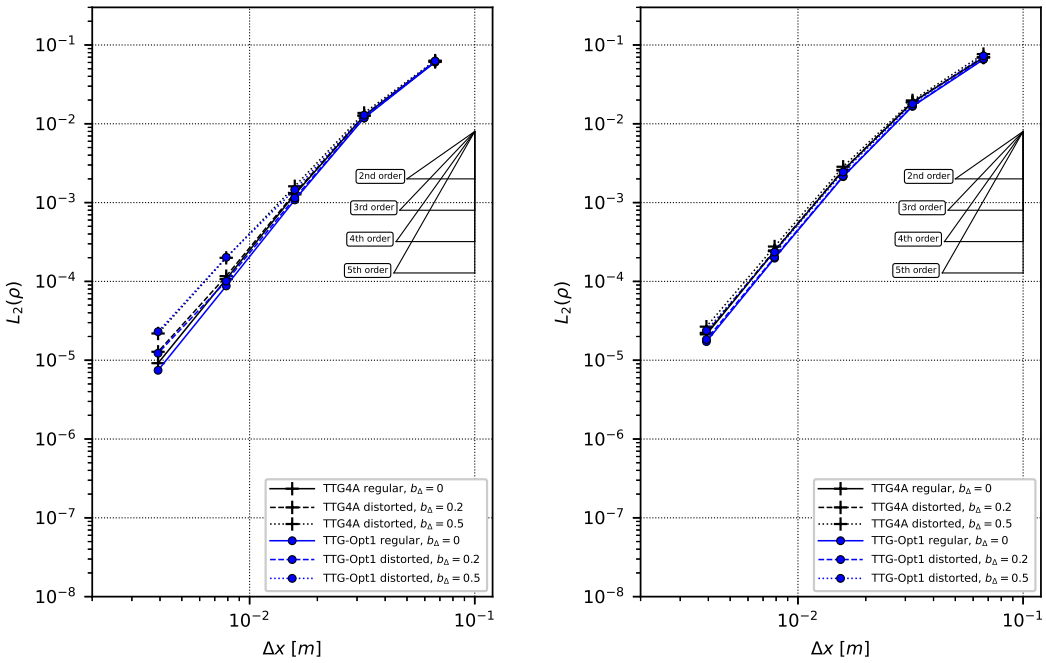


(a) Dissipation.

(b) Dispersion.

Figure B.6: Dissipation (module de G) et dispersion numériques (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTG4A et TTG-Opt1 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

Pour étudier l'impact de la réduction de la dissipation sur l'ordre de convergence du schéma, le cas de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle est de nouveau utilisé. Une comparaison de l'ordre de convergence en maillage (y compris perturbés) entre les schémas TTG4A et TTG-Opt1 pour deux valeurs de CFL est donnée en Fig. B.7. Il est clair que l'optimisation faite sur les coefficients ne modifie pas significativement l'ordre de convergence du schéma. Seule, une légère amélioration de l'ordre est observée sur maillages réguliers à $\nu = 0.3$. Au final, l'optimisation menée ne permet pas de solutionner l'inconvénient principal du schéma TTG4A qui était son niveau de dissipation trop important et d'autres pistes doivent donc être considérées.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure B.7: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A et TTG-Opt1 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

À noter que dans le cas du schéma TTG4A, θ_2 et ϵ_1 sont fixés à 0 de manière à éviter le calcul de deux termes du système d'équations, comme présenté par l'Eq. (3.15). Si ces deux contraintes sont ajoutées au problème d'optimisation, le système à 6 inconnues est complètement déterminé et les coefficients obtenus sont exactement ceux du schéma TTG4A. Par conséquent, aucune optimisation n'est possible.

Optimisation 2 : amélioration de TTGC(0.01) sans coefficients nuls

La deuxième optimisation s'intéresse plus particulièrement au schéma TTGC(0.01). L'objectif est ici d'augmenter les plages de fréquences pour laquelle la dissipation est comprise entre $[Dissip_m, 1]$ et pour laquelle la dispersion est comprise entre $[Dispers_m, 1]$, tout en conservant un niveau de dissipation aux hautes fréquences inférieur à celui de TTGC(0.01). Cette contrainte est ajoutée pour ne pas dégrader le schéma optimisé, puisque TTGC(0.01) est déjà très peu dissipatif au sens de Kreiss. Or, comme expliqué précédemment, un niveau de dissipation aux hautes fréquences suffisant est nécessaire pour éviter le phénomène d'*aliasing*. Les contraintes de cette troisième optimisation s'écrivent (avec un ordre 3 en temps),

$$\begin{cases} |G(\xi)| < 1 \quad \forall \xi \in [0, \pi], \\ |G(\pi)| < |G_{\mathrm{TTGC}}(\pi)|, \\ \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \tag{B.6}$$

De la même manière que pour l'optimisation précédente, les fonctions objectifs correspondent à celles décrites dans le système (B.3). Comme le montre le front de Pareto de la Fig. B.8, le schéma TTGC(0.01) est déjà dans la région où la fonction objectif basée sur la dissipation est minimale. En choisissant un schéma avec une dissipation la plus faible possible sur le front de Pareto, le schéma TTG-Opt2 est obtenu. Les coefficients de TTG-Opt2 sont indiqués par le système (B.7) et il est clair que les coefficients sont très proches de ceux de TTGC(0.01). Cette optimisation ne permet donc pas d'améliorer les propriétés de dissipation du schéma initial avec les contraintes imposées.

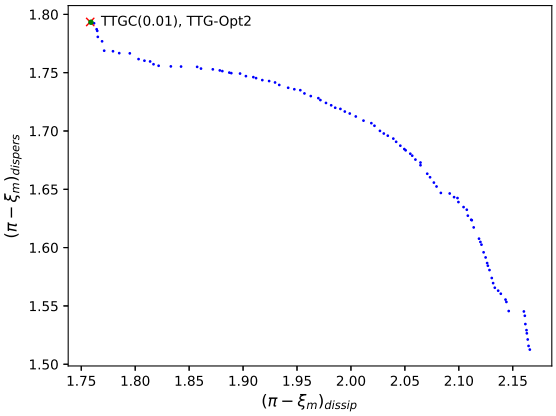


Figure B.8: Front de Pareto de l'optimisation 2. La croix rouge correspond à TTGC(0.01) et le point vert à TTG-Opt2.

$$\begin{cases} \alpha = 493/1000, \\ \beta = 1244/7403, \\ \theta_1 = 43/4679, \\ \theta_2 = 4636/4679, \\ \epsilon_1 = 109/10000, \\ \epsilon_2 = 3/8837. \end{cases} \quad \text{(TTG-Opt2)} \tag{B.7}$$

Optimisation 3 : amélioration de TTGC(0.01) avec coefficients nuls

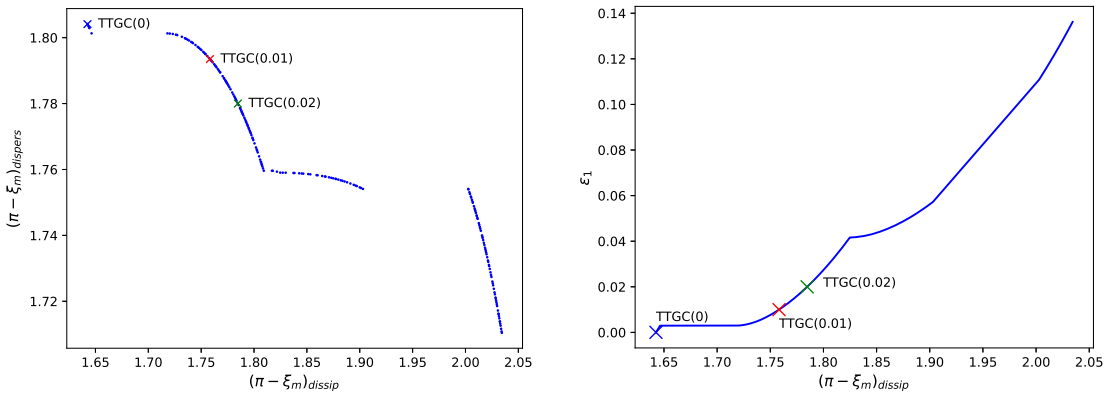
Cette troisième optimisation ajoute les contraintes sur les coefficients nuls du schéma TTGC(0.01). Pour TTGC(0.01), c'est θ_1 et ϵ_2 qui sont fixés à 0. Le système des contraintes contenant ces deux conditions en plus de l'ordre 3 en temps s'écrit,

$$\begin{cases} |G(\xi)| < 1 \quad \forall \xi \in [0, \pi], \\ \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ \theta_1 = 0, \\ \epsilon_2 = 0. \end{cases} \tag{B.8}$$

Dans ce cas pour les fonctions objectifs du système (B.3), le front de Pareto obtenu est donné en Fig. B.9a. Les symboles indiquent la position sur le front de Pareto de plusieurs schémas TTGC(γ) pour $\gamma = 0$, $\gamma = 0.01$ et $\gamma = 0.02$. Pour rappel, le paramètre γ est utilisé pour définir les 6 coefficients des schémas TTGC(γ), tels que,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \gamma, \quad \beta = \frac{1}{6}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \epsilon_1 = \gamma, \quad \epsilon_2 = 0. \tag{B.9}$$

À noter que sur la Fig. B.9a, la valeur de la fonction objectif basée sur la dissipation semble directement liée à la valeur de γ. Afin de confirmer ce lien, la Fig. B.9b montre l'évolution du coefficient ϵ_1 (qui est égal à γ avec les contraintes imposées) en fonction de la fonction objectif basée sur la dissipation. Il est clair qu'une augmentation de la valeur de γ entraine une augmentation globale du niveau de dissipation du schéma résultant, puisque la fonction objectif $(\pi - \xi_m)_{\text{Dissip}}$ augmente. Cette observation avait déjà été faite dans [57], où il avait été identifié que le paramètre γ était directement lié à la dissipation aux hautes fréquences du schéma.



(a) Front de Pareto de l'optimisation 3.

(b) Mise en évidence du lien entre ϵ_1 et la fonction objectif basée sur la dissipation.

Figure B.9: Front de Pareto de l'optimisation 3 et lien entre ϵ_1 et la dissipation.

Au final, la troisième optimisation présentée dans cette section permet de mettre en évidence le lien direct entre la dissipation du schéma TTGC(γ) et la valeur de γ associée. Il n'y a cependant pas d'amélioration majeure vis-à-vis du schéma en lui-même.

Optimisation 4 : schéma entre TTG4A et TTGC(0.01) sans coefficients nuls

La dernière optimisation présentée dans ce chapitre a pour but de produire un schéma dont le comportement est intermédiaire entre TTGC(0.01) et TTG4A. L'idée est de combiner les avantages des deux schémas. D'un côté, TTGC(0.01) présente de très bonnes propriétés de dissipation et un ordre de convergence excellent sur maillages réguliers, mais souffre toutefois d'une forte sensibilité à la qualité du maillage. De l'autre, le niveau de dissipation de TTG4A est plus élevé mais il est en contrepartie largement moins sensible à la dégradation de la qualité du maillage. Dans cette optique, les contraintes imposées correspondent à un ordre 3 en temps, avec en plus la valeur de $|G(\pi)|$ comprise entre celles de TTGC(0.01) et TTG4A pour forcer un comportement intermédiaire,

$$\begin{cases} |G(\xi)| < 1 \quad \forall \xi \in [0, \pi], \\ |G_{TTG4A}(\pi)| < |G(\pi)| < |G_{\mathrm{TTGC}}(\pi)|, \\ \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \tag{B.10}$$

Pour les fonctions objectifs du système (B.3), le front de Pareto obtenu pour cette optimisation est présenté sur la Fig. B.10. Au niveau de la dissipation, l'ensemble des schémas générés sont en effet intermédiaires entre TTGC(0.01) et TTG4A. Le schéma TTG-Opt4 choisi est situé au centre de ce front de Pareto et ses coefficients associés sont indiqués par le système (B.11).

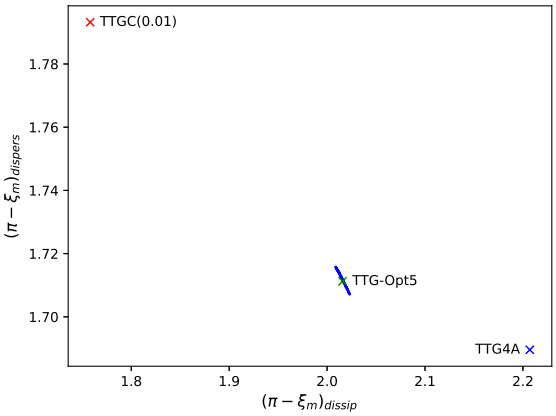
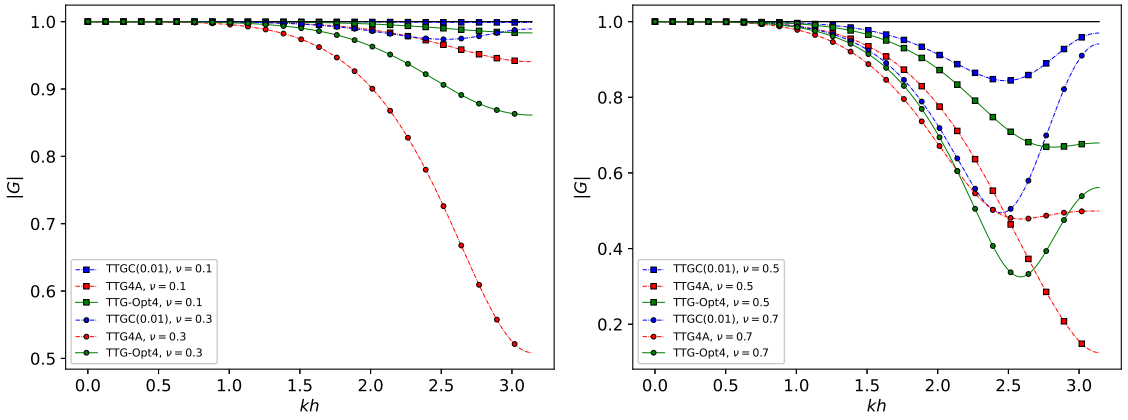


Figure B.10: Front de Pareto de l'optimisation 4.

$$\begin{cases} \alpha = 3347/8935, \\ \beta = 1182/8261, \\ \theta_1 = 77/1910, \\ \theta_2 = 1833/1910, \\ \epsilon_1 = 353/5680, \\ \epsilon_2 = 277/3535. \end{cases} \quad \text{(TTG-Opt4)} \tag{B.11}$$

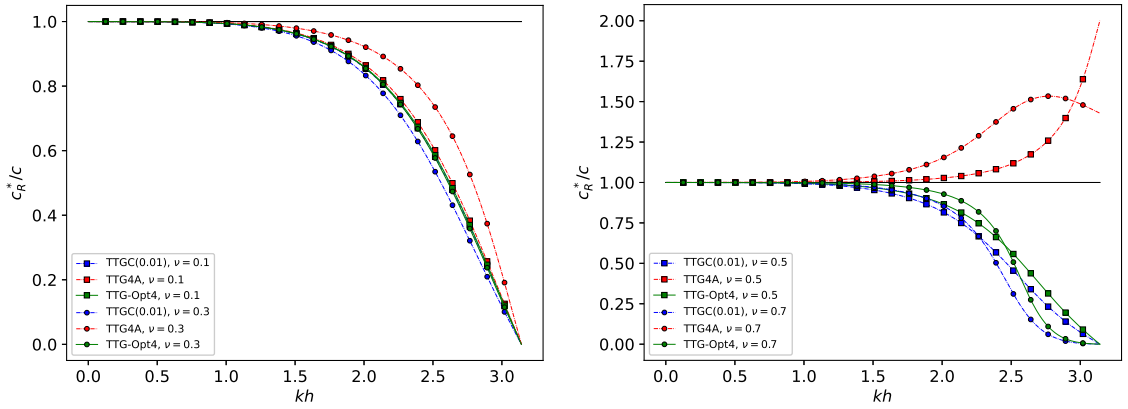
En traçant l'évolution de la dissipation et dispersion numériques des schémas TTGC(0.01), TTG4A et TTG-Opt4, le comportement intermédiaire aux hautes fréquences du schéma TTG-Opt4 est visible, avec la contrainte $|G_{TTG4A}(\pi)| < |G(\pi)| < |G_{TTGC}(\pi)|$ qui est respectée pour les 4 valeurs de CFL présentées. À noter que la dissipation et la dispersion du schéma TTG-Opt4 ne sont pas comprises entre celles de TTGC(0.01) et TTG4A sur l'ensemble de la plage de fréquences, seulement le niveau en π est imposé dans les contraintes de l'optimisation. Contraindre les niveaux de dissipation et de dispersion sur l'ensemble de la plage de fréquences ne donne pas de solution au problème d'optimisation.

Pour étudier l'ordre de convergence du nouveau schéma TTG-Opt4 par rapport aux schémas TTGC(0.01) et TTG4A, ce dernier est comparé sur le cas de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle (avec le démonstrateur Python). Les courbes de convergence sont données par la Fig. B.12. Sur maillages réguliers, le schéma TTG-Opt4 présente un ordre de convergence inférieur à TTGC(0.01), mais supérieur à TTG4A, ce qui s'explique par le niveau de dissipation intermédiaire. Sur maillages perturbés, le comportement est là aussi dans un entre-deux. Le nouveau schéma optimisé est plus sensible à la qualité du maillage que TTG4A, mais reste largement moins impacté que TTGC(0.01). Au final, le schéma TTG-Opt4 obtenu remplit bien l'objectif initial qui était de développer un nouveau schéma avec un comportement qui correspond à un compromis entre TTGC(0.01) et TTG4A.



(a) Dissipation ($\nu = 0.1$ et $\nu = 0.3$).

(b) Dissipation ($\nu = 0.5$ et $\nu = 0.7$).

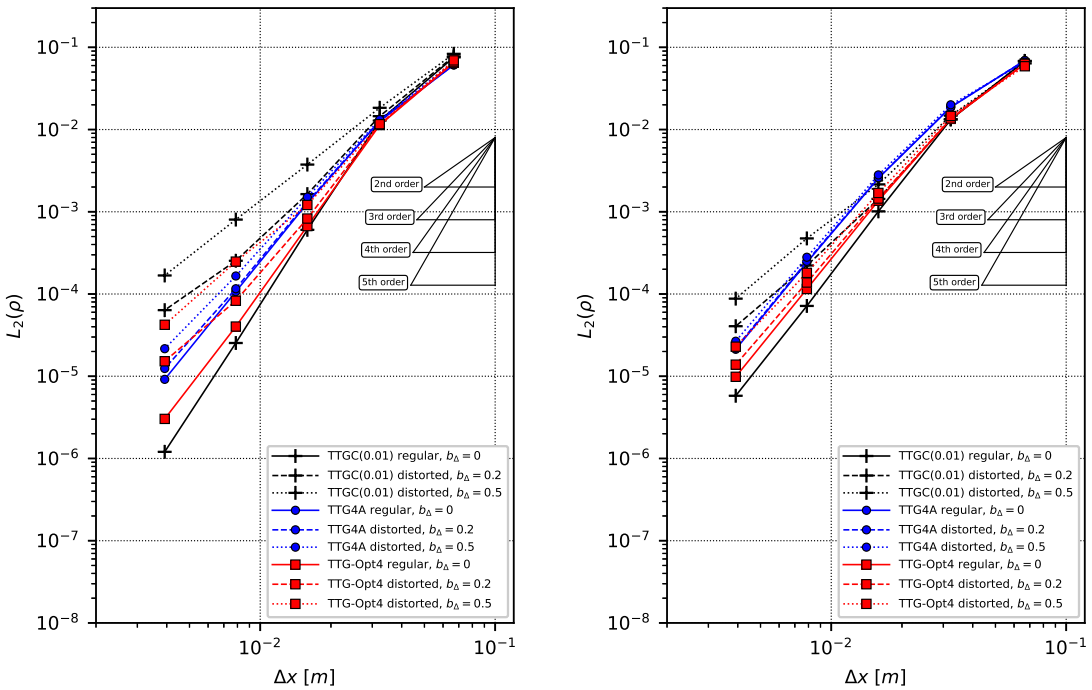


(c) Dispersion ($\nu = 0.1$ et $\nu = 0.3$).

(d) Dispersion ($\nu = 0.5$ et $\nu = 0.7$).

Figure B.11: Dissipation (module de G) et dispersion numériques (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTGC(0.01), TTG4A et TTG-Opt4 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

L'ensemble des optimisations présentées dans cette section a montré qu'il était possible de modifier de manière significative le comportement des schémas de la famille TTG en adaptant les coefficients (α, β, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2). Malgré les différentes pistes étudiées, les optimisations n'ont pas permis d'apporter une réponse satisfaisante aux inconvénients décrits pour les schémas TTGC(0.01) et TTG4A. Le dernier schéma TTG-Opt4 présente un comportement intermédiaire entre les deux schémas initiaux, mais ne répond pas complètement à l'objectif principal qui est de construire un schéma peu sensible à la qualité du maillage, tout en conservant un niveau de dissipation compatible avec les exigences de la simulation aux grandes échelles. D'autres pistes doivent donc être considérées, ce qui est l'objectif des sections qui suivent.



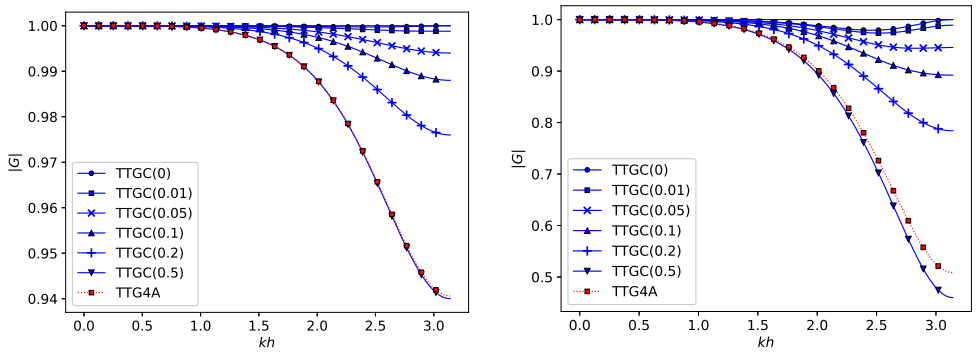
(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

Figure B.12: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTGC(0.01), TTG4A et TTG-Opt4 pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

B.1.4 Investigation d'un schéma TTGC à γ variable

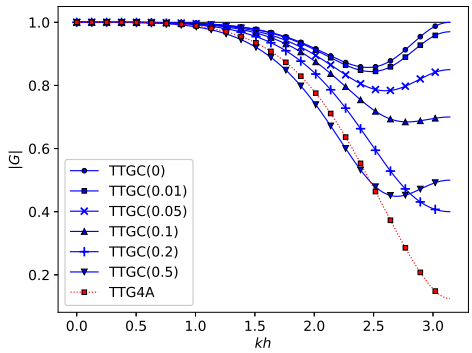
Comme décrit dans la Section 3.2.1, le schéma TTGC(γ) est construit autour d'un paramètre γ qui peut être ajusté en fonction de plusieurs critères. Dans sa version originale, γ a été fixé à 0.01, ce qui correspond à un bon compromis sur le niveau de dissipation aux hautes fréquences. L'idée de cette section est de comprendre les effets du paramètre γ sur les caractéristiques du schéma pour adapter sa valeur globalement ou localement.

Pour comprendre l'effet du paramètre γ sur les propriétés du schéma TTGC(γ), la première étape consiste à analyser la dissipation et la dispersion du schéma pour différentes valeurs de γ comprises entre 0.01 et 0.5. Pour la dissipation numérique (Fig. B.13), l'effet est très marqué. Cette observation n'est pas surprenante puisque la Section B.1.3 a mis en évidence le lien direct entre le niveau de dissipation de TTGC(γ) et γ. Par ailleurs, ce lien est aussi visible dans l'équation modifiée du schéma TTGC(γ) donnée au début du Chapitre 3 par l'Eq. (3.37). Le premier terme qui multiplie une dérivée d'ordre pair (qui est liée à l'erreur de dissipation [128]) est fonction du paramètre γ. Ainsi, lorsque γ augmente, le terme dissipatif augmente lui aussi. Le paramètre γ apparaît donc comme un bon levier pour adapter le niveau de dissipation du schéma et ainsi réduire sa sensibilité à la qualité du maillage. À noter que pour $\nu = 0.7$, certaines valeurs de γ donnent un schéma instable. L'impact de γ sur la stabilité du schéma sera détaillé par la suite. Au niveau de la dispersion (Fig. B.13), la modification de γ a un effet moins important. Pour des valeurs assez faibles de γ, les niveaux de dispersion sont quasiment identiques. Au contraire, pour des valeurs élevées de γ (0.2 et 0.5 notamment), le comportement de TTGC(γ) se rapproche de celui de TTG4A.

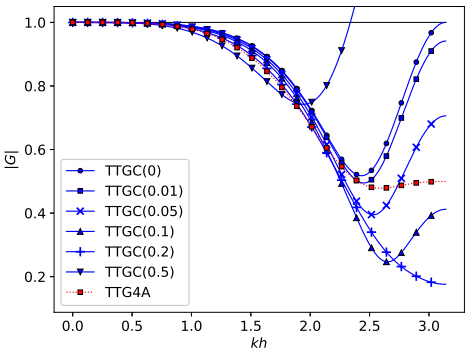


(a) Dissipation, $\nu = 0.1$.

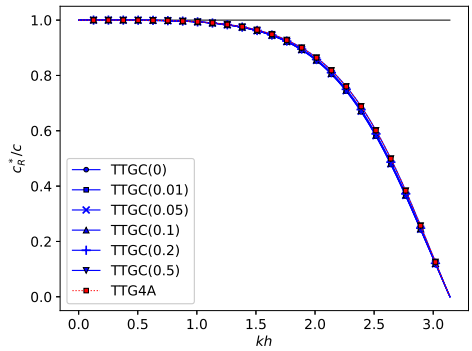
(b) Dissipation, $\nu = 0.3$.



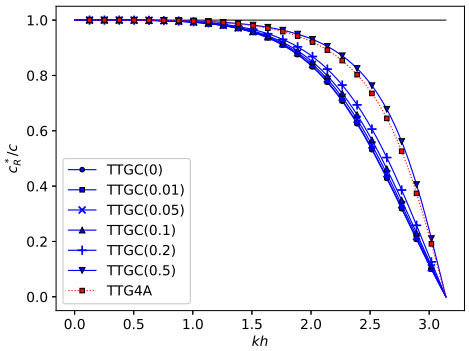
(c) Dissipation, $\nu = 0.5$.



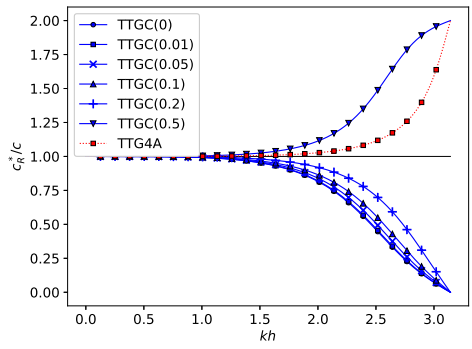
(d) Dissipation, $\nu = 0.7$.



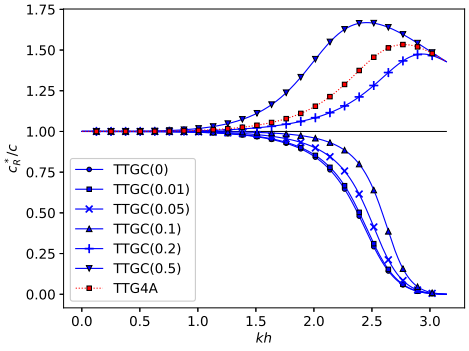
(e) Dispersion, $\nu = 0.1$.



(f) Dispersion, $\nu = 0.3$.



(g) Dispersion, $\nu = 0.5$.



(h) Dispersion, $\nu = 0.7$.

Figure B.13: Dissipation numérique (module de G) et dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduites par les schémas TTGC(γ) pour différentes valeurs de γ et TTG4A en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

Un autre point à analyser est celui de l'impact de la valeur de γ sur le domaine de stabilité du schéma. La Figure B.14 présente l'évolution du CFL critique en 1D de TTGC(γ) en fonction de γ, obtenue à partir du coefficient d'amplification. L'augmentation de γ au-delà d'environ 0.25 entraine donc une réduction significative du CFL critique, ce qui présente un inconvénient majeur pour le schéma. À noter que cette réduction du domaine de stabilité est aussi observée en 2D comme le montre la Table B.1. De la même manière que pour le cas 1D, la valeur du CFL critique est déterminée à partir du coefficient d'amplification (CFL à partir duquel $|G| > 1$).

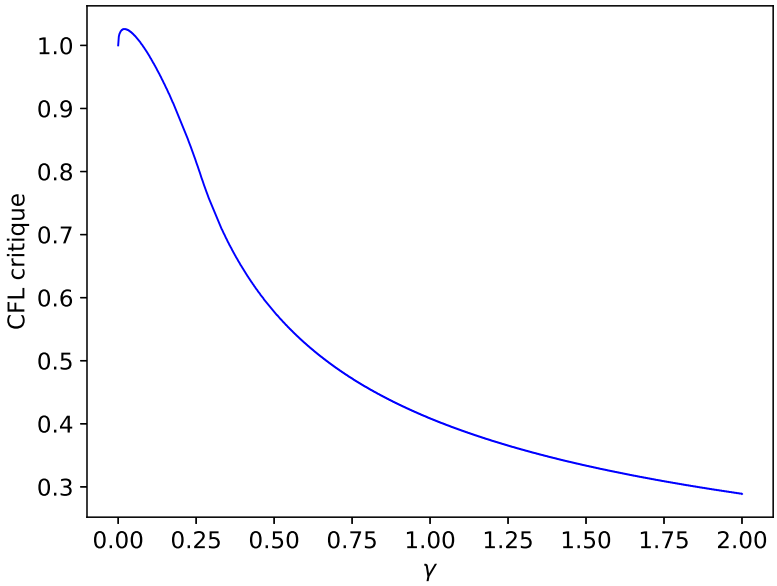


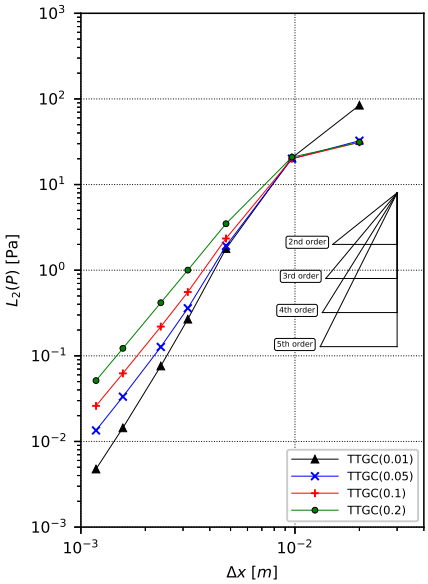
Figure B.14: Courbe d'évolution du CFL critique en fonction de γ pour le schéma TTGC(γ) en 1D.

CFL critique	TTGC(0.01)	TTGC(0.05)	TTGC(0.1)	TTGC(0.2)
1D	1.023	1.017	0.983	0.880
2D quadrilatères	0.811	0.795	0.773	0.727

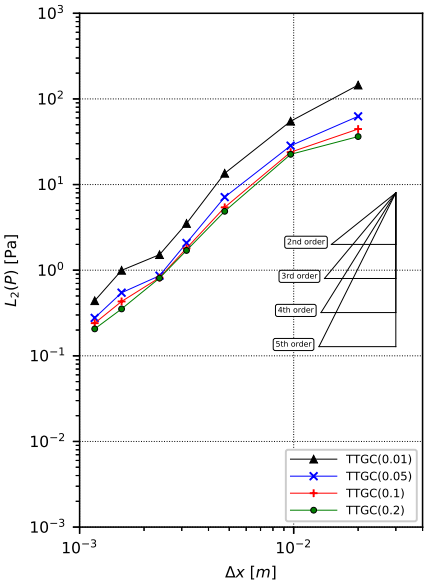
Table B.1: Évolution du CFL critique en fonction de γ pour le schéma TTGC(γ) en 1D et 2D.

L'étude de la dissipation précédente a mis en évidence l'effet de γ sur les propriétés du schéma TTGC(γ). La suite de cette analyse s'intéresse à l'impact de γ sur l'ordre de convergence du schéma pour différents niveaux de perturbations de maillage, et donc *in fine* à sa sensibilité à la qualité du maillage. Pour cela, la Fig. B.15 présente l'évolution de l'ordre de convergence des schémas TTGC(0.01), TTGC(0.05), TTGC(0.1) et TTGC(0.2) dans le cas de la convection d'un vortex isentropique. Sur maillages réguliers ($b_\Delta = 0$), l'augmentation de la dissipation liée à des valeurs plus élevées de γ entraine inévitablement une dégradation de l'ordre de convergence du schéma, ce qui est plutôt contraire à l'objectif initial.

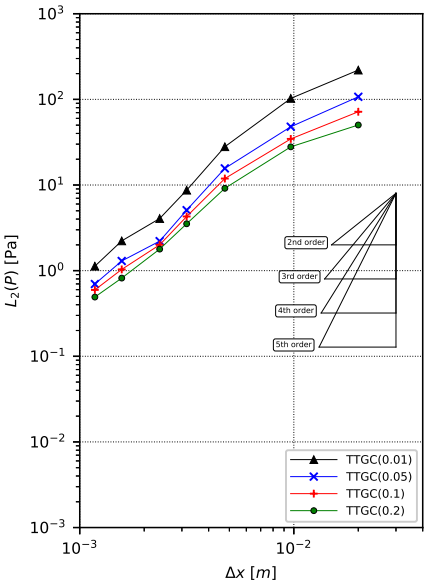
Sur maillages perturbés ($b_\Delta = 0.2$ et $b_\Delta = 0.5$), le constat est différent. L'augmentation de la dissipation a cette fois un effet bénéfique puisqu'elle permet de dissiper plus efficacement les *wiggles* introduits par les irrégularités du maillage et donc de réduire l'erreur globale par rapport au schéma TTGC(0.01). À noter que même si le niveau absolu d'erreur est réduit, l'ordre de convergence semble quant à lui reste quasiment le même quelle que soit la valeur de γ.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0$.



(b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.2$.



(c) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.5$.

Figure B.15: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas TTGC(0.01), TTGC(0.05), TTGC(0.1) et TTGC(0.2) pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

Comme expliqué au-dessus, le choix d'une valeur de γ fixe sur l'ensemble du domaine présente l'inconvénient de dégrader l'ordre de convergence sur des maillages de bonne qualité ou réguliers. En considérant l'ensemble des tests précédents, l'idée est d'adapter localement la valeur de γ en fonction de la qualité locale du maillage. Ce choix est motivé par les observations faites montrant une dégradation nette de l'ordre de convergence pour TTGC(0.01) lorsque le maillage est perturbé. Une métrique permettant de quantifier localement la qualité d'un maillage serait donc un outil intéressant pour gérer la sensibilité locale du schéma à la qualité du maillage. Dans cette étude, la métrique choisie correspond au décalage entre la position d'un nœud et le centre de gravité de la cellule duale associée à ce nœud, comme illustré en Fig. B.16. Sur cette base et pour la suite, la

valeur du décalage $\Delta_{\mathrm{CGCD},i}$ d'un nœud i sera obtenue par la relation suivante,

$$\Delta_{\mathrm{CGCD},i} = \sqrt{(x_i - x_{\mathrm{CGCD},i})^2 + (y_i - y_{\mathrm{CGCD},i})^2}, \tag{B.12}$$

avec x_i, y_i les coordonnées du nœud i et $x_{\mathrm{CGCD},i}$, $y_{\mathrm{CGCD},i}$ les coordonnées du centre de gravité de la cellule duale associée au nœud i.

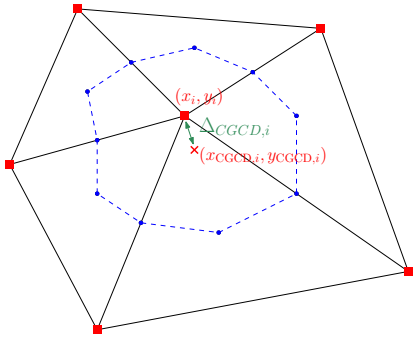
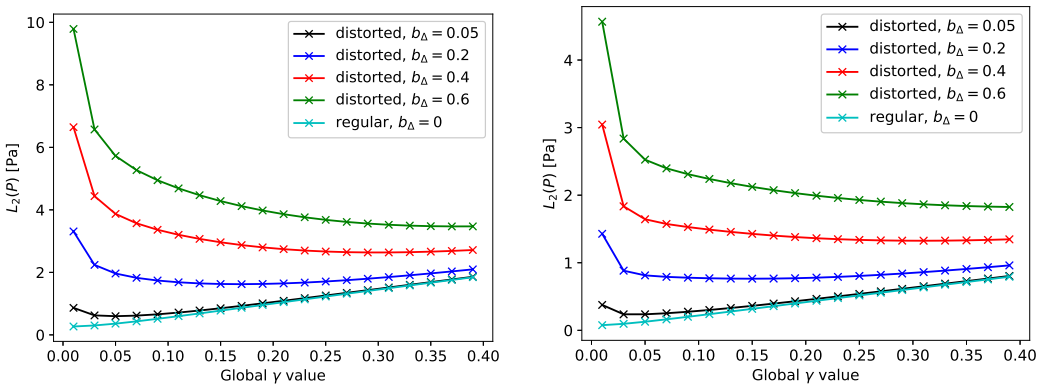


Figure B.16: Illustration du décalage entre la position d'un nœud et le centre de gravité de la cellule duale associée à ce nœud.

Maintenant que la métrique permettant de quantifier localement la qualité du maillage a été choisie, le choix de la loi d'évolution pour déterminer γ en fonction de Δ_{CGCD} reste une question ouverte. Afin d'éviter de construire une loi d'évolution arbitraire, l'étude qui suit a pour premier objectif de déterminer une valeur optimale de γ pour un niveau de perturbation donné et ainsi d'en déduire une loi d'évolution. Pour se faire, la Fig. B.17 présente l'évolution de l'erreur quadratique sur la pression en fonction de la valeur de γ (constante sur l'ensemble du domaine) pour différents niveaux de perturbations b_Δ et pour deux raffinements $\Delta x = L_x/96$ et $\Delta x = L_x/128$ sur le cas du vortex isentropique. Chaque croix des courbes de la Fig. B.17 correspond à la simulation d'un vortex isentropique pour la valeur de γ indiquée par l'abscisse et pour un b_Δ donné par la légende. La valeur de γ est pour le moment constante sur l'ensemble du domaine puisque l'objectif est de déterminer une loi d'évolution par le biais de cet ensemble de simulations.

Pour une valeur de b_Δ donnée, l'erreur quadratique ne varie pas de manière significative mais il est clair que lorsque la qualité du maillage se dégrade, la valeur optimale de γ augmente (la valeur optimale de γ correspond à l'erreur quadratique la plus faible pour une perturbation donnée).



(a) $\Delta x = L_x/96$.

(b) $\Delta x = L_x/128$.

Figure B.17: Évolution de l'erreur quadratique sur la pression en fonction de la valeur globale de γ pour différents niveaux de perturbations et pour deux raffinements.

Pour déduire une loi d'évolution à partir des simulations précédentes, la valeur optimale de γ est tracée en fonction du décalage moyen $\bar{\Delta}_{CGCD}$. Le $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ est obtenu par la moyenne des $\Delta_{\text{CGCD},i}$ de chaque nœud du maillage adimensionnée par l'aire de la cellule duale, comme,

$$\bar{\Delta}_{\text{CGCD}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sqrt{(x_i - x_{\text{CGCD},i})^2 + (y_i - y_{\text{CGCD},i})^2}}{A_i}, \tag{B.13}$$

avec N le nombre de nœuds du maillage et A_i l'aire de la cellule duale du nœud i.

La Figure B.18 montre l'évolution de la valeur optimale de γ en fonction de $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$. Les courbes sont construites en traçant le γ optimal en fonction de $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ pour chaque valeur de b_Δ. Lorsque que b_Δ augmente, il est donc normal d'observer une augmentation du décalage moyen $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ puisque le maillage est davantage perturbé (ce qui entraine un écart plus important entre la position de chaque nœud et le centre de gravité de la cellule duale associée à ce nœud).

Ce graphique met en évidence le fait que la valeur optimale de γ augmente très rapidement quand la qualité du maillage se dégrade. Par ailleurs, pour les deux raffinements, la valeur optimale de γ semble aussi suivre la même évolution linéaire.

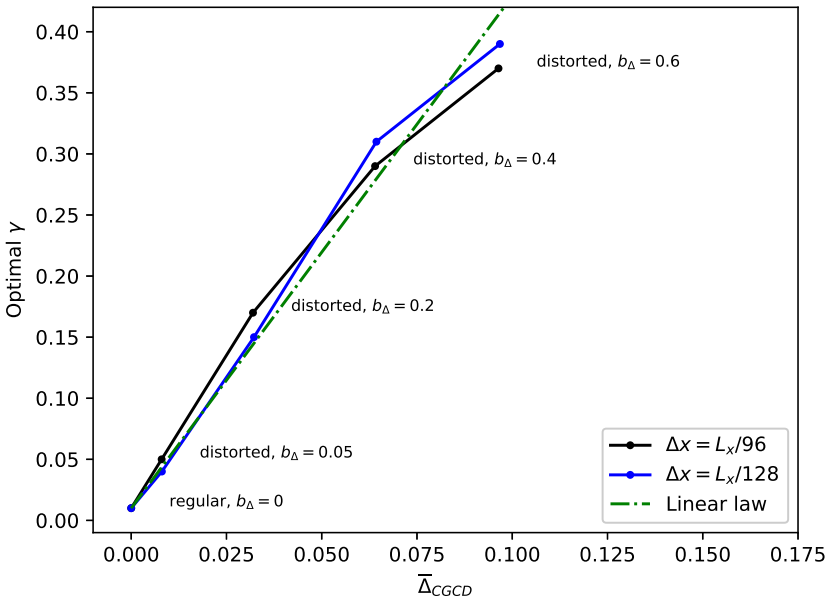


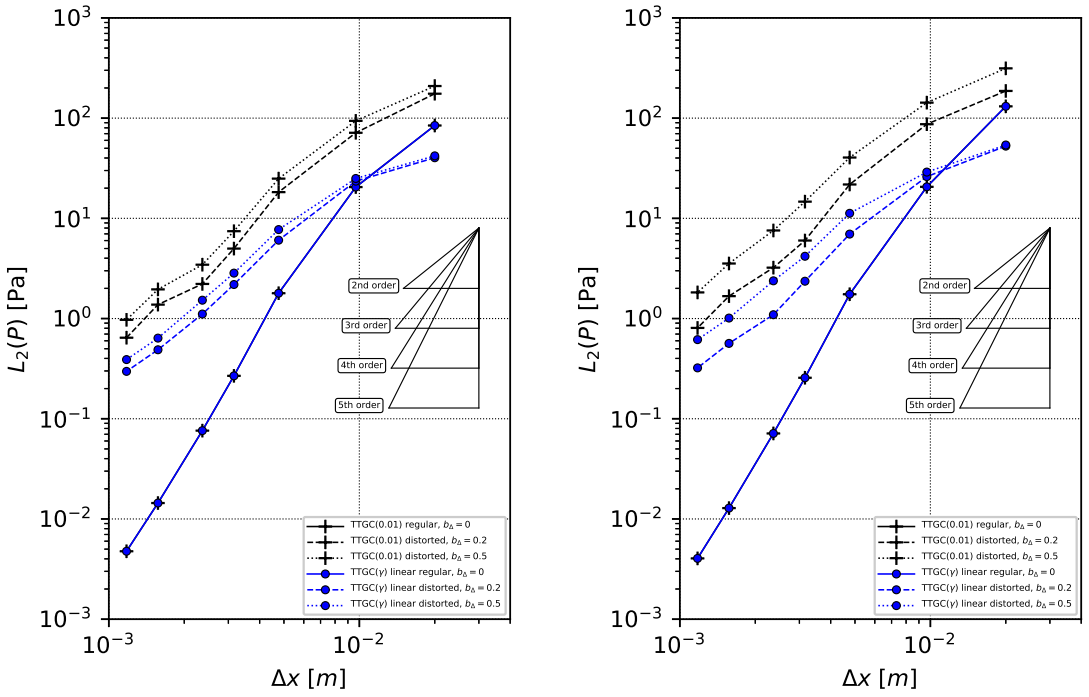
Figure B.18: Courbe d'évolution de γ optimal en fonction de $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ pour deux niveaux de raffinements. La courbe pointillée verte correspond à la loi d'évolution linéaire définie pour relier $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ et γ.

À partir de l'observation de l'évolution de la valeur optimale de γ, une loi linéaire est définie pour relier $\bar{\Delta}_{\text{CGCD}}$ à la valeur de γ (courbe pointillée sur la Fig. B.18). Cette loi linéaire permet de définir une relation entre la valeur locale du décalage $\Delta_{\text{CGCD},i}$ d'un nœud i à la valeur de γ_i choisie localement pour ce nœud. La loi d'évolution linéaire s'écrit,

$$\gamma_i(\Delta_{\text{CGCD},i}) = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min})\frac{\Delta_{\text{CGCD},i}}{A_i} + \gamma_{min}, \tag{B.14}$$

avec $\gamma_{\min} = 0.01$ et $\gamma_{\max} = 4.2$. La valeur $\gamma_{\min} = 0.01$ est fixée de manière à ce que le schéma avec la loi d'évolution soit équivalent à TTGC(0.01) sur maillages réguliers.

Dans la suite, de nouvelles simulations sont réalisées en utilisant cette loi d'évolution, pour lesquelles cette fois-ci la valeur de γ varie localement. À noter que pour garantir la conservativité, la valeur de γ utilisée pour chaque élément du maillage correspond à la moyenne des valeurs de γ de chaque vertex de l'élément (obtenues par la loi précédente). La convergence en maillage du schéma TTGC(γ) avec une loi d'évolution linéaire est comparée à celle de TTGC(0.01) dans le cas de la convection d'un vortex isentropique (Fig. B.19). À noter qu'étant donné que la métrique est nulle sur maillages réguliers, les deux schémas sont équivalents pour $b_\Delta = 0$. Pour les deux cas sur maillages perturbés, une réduction importante de l'erreur est observée, mais cette réduction reste comparable aux cas à γ constants montrés sur la Fig. B.15. Cela montre malheureusement que l'utilisation d'un γ localement variable n'apporte pas un bénéfice significatif par rapport aux cas précédents où la valeur de γ est constante.



(a) $\nu = 0.3$. (b) $\nu = 0.7$.

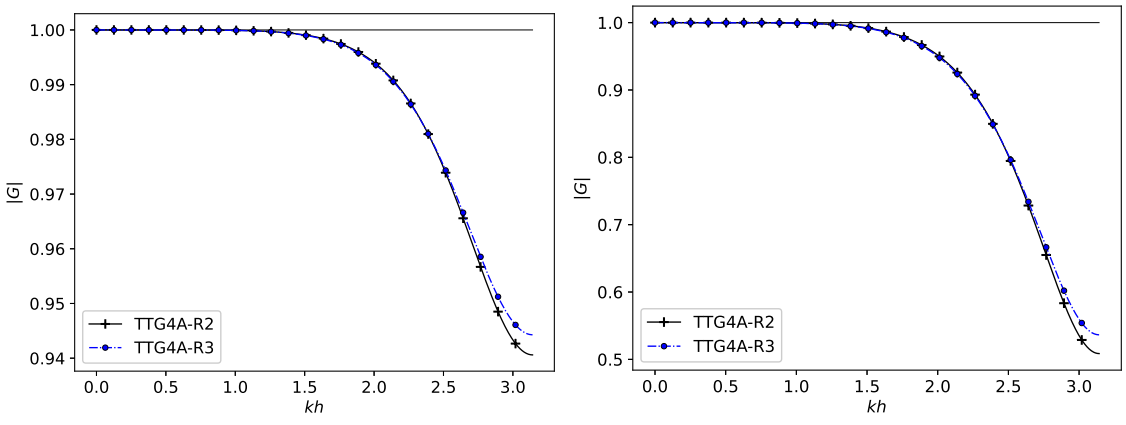
Figure B.19: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas TTGC(0.01) et TTGC(γ) avec une loi d'évolution linéaire pour deux valeurs de CFL et pour trois niveaux de perturbations du maillage.

Pour conclure sur cette expérimentation concernant l'utilisation d'un schéma TTGC à γ variable, les résultats sont globalement peu convaincants. L'utilisation de valeurs de γ plus élevées que 0.01 permet en effet de réduire la sensibilité du schéma à la qualité du maillage, mais ne permet en aucun cas de restaurer l'ordre de convergence observé sur maillages réguliers. Par ailleurs, la loi d'évolution linéaire a montré que la valeur de γ optimale augmente très rapidement lorsque la qualité du maillage se dégrade. Or, cette section a aussi mis en évidence la relation directe entre γ et le CFL critique du schéma. Ainsi, des valeurs élevées de γ (autour de 0.3 ou 0.4 pour des maillages très perturbés par exemple) entrainent une réduction significative du domaine de stabilité du schéma numérique, ce qui est un inconvénient majeur pour ce genre d'approche. Anticiper ce type de comportement de façon automatique est d'ailleurs assez complexe.

B.1.5 Conclusion intermédiaire

L'objectif de cette annexe était d'étudier différentes pistes pour tenter d'améliorer les schémas existants. Le schéma TTGC(0.01) a été particulièrement considéré puisqu'il présente des propriétés très intéressantes sur maillages réguliers notamment en termes de dissipation et d'ordre de convergence. Il souffre toutefois d'un inconvénient majeur qui est sa très grande sensibilité à la qualité du maillage, entrainant une forte dégradation de son ordre de convergence sur maillages irréguliers. La Section 3.2 a montré que cette dégradation était liée à l'apparition de *wiggles* ou oscillations nœud à nœud qui ne sont pas dissipées par le schéma. Deux leviers dits non numériques, dans le sens où ils ne sont pas dépendants du schéma numérique, ont été investigués. D'une part, l'utilisation de viscosité artificielle, en particulier celle de quatrième ordre, qui par définition est construite pour détruire les oscillations nœud à nœud. Et d'autre part, l'influence du nombre d'itérations de la méthode de Jacobi pour approximer l'inverse de la matrice de masse des schémas TTG. Dans les deux cas, ces leviers n'ont pas permis de résoudre le problème de sensibilité au maillage de TTGC(0.01). La deuxième partie de cette annexe a donc eu pour objectif de travailler directement sur les coefficients des schémas de la famille TTG pour modifier et adapter le comportement de ces derniers. À l'aide d'un code d'optimisation sous contraintes, il a été possible de définir un ensemble de fonctions objectifs et de contraintes pour tenter de construire des schémas TTG moins dissipatifs ou plus robustes à une mauvaise qualité de maillage selon les cas. Dans l'ensemble, les optimisations ont rempli leur objectif initial qui était d'obtenir rapidement de nouveaux schémas en accord avec les contraintes imposées en amont. Les schémas obtenus par cette méthode n'ont toutefois pas permis de résoudre complètement les problèmes rencontrés par les schémas existants. Le but de la dernière section était d'étudier un schéma TTGC à γ variable. Des travaux précédents ont mis en évidence le lien direct entre le niveau de dissipation du schéma TTGC et la valeur de γ qui apparaît dans les coefficients de ce dernier. Étant donné que TTGC(0.01) est très sensible à la qualité du maillage, l'idée était d'adapter localement la valeur de γ pour augmenter la dissipation locale du schéma et ainsi réduire sa sensibilité. Malheureusement, ce schéma à γ variable n'a pas donné des résultats sensiblement meilleurs qu'un schéma à γ constant.

B.2 Dissipation et dispersion numériques du schéma TTG4A-R3



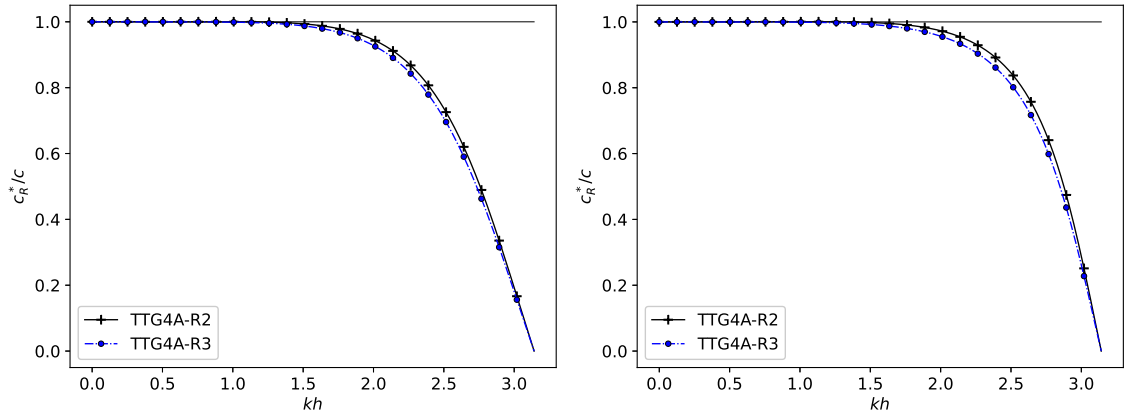
(a) Dissipation, $\nu = 0.1$.

(b) Dissipation, $\nu = 0.3$.

(c) Dissipation, $\nu = 0.5$.

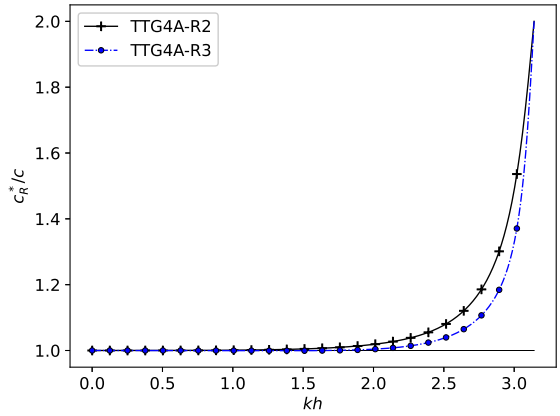
(d) Dissipation, $\nu = 0.7$.

Figure B.20: Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

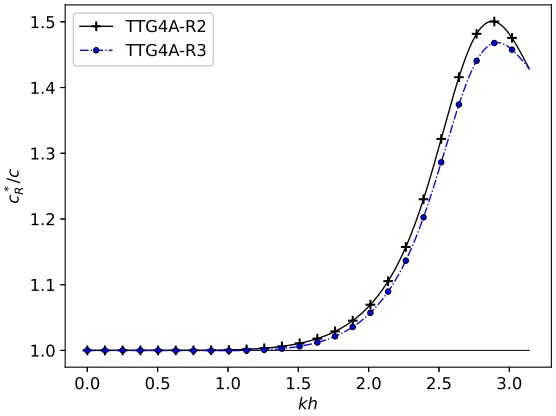


(a) Dispersion, $\nu = 0.1$.

(b) Dispersion, $\nu = 0.3$.



(c) Dispersion, $\nu = 0.5$.



(d) Dispersion, $\nu = 0.7$.

Figure B.21: Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTG4A-R2 et TTG4A-R3 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.

B.3 Schémas avec des termes supplémentaires du développement de Taylor

Un schéma TTG en ajoutant le terme **LLL** aux deux étapes s'écrit,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n) &= -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) - \gamma\Delta t^3\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right), \\
\mathbf{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) &= -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \epsilon_2\mathbf{LL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\
&\quad - \Delta t^3\left(\mu_1\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \mu_2\mathbf{LLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Pour déterminer les contraintes sur les coefficients α, β, γ, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2, μ_1 et μ_2, la méthodologie est la même que celle présentée dans le Chapitre 3. Elle consiste à écrire le coefficient d'amplification associé au système (B.15),

$$\tilde{G}_{\text{TTG-LLL}}(k) = 1 - \left(\alpha\nu\hat{\Delta}_0 - \beta\nu^2\hat{\delta}^2 + \gamma\nu^3\hat{\delta}^3\right)/\hat{M},$$
$$G_{\text{TTG-LLL}}(k) = 1 - \Big[\nu\left(\theta_1\hat{\Delta}_0 + \theta_2\hat{\Delta}_0)\tilde{G}_{\text{TTG-LLL}}(k)\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\hat{\delta}^2 + \epsilon_2\hat{\delta}^2\tilde{G}_{\text{TTG-LLL}}(k)\right) \tag{B.16}$$
$$+ \nu^3\left(\mu_1\hat{\delta}^3 + \mu_2\hat{\delta}^3\tilde{G}_{\text{TTG-LLL}}(k)\right)\Big]/\hat{M},$$

avec $\hat{\Delta}_0$, $\hat{\delta}^2$, $\hat{\delta}^3$ et $\hat{M}$ les transformées de Fourier des opérateurs de dérivées première, seconde, troisième et de matrice de masse respectivement.

Dans le cas de la reconstruction quadratique (voir Section 3.3.2), sur un maillage régulier, les opérateurs s'expriment en équivalence différences finies comme,

$$\Delta_{0,R2} = \frac{1}{24}(-E^2 + 14E - 14E^{-1} + E^{-2}), \tag{B.17}$$
$$\delta^2_{R2} = (E - 2 + E^{-1}), \tag{B.18}$$
$$\delta^3_{R2} = \frac{1}{2}(-E^2 + 2E - 2E^{-1} + E^{-2}), \tag{B.19}$$
$$M_{R2} = \frac{1}{48}(-E^2 + 8E + 34 + 8E^{-1} - E^{-2}), \tag{B.20}$$

ce qui donne les transformées de Fourier suivantes,

$$\hat{\Delta}_{0,R2}(\xi) = i\left(\frac{7}{6}\sin(\xi) - \frac{1}{12}\sin(2\xi)\right), \tag{B.21}$$
$$\hat{\delta}^2_{R2}(\xi) = -4\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2, \tag{B.22}$$
$$\hat{\delta}^3_{R2}(\xi) = i\left(2\sin(\xi) - \sin(2\xi)\right), \tag{B.23}$$
$$\hat{M}_{R2}(\xi) = \frac{17}{24} + \frac{1}{3}\cos(\xi) - \frac{1}{24}\cos(2\xi). \tag{B.24}$$

En remplaçant ces opérateurs dans le système B.16 et en effectuant un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 5, les contraintes suivantes sur les coefficients sont obtenues,

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_1 + \alpha\theta_2 = \frac{1}{2}, \\ \mu_1 + \mu_2 + \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \frac{1}{6}, \\ \gamma\theta_2 + \beta\epsilon_2 + \alpha\mu_2 = \frac{1}{24}, \\ \epsilon_2\gamma + \beta\mu_2 = \frac{1}{120}, \\ \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \theta_1 + \theta_2 = 0, \end{cases} \tag{B.25}$$

qui est un système indéterminé. Il n'est donc pas possible d'obtenir un schéma à deux étapes d'ordre 5 en incluant le terme **LLL** avec une reconstruction quadratique.

Dans le cas de la reconstruction cubique C^0 (voir Section 3.3.3), sur un maillage régulier, seul l'opérateur de matrice de masse est modifié par rapport à la reconstruction quadratique et il s'écrit,

$$M_{R3} = \frac{1}{360}(-7E^2 + 58E + 258 + 58E^{-1} - 7E^{-2}), \tag{B.26}$$

(B.27)

ce qui donne la transformée de Fourier suivante,

$$\hat{M}_{R3}(\xi) = \frac{43}{60} + \frac{29}{90}\cos(\xi) - \frac{7}{180}\cos(2\xi). \tag{B.28}$$

De la même manière que pour la reconstruction quadratique, en effectuant un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 5 du système B.16, les contraintes suivantes sont obtenues,

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_1 + \alpha\theta_2 = \frac{1}{2}, \\ \mu_1 + \mu_2 + \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \frac{1}{6}, \\ \gamma\theta_2 + \beta\epsilon_2 + \alpha\mu_2 = \frac{1}{24}, \\ \epsilon_2\gamma + \beta\mu_2 = \frac{1}{120}, \\ \mu_1 + \mu_2 = 0. \end{cases} \tag{B.29}$$

Dans ce cas, à l'aide du même code d'optimisation que celui utilisé dans la Section B.1.3 (avec les 6 contraintes précédentes, 3 coefficients sont libres sur les 9 coefficients initiaux), le schéma nommé TTG-R3-LLL-O5 est dérivé avec les coefficients suivants,

$$\begin{cases} \alpha = 39/76, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 39/1520, \\ \theta_1 = 1/35, \\ \theta_2 = 34/35, \qquad \text{(TTG-R3-LLL-O5)} \\ \epsilon_1 = -25153/77805, \\ \epsilon_2 = 38/117, \\ \mu_1 = -668/20475, \\ \mu_2 = 668/2047. \end{cases} \tag{B.30}$$

Avec ces coefficients, le développement de Taylor du coefficient d'amplification de TTG-R3-LLL-O5 s'exprime,

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{TTG-R3-LLL-O5}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^4\xi^4 - \frac{1}{120}i\nu^5\xi^5 \\ + \left(-\frac{167\nu^4}{199500} - \frac{\nu^2}{144} - \frac{11}{478800}\right)\nu^2\xi^6 + \mathcal{O}\left(\xi^7\right), \end{aligned} \tag{B.31}$$

ce qui correspond au développement de Taylor d'une exponentielle jusqu'au terme d'ordre 5. Le schéma est donc d'ordre 5. L'équation modifiée associée s'écrit (la procédure utilisée pour l'obtenir est la même que pour les schémas du Chapitre 3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = c\Delta x^5\nu\left(\frac{1321\nu^4}{2394000} - \frac{\nu^2}{144} - \frac{11}{478800}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\ + c\Delta x^6\left(-\frac{47\nu^6}{133000} + \frac{\nu^4}{180} - \frac{7249\nu^2}{2872800} - \frac{17}{15120}\right)\frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + \mathcal{O}\left(\Delta x^7\right). \end{aligned} \tag{B.32}$$

Le système donnant les contraintes pour obtenir un schéma d'ordre 6 s'écrit,

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_1 + \alpha\theta_2 = \frac{1}{2}, \\ \mu_1 + \mu_2 + \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \frac{1}{6}, \\ \gamma\theta_2 + \beta\epsilon_2 + \alpha\mu_2 = \frac{1}{24}, \\ \epsilon_2\gamma + \beta\mu_2 = \frac{1}{120}, \\ \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \gamma\mu_2 = \frac{1}{720}, \\ \gamma\theta_2 + \alpha\mu_2 = 0, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0, \end{cases} \tag{B.33}$$

qui est indéterminé. Pour augmenter davantage l'ordre des schémas, l'idée est d'ajouter en plus du terme **LLL**, le terme **LLLL** aux deux étapes,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n) =& -\alpha\Delta t\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \beta\Delta t^2\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) - \gamma\Delta t^3\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) \\ &+ \delta\Delta t^4\mathbf{LLLL}\left(\mathbf{U}^n\right), \\ \mathbf{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) =& -\Delta t\left(\theta_1\mathbf{L}\left(\mathbf{U}^n\right) + \theta_2\mathbf{L}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) + \Delta t^2\left(\epsilon_1\mathbf{LL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \epsilon_2\mathbf{LL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\ &- \Delta t^3\left(\mu_1\mathbf{LLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \mu_2\mathbf{LLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right) \\ &+ \Delta t^4\left(\lambda_1\mathbf{LLLL}\left(\mathbf{U}^n\right) + \lambda_2\mathbf{LLLL}\left(\tilde{\mathbf{U}}^n\right)\right). \end{aligned} \tag{B.34}$$

Encore une fois, les contraintes sur les coefficients α, β, γ, δ, θ_1, θ_2, ϵ_1, ϵ_2, μ_1, μ_2, λ_1 et λ_2 sont déterminées à l'aide du coefficient d'amplification associé au système (B.34),

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\text{TTG-LLLL}}(k) &= 1 - \left(\alpha\nu\hat{\Delta}_0 - \beta\nu^2\hat{\delta}^2 + \gamma\nu^3\hat{\delta}^3 - \delta\nu^4\hat{\delta}^4\right)/\hat{M}, \\
G_{\text{TTG-LLLL}}(k) &= 1 - \Big[\nu\left(\theta_1\hat{\Delta}_0 + \theta_2\hat{\Delta}_0)\tilde{G}_{\text{TTG-LLLL}}(k)\right) - \nu^2\left(\epsilon_1\hat{\delta}^2 + \epsilon_2\hat{\delta}^2\tilde{G}_{\text{TTG-LLLL}}(k)\right) \\
&\quad + \nu^3\left(\mu_1\hat{\delta}^3 + \mu_2\hat{\delta}^3\tilde{G}_{\text{TTG-LLLL}}(k)\right) - \nu^4\left(\lambda_1\hat{\delta}^4 + \lambda_2\hat{\delta}^4\tilde{G}_{\text{TTG-LLLL}}(k)\right)\Big]/\hat{M},
\end{aligned} \tag{B.35}$$

avec $\hat{\Delta}_0$, $\hat{\delta}^2$, $\hat{\delta}^3$, $\hat{\delta}^4$ et $\hat{M}$ les transformées de Fourier des opérateurs de dérivées première, seconde, troisième, quatrième et de matrice de masse respectivement.

Pour la reconstruction cubique, ces opérateurs sont identiques au cas précédent (la reconstruction quadratique n'est pas considérée puisque dans ce cas, le terme **LLLL** est nul). L'opérateur de la dérivée quatrième qui n'était pas présent dans le cas précédent s'écrit,

$$\delta^4 = (-E^2 + 4E - 6 + 4E^{-1} - E^{-2}), \tag{B.36}$$

ce qui donne la transformée de Fourier suivante,

$$\hat{\delta}^4(\xi) = -6 + 8\cos(\xi) - 2\cos(2\xi). \tag{B.37}$$

Le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 5 du système (B.35) permet d'obtenir les contraintes suivantes sur les coefficients,

$$\begin{cases}
\theta_1 + \theta_2 = 1, \\
\epsilon_1 + \epsilon_1 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\
\mu_1 + \mu_2 + \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma\theta_2 + \beta\epsilon_2 + \alpha\mu_2 = \dfrac{1}{24}, \\
\epsilon_2\gamma + \delta\theta_2 + \beta\mu_2 + \alpha\lambda_2 = \dfrac{1}{120}, \\
\mu_1 + \mu_2 = 0,
\end{cases} \tag{B.38}$$

et jusqu'à l'ordre 6,

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 1, \\ \epsilon_1 + \epsilon_1 + \alpha\theta_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \mu_1 + \mu_2 + \beta\theta_2 + \alpha\epsilon_2 = \dfrac{1}{6}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \gamma\theta_2 + \beta\epsilon_2 + \alpha\mu_2 = \dfrac{1}{24}, \\ \epsilon_2\gamma + \delta\theta_2 + \beta\mu_2 + \alpha\lambda_2 = \dfrac{1}{120}, \\ \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \gamma\mu_2 + \delta\epsilon_2 + \beta\lambda_2 = \dfrac{1}{720}, \\ \gamma\theta_2 + \alpha\mu_2 + \dfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \end{cases} \tag{B.39}$$

Les contraintes pour l'ordre 5 (système (B.38)) présentent l'avantage de laisser 6 coefficients indépendants alors que seulement 3 coefficients sont indépendants en imposant les contraintes d'ordre 6 (système (B.39)). Cette flexibilité accrue donne plus de liberté pour choisir les propriétés des schémas obtenus. Après optimisation, le schéma d'ordre 5 nommé TTG-R3-LLLL-O5 est dérivé et avec la plus grande liberté sur la définition des coefficients, sa dissipation est choisie comme étant assez élevée aux hautes fréquences pour dissiper les *wiggles*. Pour le schéma d'ordre 6 nommé TTG-R3-LLLL-O6, ce contrôle n'est pas possible puisque seulement 3 coefficients sont libres. Ses propriétés de dissipation aux hautes fréquences sont donc moins intéressantes. Les coefficients définissant ces deux schémas sont les suivants,

$$\begin{cases} \alpha = 7/16, \\ \beta = 3/14, \\ \gamma = 67457/926100, \\ \delta = 328696723/8168202000, \\ \theta_1 = -1/14, \\ \theta_2 = -15/14, \\ \epsilon_1 = 5765/32928, \\ \epsilon_2 = -148/1029, \\ \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \lambda_1 = 1/20, \\ \lambda_2 = -1/18, \end{cases} \text{(TTG-R3-LLLL-O5)} \qquad \begin{cases} \alpha = 4/5, \\ \beta = 6/11, \\ \gamma = -466/1815, \\ \delta = -356671/6788100, \\ \theta_1 = 3/8, \\ \theta_2 = 5/8, \\ \epsilon_1 = 115/528, \\ \epsilon_2 = -115/528, \\ \mu_1 = 0, \\ \mu_2 = 0, \\ \lambda_1 = 8846155/26066304, \\ \lambda_2 = -480523/26066304. \end{cases} \text{(TTG-R3-LLLL-O6)} \tag{B.40}$$

Les développements de Taylor des coefficients d'amplification de TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 s'écrivent,

$$z_{\text{TTG-R3-LLLL-O5}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^4\xi^4 - \frac{1}{120}i\nu^5\xi^5 + \left(\frac{9294224344\nu^4}{525317491125} - \frac{4066\nu^2}{324135} - \frac{11}{23040}\right)\nu^2\xi^6 + \mathcal{O}\left(\xi^7\right), \tag{B.41}$$

$$z_{\text{TTG-R3-LLLL-O6}}(\xi) = 1 - i\nu\xi - \frac{1}{2}\nu^2\xi^2 + \frac{1}{6}i\nu^3\xi^3 + \frac{1}{24}\nu^4\xi^4 - \frac{1}{120}i\nu^5\xi^5 - \frac{1}{720}\nu^6\xi^6 + \left(\frac{111961859\nu^6}{23655170880} + \frac{7697\nu^4}{1437480} + \frac{11\nu^2}{4320} + \frac{17}{15120}\right)i\nu\xi^7 + \mathcal{O}\left(\xi^8\right), \tag{B.42}$$

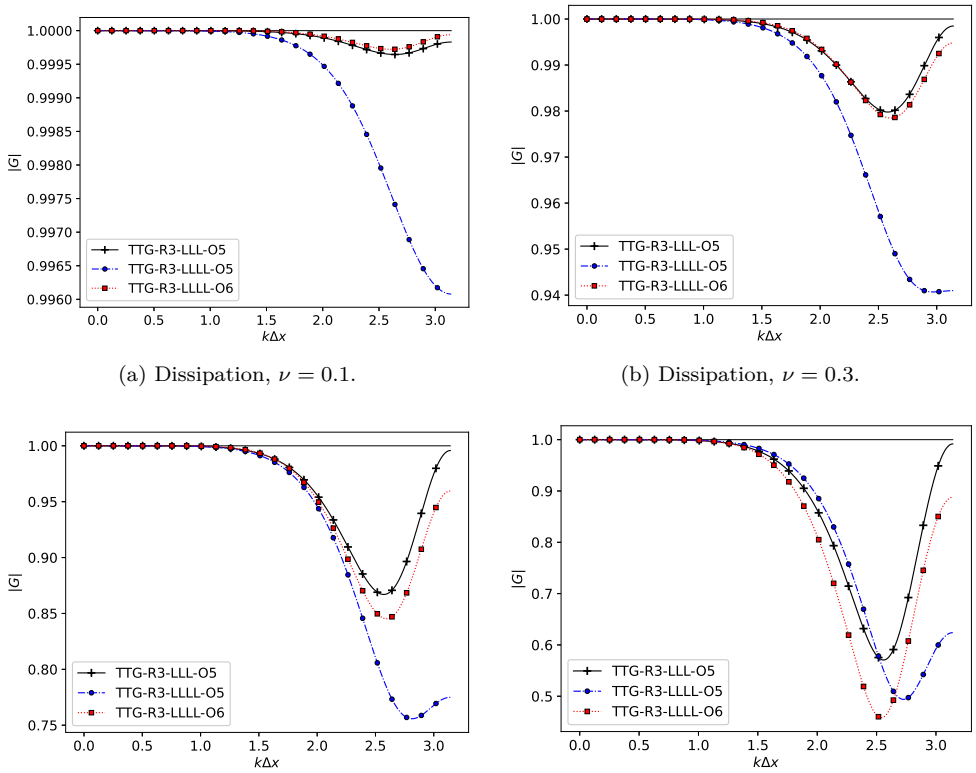
ce qui correspond respectivement à des schémas d'ordre 5 et d'ordre 6. Les équations modifiées associées s'expriment quant à elles comme,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = c\Delta x^5\nu\left(\frac{160381311529\nu^4}{8405079858000} - \frac{4066\nu^2}{324135} - \frac{11}{23040}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + c\Delta x^6\left(-\frac{15587642873\nu^6}{1050634982250} + \frac{290981617\nu^4}{22870965600} - \frac{143\nu^2}{69120} - \frac{17}{15120}\right)\frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + \mathcal{O}\left(\Delta x^7\right), \tag{B.43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = c\Delta x^6\left(-\frac{750878609\nu^6}{165586196160} - \frac{7697\nu^4}{1437480} - \frac{11\nu^2}{4320} - \frac{17}{15120}\right)\frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + c\Delta x^7\nu^3\left(-\frac{635367218647\nu^4}{176940678182400} - \frac{12049\nu^2}{2299968} - \frac{109}{26136}\right)\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}\left(\Delta x^8\right). \tag{B.44}$$

À titre informatif, la dissipation et la dispersion numériques introduites par les schémas TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 sont données en Figs. B.22 et B.23. Le niveau de dissipation plus élevé aux hautes fréquences du schéma TTG-R3-LLLL-O5 est clairement visible par rapport aux deux autres schémas. Pour rappel, cette caractéristique a été permise par la grande flexibilité sur les coefficients liée à ce schéma (6 coefficients indépendants, ce qui facilite l'optimisation).

Pour finir, la Fig. B.24 présente la convergence en maillage d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A-R2, TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6. À noter qu'à l'inverse des cas de convection d'onde entropique montrés dans le Chapitre 3, le script Python utilisé ici est purement 1D. Ces nouveaux schémas avec ajout des termes **LLL** et/ou **LLLL** ne sont pas encore implémentés dans le démonstrateur Python 2D. Sur la convergence en maillage, le gain en ordre des nouveaux schémas est clairement visible. Les deux schémas TTG-R3-LLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6, avec des niveaux de dissipation faibles aux hautes fréquences, sont toutefois très sensibles à la qualité du maillage, ce qui est moins le cas pour le schéma TTG-R3-LLLL-O5 (le schéma TTG4A-R2 obtenu en Section 3.3.2 est aussi ajouté à titre de comparaison).



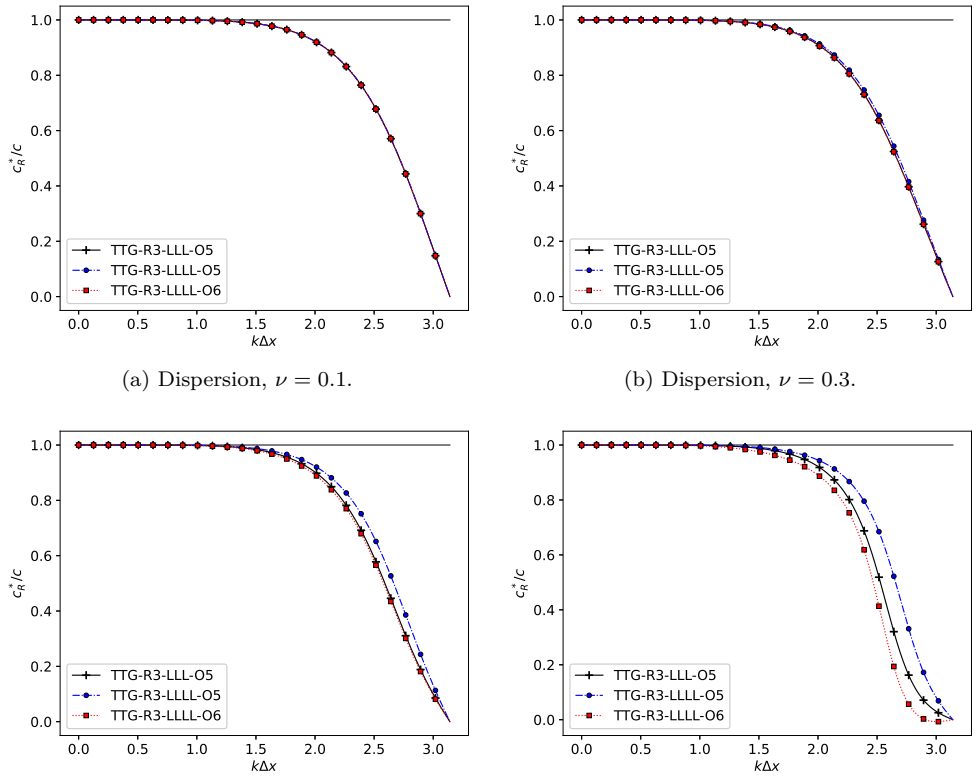
(a) Dissipation, $\nu = 0.1$.

(b) Dissipation, $\nu = 0.3$.

(c) Dissipation, $\nu = 0.5$.

(d) Dissipation, $\nu = 0.7$.

Figure B.22: Dissipation numérique (module de G) introduite par les schémas TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.



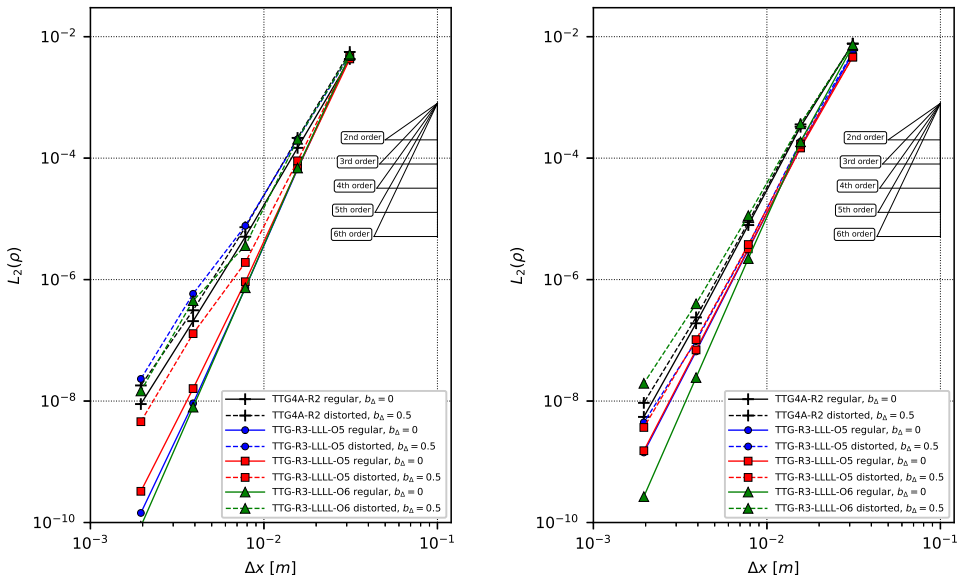
(a) Dispersion, $\nu = 0.1$.

(b) Dispersion, $\nu = 0.3$.

(c) Dispersion, $\nu = 0.5$.

(d) Dispersion, $\nu = 0.7$.

Figure B.23: Dispersion numérique (vitesse de phase adimensionnée c_R^*/c) introduite par les schémas TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 en fonction du nombre d'onde adimensionné pour différents CFL.



(a) $\nu = 0.3$.

(b) $\nu = 0.7$.

Figure B.24: Convergence en maillage de la convection d'une onde entropique monodimensionnelle pour les schémas TTG4A-R2, TTG-R3-LLL-O5, TTG-R3-LLLL-O5 et TTG-R3-LLLL-O6 pour deux valeurs de CFL et pour deux niveaux de perturbations du maillage.

Annexe C

Méthodes de régularisation de maillage

L'idée de cette annexe est de présenter des méthodes de régularisation de maillage. La régularisation de maillage est une technique dont le but d'améliorer la qualité d'un maillage en déplaçant, en supprimant ou en ajoutant de nouveaux éléments du maillage existant. L'intérêt principal de ces méthodes est de permettre au schéma numérique de bénéficier d'un maillage plus régulier pour donner de meilleurs résultats sur une configuration donnée. Cela s'illustre clairement par exemple par les analyses faites au Chapitre 3 dans lesquelles il est montré que l'ordre de convergence du schéma TTGC est significativement dégradé lorsque la qualité du maillage se détériore. La régularisation du maillage permettrait alors d'en améliorer la qualité et ainsi retrouver un ordre de convergence proche de celui sur maillages réguliers.

Deux méthodes qui ont été jugées intéressantes sont décrites dans la suite de cette annexe. La première utilise un opérateur global de Laplacien avec des contraintes supplémentaires pour limiter le déplacement des nœuds aux bords et la déformation des éléments. La deuxième se sert d'une approche éléments finis pour définir la transformation de chaque nœud vers un élément régulier.

C.1 Régularisation par Laplacien global

C.1.1 Description de la méthode

La première méthode de régularisation de maillage est issue des travaux de Ji [145]. Elle consiste à construire une matrice globale $\mathbf{A}$ composée de trois sous matrices, l'une servant à imposer les contraintes du Laplacien global, la deuxième permettant de contraindre la position des nœuds aux bords et la troisième utilisée pour limiter la distorsion des éléments du maillage. Le système linéaire à résoudre s'écrit comme le produit entre la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur contenant les nouvelles coordonnées du maillage $\mathbf{X}'$. L'imposition des contraintes se fait par le vecteur $\mathbf{b}$. Le système linéaire s'écrit,

$$\mathbf{A}\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^F \\ \mathbf{b}^Z \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \tag{C.1}$$

Dans la suite, la définition des matrices et vecteurs précédents se fait pour un maillage composé de n nœuds, dont p nœuds situés sur un bord et de e éléments. L'ensemble $\mathcal{P}$ correspond à l'ensemble des nœuds situés sur un bord et l'ensemble $\mathcal{E}$ à l'ensemble des éléments du maillage.

- La première condition permet de contraindre la position d'un vertex i au centre de gravité défini par la position de l'ensemble de ses voisins directs. Cette condition s'écrit,

$$\sum_{j \in i^*} w_i \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}, \tag{C.2}$$

avec i^* l'index des nœuds appartenant au voisinage direct de i et $w_i = 1/n_i$, n_i étant le nombre de voisins directs de i. Cette condition est imposée pour les n nœuds du maillage. Ainsi, les termes de la matrice $\mathbf{L}$ de dimensions $n \times n$ sont définis par,

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -w_i & \text{si } j \in i^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{C.3}$$

- La deuxième condition permet de contraindre la position de certains nœuds du maillage à se maintenir à leur position initiale. Cette condition est ici utilisée pour les nœuds situés sur les bords du domaine. Les termes de la matrice $\mathbf{F}$ de dimensions $p \times n$ s'écrivent,

$$F_{kj} = \begin{cases} \mu & \text{si } j = i_k \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad 1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq n, \tag{C.4}$$

avec μ un paramètre définissant le poids de la contrainte imposée aux nœuds frontières dans le système linéaire global. Le vecteur $\mathbf{b}^F$ est alors un vecteur de taille $p \times 1$, tel que,

$$b_k^F = \mu \, g_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq p, \text{ avec } g = x \text{ ou } y. \tag{C.5}$$

- La dernière condition impose que le barycentre d'un élément du nouveau maillage soit aussi proche que possible de sa position initiale. Par exemple, pour un triangle défini par les vertex i, j et k, tel que $T = \langle i, j, k \rangle$, cette condition s'écrit,

$$\left(\mathbf{x}'_i + \mathbf{x}'_j + \mathbf{x}'_k\right)/3 = \left(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k\right)/3. \tag{C.6}$$

Cette définition permet d'obtenir les termes de la matrice $\mathbf{Z}$ de dimensions $e \times n$. Dans le cas d'un maillage composé de triangles, ils s'écrivent,

$$Z_{ki} = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = i_1, i_2, i_3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad T_k = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle, \quad 1 \leq k \leq e, 1 \leq i \leq n \tag{C.7}$$

avec λ un autre paramètre permettant de contrôler le poids de cette troisième contrainte dans le système linéaire global. Le vecteur $\mathbf{b}^Z$ associé s'exprime,

$$b_k^Z = \lambda \left(g_{i_1} + g_{i_2} + g_{i_3}\right), \quad T_k = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle, \quad 1 \leq k \leq e, \text{ avec } g = x \text{ ou } y. \tag{C.8}$$

La résolution du système linéaire se fait en inversant la matrice carrée $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pour déterminer le vecteur $\mathbf{X}'$, tel que,

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{C.9}$$

C.1.2 Expérimentation sur différents maillages

La méthode décrite précédemment est implémentée dans un script Python et testée sur différents maillages triangulaires. Pour contrôler la qualité de la régularisation, un critère de qualité est défini comme le ratio entre le périmètre p_r de l'élément de référence de même aire et le périmètre p de l'élément lui-même [96]. Cette définition s'écrit,

$$q(e) = \left(\frac{p_r}{p}\right)^{\beta}, \tag{C.10}$$

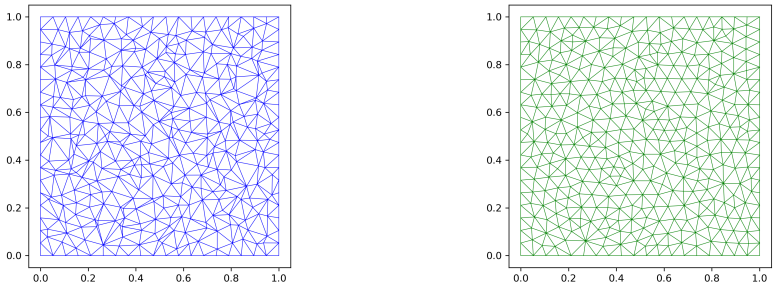
avec dans le cas d'un triangle d'aire A_e et de périmètre p,

$$p_r = 6\sqrt{\frac{A_e}{\sqrt{3}}}. \tag{C.11}$$

Le paramètre β permet de contrôler la distribution de la qualité des maillages. Dans le suite, le valeur utilisée est $\beta = 2$.

Maillage régulier perturbé aléatoirement

Le premier cas test correspond à un maillage régulier dont la position des nœuds est perturbée aléatoirement (à la manière des cas présentés dans le Chapitre 3 du manuscrit).



(a) Maillage initial.

(b) Maillage régularisé.

Figure C.1: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 1.

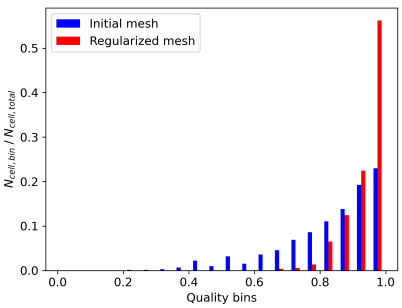
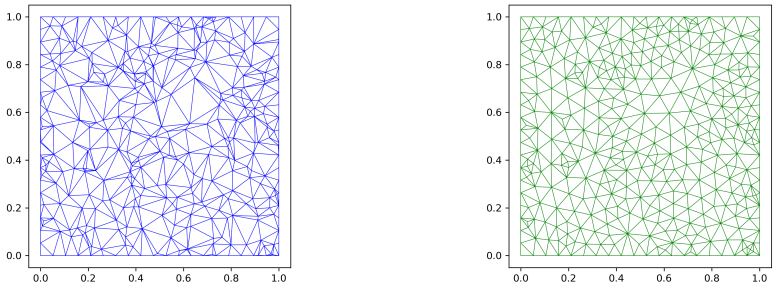


Figure C.2: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 1.

Triangulation d'un nuage de points généré aléatoirement

Ce deuxième cas correspond à la triangulation d'un nuage de points initialisé aléatoirement dans le domaine.



(a) Maillage initial. (b) Maillage régularisé.

Figure C.3: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 2.

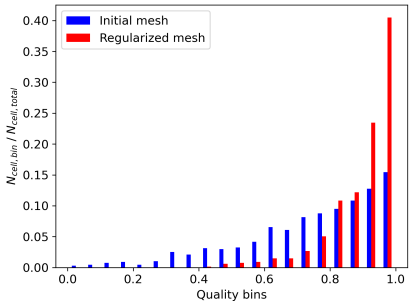
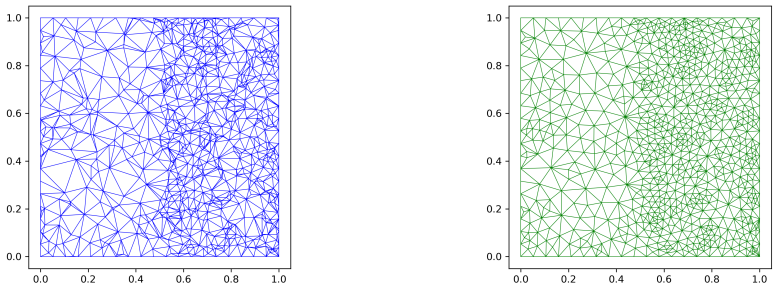


Figure C.4: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 2.

Triangulation d'un nuage de points généré aléatoirement avec différence de raffinement

Ce troisième cas test correspond lui aussi à la triangulation d'un nuage de points initialisé aléatoirement dans le domaine, mais la partie droite du domaine contient quatre fois plus de points que la partie gauche pour simuler une différence de raffinement.



(a) Maillage initial. (b) Maillage régularisé.

Figure C.5: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 3.

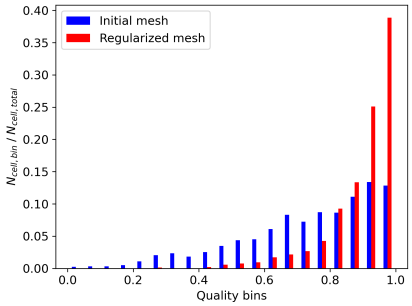
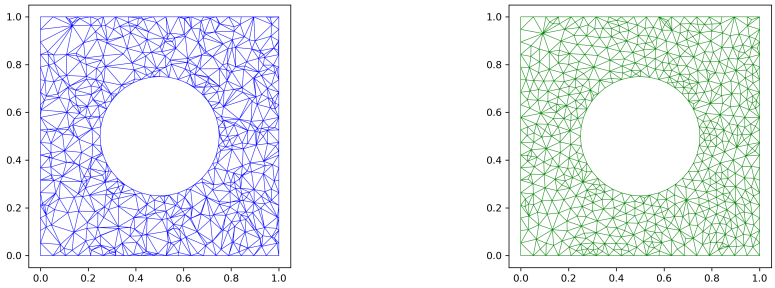


Figure C.6: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 3.

Triangulation d'un nuage de points généré aléatoirement autour d'un cercle

Le dernière cas test correspond de nouveau à la triangulation d'un nuage de points initialisé aléatoirement dans le domaine, mais avec en plus la présence d'un cercle au centre pour simuler la présence d'une géométrie.



(a) Maillage initial.

(b) Maillage régularisé.

Figure C.7: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 4.

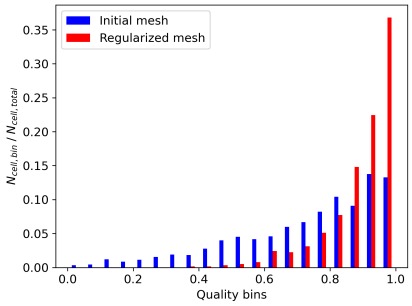


Figure C.8: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 4.

Sur les quatre exemples précédents, malgré la très mauvaise qualité des maillages initiaux, la méthode de régularisation de maillage permet d'améliorer grandement la qualité de ces derniers. Cette amélioration est visible sur les histogrammes comparant la métrique de qualité de l'Eq. (C.10). Dans chaque cas, le maillage régularisé contient majoritairement des mailles de qualité supérieure à 0.9.

C.2 Méthode de régularisation par éléments finis

C.2.1 Description de la méthode

La deuxième méthode de régularisation étudiée est décrite par Durand [96]. Elle repose sur une stratégie consistant à trouver un élément de référence de même surface (ou de même volume en 3D) pour chaque élément du domaine et de trouver son orientation idéale. Ce processus est schématisé sur la Fig. C.9. Une fois l'élément de référence mis à l'échelle et orienté de manière optimale, il est ensuite possible de déterminer les déplacements requis de chaque vertex de l'élément pour obtenir la position et la forme optimales de ce dernier. En supposant que l'élément se comporte comme un matériau élastique et isotrope, ces déplacements sont directement liés aux forces à appliquer à chaque vertex pour causer ces déplacements (Fig. C.10). Pour un nœud donné, les forces requises pour chaque élément en contact avec le nœud sont sommées pour obtenir la valeur finale de la force nodale.

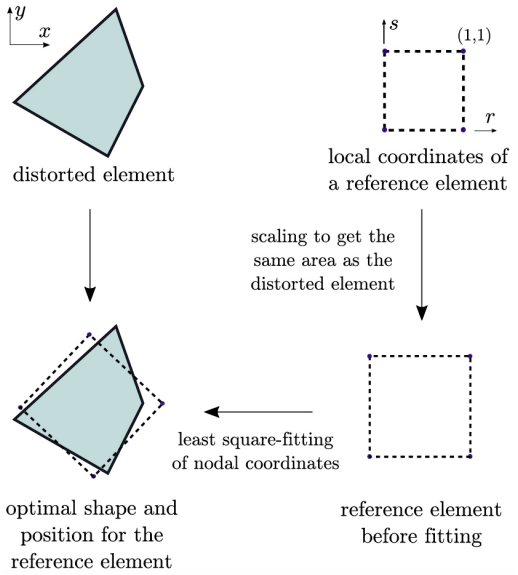


Figure C.9: Méthode permettant d'obtenir l'élément de référence associé à un élément déformé [96].

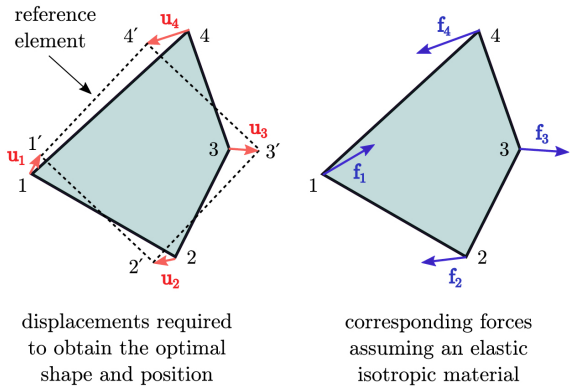


Figure C.10: Déplacements (flèches rouges) et forces correspondantes (flèches bleues) requis pour transformer un élément déformé vers son élément de référence associé [96].

Les étapes permettant de déterminer la force à appliquer à chaque vertex d'un triangle sont détaillées ci-dessous. Les coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) correspondent aux coordonnées des trois vertex du triangle.

$\mathbf{C}_e$ est la matrice qui contient les coordonnées nodales,

$$\mathbf{C}_e = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \tag{C.12}$$

et le centre de gravité du triangle est obtenu à partir de la matrice précédente et stocké dans le vecteur $\overline{\mathbf{C}}_e$, tel que,

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_e\right)_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{C}_e\right)_{ij}. \tag{C.13}$$

L'aire A_e du triangle s'exprime facilement à partir de ses coordonnées,

$$A_e = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|, \tag{C.14}$$

et le paramètre s est calculé à partir de A_e, comme $s = \sqrt{A_e}$.
Les coordonnées d'un élément de référence triangulaire s'écrivent dans la matrice $\mathbf{C}_l$ comme,

$$\mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ \dfrac{l}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}l \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad l = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}. \tag{C.15}$$

De manière à obtenir un élément de référence de même aire que l'élément initial, le facteur s est utilisé pour multiplier les coordonnées de l'élément de référence, telles que,

$$\mathbf{C}_r = s\mathbf{C}_l. \tag{C.16}$$

Et comme pour la matrice $\mathbf{C}_e$, les coordonnées du centre de gravité de l'élément de référence mises à l'échelle sont stockées dans le vecteur $\overline{\mathbf{C}}_r$, avec,

$$\left(\overline{\mathbf{C}}_r\right)_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{C}_r\right)_{ij}. \tag{C.17}$$

Par la suite, la matrice $\mathbf{H}$ est définie à partir des matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$, telle que,

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}', \tag{C.18}$$

où,

$$\mathbf{D}'_{ij} = \left(\mathbf{C}_e\right)_{ij} - \left(\overline{\mathbf{C}}_e\right)_j, \tag{C.19}$$

$$\mathbf{D}_{ij} = (\mathbf{C}_r)_{ij} - \left(\overline{\mathbf{C}}_r\right)_j . \tag{C.20}$$

La décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{H}$ permet d'obtenir les matrices de rotation $\mathbf{R}$ et de translation $\mathbf{T}$ optimales pour transformer l'élément initial vers l'élément de référence. Elles s'expriment comme,

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^T, \tag{C.21}$$

$$\mathbf{T} = \overline{\mathbf{C}}_e - \mathbf{R}\overline{\mathbf{C}}_r, \tag{C.22}$$

avec $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$.

Les coordonnées de l'élément de référence mis à l'échelle et positionné de manière optimale sont données par la matrice $\mathbf{C}$, telle que,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_r\mathbf{R}^T + \mathbf{T}_m, \tag{C.23}$$

avec $\mathbf{T}_m$ la matrice définie par,

$$(\mathbf{T}_m)_{ij} = \mathbf{T}_j. \tag{C.24}$$

Le déplacement requis entre les coordonnées initiales et les coordonnées de l'élément de référence est facilement obtenu par,

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{C} - \mathbf{C}_e. \tag{C.25}$$

En considérant que l'élément est un matériau isotrope avec un module de Young constant et un coefficient de Poisson nul, les forces à imposer pour induire les déplacements $\mathbf{U}_e$ sont simplement proportionnelles à $\mathbf{U}_e$, d'où,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e\mathbf{U}_e, \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.26}$$

Les matrices précédentes définies pour chaque élément du maillage sont ensuite assemblées dans des matrices globales avec des multiplicateurs de Lagrange [29] pour imposer des contraintes de déplacement (en particulier aux bords),

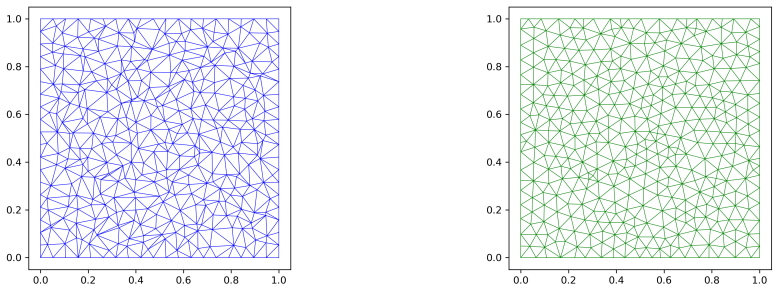
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \tag{C.27}$$

où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, et $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont liés aux contraintes de déplacements. Le système linéaire précédent est ensuite inversé pour obtenir les valeurs de déplacement de chaque nœud du maillage. Plusieurs itérations du processus décrit sont réalisées pour converger vers la position finale des nœuds du maillage régularisé. Les étapes permettant de réaliser la même méthodologie pour d'autres types d'éléments sont détaillées dans [96].

C.2.2 Expérimentation sur différents maillages

Les maillages sur lesquels la deuxième méthodologie de régularisation est expérimentée sont les mêmes que les trois premiers de la méthode précédente.

Maillage régulier perturbé aléatoirement



(a) Maillage initial. (b) Maillage régularisé.

Figure C.11: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 1.

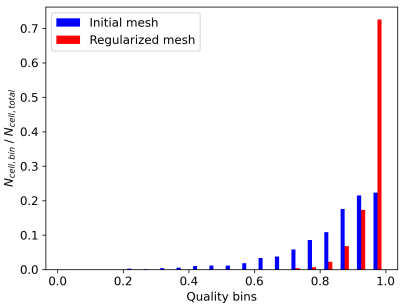
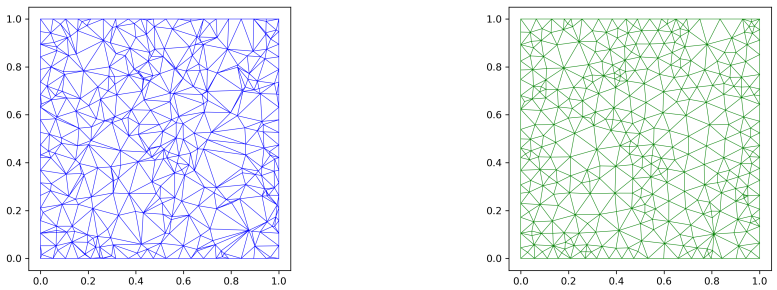


Figure C.12: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 1.

Triangulation d'un nuage de points généré aléatoirement



(a) Maillage initial. (b) Maillage régularisé.

Figure C.13: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 2.

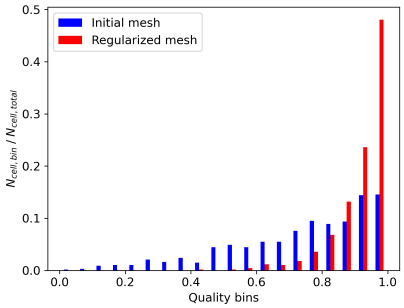
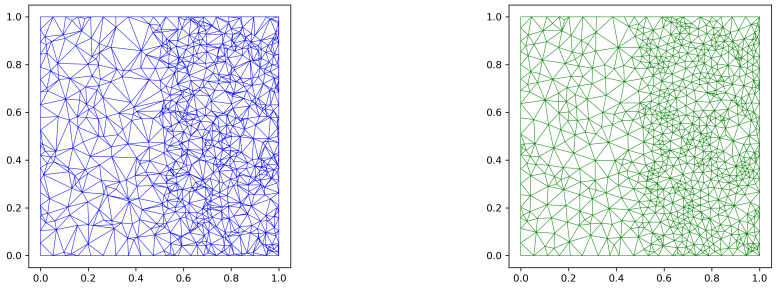


Figure C.14: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 2.

Triangulation d'un nuage de points généré aléatoirement avec différence de raffinement



(a) Maillage initial.

(b) Maillage régularisé.

Figure C.15: Comparaison des maillages initial et régularisé pour le cas 3.

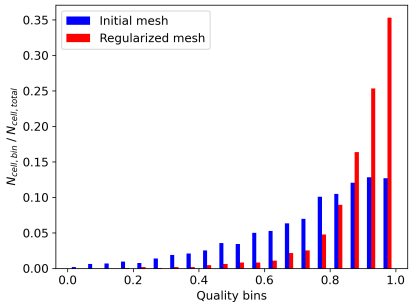


Figure C.16: Histogramme comparant la distribution du paramètre $q(e)$ des maillages initial et régularisé pour le cas 3.

C.3 Implémentation des méthodes précédentes dans AVBP et parallélisation

Les deux méthodes de régularisation précédentes requièrent l'inversion d'un système linéaire de très grandes dimensions. Pour les exemples considérés, l'implémentation de cette inversion en 2D sur des maillages relativement petits ne pose pas de problèmes particuliers. Néanmoins, pour des maillages de plusieurs millions d'éléments, l'inversion doit être implémentée de manière efficace et

si possible en permettant la parallélisation. Cette parallélisation est rendue possible par la librairie PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*) [22, 23, 24] qui est une librairie open-source permettant, entre autres, la définition parallèle de vecteurs et de matrices, ainsi que l'inversion très performante de systèmes linéaires.

Les routines de la librairie peuvent être appelées directement à partir d'un code Fortran. Le code Fortan suivant donne un exemple d'implémentation de la première méthode de régularisation pour la composante x. Le code ci-dessous permet en particulier de décrire le remplissage et le partitionnement des matrices globales avec le formalisme du maillage associé à AVBP.

```
! Initialisation
call PetscInitialize(PETSC_NULL_CHARACTER, ierr)

! Global size of the matrix
petsc_nbr_lines = grid%ntnode_old + sum(bound_table_buffer(1:npart)) + grid%ntcell
petsc_nbr_columns =  grid%ntnode_old

! Matrix and vectors initialisation / partitioning
call MatCreate(PETSC_COMM_WORLD, A, ierr)
call MatSetType(A, MATMPIAIJ, ierr)
call MatSetSizes(A, PETSC_DECIDE, PETSC_DECIDE, petsc_nbr_lines, petsc_nbr_columns, ierr)
call MatMPIAIJSetPreallocation(A,max_nneino_buffer,PETSC_NULL_INTEGER,max_nneino_buffer,
    PETSC_NULL_INTEGER,ierr)
call MatGetOwnershipRange(A, istart, iend, ierr)
call MatCreateVecs(A, x, b, ierr)

! First constraint on barycenter of neighbours (matrix L)
DO n=1,grid%nnode

        global_n_petsc = grid%pmesh%LocalNodeToGlobal(n)-1
        value_petsc = 1.0

        IF ( n <= grid%mynodes ) THEN
            nbr_lines = nbr_lines + 1
            call MatSetValue(A, global_n_petsc, global_n_petsc, value_petsc,
                INSERT_VALUES, ierr)
        END IF

        DO i=1,grid%nneino(n)

            global_nei_petsc = grid%pmesh%LocalNodeToGlobal(grid%neino(grid%neibegin(n) +
                i -1))-1
            value_petsc = -1.0/grid%nneino_global(n)
            call MatSetValue(A, global_n_petsc, global_nei_petsc, value_petsc,
                INSERT_VALUES, ierr)

        END DO

END DO

! Second constraint on boundary nodes (matrix F)
start_line = sum(bound_table_buffer(1:mypart))+grid%ntnode_old

DO n=1,bnd_count

    nbr_lines_petsc = start_line-1+n
    global_n_petsc = grid%pmesh%LocalNodeToGlobal(bnd_nodes(n))-1

    value_petsc = 5.0
    call MatSetValue(A, nbr_lines_petsc, global_n_petsc, value_petsc, INSERT_VALUES, ierr
        )

    value_petsc = 5.0 * grid%x(1,bnd_nodes(n))
    call VecSetValue(b, nbr_lines_petsc, value_petsc, INSERT_VALUES, ierr)

END DO

! Third constraint on element barycenter (matrix Z)
start_line = sum(bound_table_buffer(1:npart))+grid%ntnode_old+sum(element_table_buffer(1:
    mypart))

DO n=1,count_element

        nbr_lines_petsc = start_line-1+n
        value_petsc_sum = 0.0

        DO nv=1,grid%nvert_max

            current_node = vertex_elements_all(nv,n)
```

```
            value_petsc = 0.05

            IF ( current_node /= 0.0 ) THEN
                    global_n_petsc = grid%pmesh%LocalNodeToGlobal(int(current_node))-1
                    call MatSetValue(A, nbr_lines_petsc, global_n_petsc, value_petsc,
                        INSERT_VALUES, ierr)
                    value_petsc_sum = value_petsc_sum + grid%x(1,current_node)
            END IF

        END DO

        value_petsc_sum = value_petsc_sum * value_petsc
        call VecSetValue(b, nbr_lines_petsc, value_petsc_sum, INSERT_VALUES, ierr)

END DO

! Matrix and vector assembly
call MatAssemblyBegin(A, MAT_FINAL_ASSEMBLY, ierr)
call MatAssemblyEnd(A, MAT_FINAL_ASSEMBLY, ierr)

call VecAssemblyBegin(b, ierr)
call VecAssemblyEnd(b, ierr)

call VecCreate(PETSC_COMM_WORLD, Atb, ierr)
call VecSetType(Atb, VECMPI, ierr)
call VecSetSizes(Atb, PETSC_DECIDE, petsc_nbr_columns, ierr)
call VecSetUp(Atb, ierr)

call MatTransposeMatMult(A, A, MAT_INITIAL_MATRIX, PETSC_DEFAULT_REAL, AtA, ierr)
call MatMultTranspose(A, b, Atb, ierr)

! Matrix inversion
call KSPCreate(PETSC_COMM_WORLD, ksp, ierr)
call KSPSetOperators(ksp, AtA, AtA, ierr)
call KSPSetFromOptions(ksp, ierr)
rtol = 1e-25
abstol = 1e-50
dtol = 10000.0
maxits = 10000
call KSPSetTolerances(ksp,rtol,abstol,dtol,maxits,ierr)

call KSPSolve(ksp, Atb, x, ierr)

! Remove arrays and matrices from memory
call KSPDestroy(ksp, ierr)
call MatDestroy(A, ierr)
call MatDestroy(AtA, ierr)
call VecDestroy(Atb, ierr)
call VecDestroy(b, ierr)

! Scatter array of coordinates to all processors
call VecScatterCreateToAll(x, ctx, x_final, ierr)
call VecScatterBegin(ctx,x,x_final,INSERT_VALUES,SCATTER_FORWARD, ierr)
call VecScatterEnd(ctx,x,x_final,INSERT_VALUES,SCATTER_FORWARD, ierr)
call VecScatterDestroy(ctx, ierr)

! Convert coordinates array from Petsc format to Fortan array
call VecGetArrayReadF90(x_final,x_final_array,ierr)
x_final_array_values(1:grid%ntnode_old) = x_final_array(1:grid%ntnode_old)
call VecRestoreArrayReadF90(x_final,x_final_array,ierr)

! Freeze boundary node positions
DO n=1,grid%nnode
        IF ( is_bound_node(n) /= 1 ) THEN
             global_n = grid%pmesh%LocalNodeToGlobal(n)
             grid%x(1,n) = x_final_array_values(global_n)
        END IF
END DO

DEALLOCATE ( x_final_array_values )
call VecDestroy(x_final, ierr)
call VecDestroy(x, ierr)

call PetscFinalize(ierr)
```

C.4 Conclusion

Dans la lignée des différents travaux qui ont été réalisés au cours de cette thèse pour améliorer le comportement des schémas numériques sur maillages perturbés, les méthodes de régularisation de

maillage constitue une piste envisageable pour répondre à ce problème. Les quelques cas tests simples présentés ont montré qu'il était possible d'améliorer significativement la qualité d'un maillage à l'aide de différentes méthodes disponibles dans la littérature. Leur application sur des géométries complexes posent toutefois certaines difficultés puisque la régularisation de maillage n'est en général pas suffisante pour restaurer les propriétés du schéma numérique identiques à celles obtenues sur maillages réguliers. C'est pourquoi cette piste n'a pas été considérée davantage dans ce manuscrit.

Annexe D

Méthode de reconstruction des flux dans un formalisme *node-centered*

Cette annexe décrit des travaux qui ont été effectués pendant cette thèse autour d'une méthode de reconstruction des flux dans un formalisme *node-centered*. La problématique initiale qui a motivé ces travaux est la même que celle décrite tout au long du Chapitre 3, c'est-à-dire le développement d'un schéma d'ordre élevé et peu sensible à la qualité du maillage. La Chapitre 3 s'intéresse à des schémas issus du formalisme éléments finis qui s'inscrivent naturellement dans le code *cell-vertex* AVBP. Les développements présentés dans cette annexe sont assez différents puisqu'ils s'intéressent au formalisme volumes finis en *node-centered*. Néanmoins, l'objectif reste le même pour obtenir un schéma aussi robuste que possible à la qualité du maillage.

D.1 Généralités

Le formalisme utilisé dans la suite de cette section correspond à celui introduit dans le papier de Bernard [32]. À l'aide d'une expansion de Taylor autour de chaque noeud du maillage, un système matriciel permet d'établir une relation entre des opérateurs classiques (L_I) et des opérateurs d'ordre élevé (H_I). Avec les notations de [32], ce système matriciel s'écrit,

$$\mathrm{C}_I^{\mathcal{O}3} \cdot \mathrm{H}_I = \mathrm{L}_I + \mathrm{E}, \tag{D.1}$$

avec,

$$\mathrm{H}_I = \begin{pmatrix} \phi_I \\ \boldsymbol{\nabla}\phi_I \\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\phi_I \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}_I = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^{\Omega_I} \\ \mathcal{G}_I(\phi) \\ \mathcal{H}_I(\phi) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left(\Delta^3\right) \\ \mathcal{O}\left(\Delta^2\right) \\ \mathcal{O}(\Delta) \end{pmatrix}, \tag{D.2}$$

et,

$$C_I^{\mathcal{O}3} = \begin{pmatrix} \overline{1}^{\Omega_I} & \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} & \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} \\ \mathcal{G}_I(1) & \mathcal{G}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I\right) & \frac{1}{2}\mathcal{G}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I\right) \\ \mathcal{H}_I(1) & \mathcal{H}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I\right) & \frac{1}{2}\mathcal{H}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I\right) \end{pmatrix}. \tag{D.3}$$

Le principe de la méthode repose sur l'inversion du système précédent pour obtenir les opérateurs d'ordre élevé à partir des opérateurs classiques. La matrice $C_I^{\mathcal{O}3}$, appelée matrice de convolution,

s'exprime uniquement à partir des caractéristiques géométriques du maillage et elle peut donc être calculée, inversée et stockée en pré-traitement.

Les termes $\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I}$ et $\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I}$ correspondent respectivement aux moments d'ordre 1 et d'ordre 2 du volume dual Ω_I associé au nœud I. Ces moments s'expriment comme,

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} = \frac{1}{V_I}\int_{\Omega_I} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\,\mathrm{d}V = \mathcal{O}(\Delta), \tag{D.4}$$

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} = \frac{1}{V_I}\int_{\Omega_I} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\otimes(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\,\mathrm{d}V = \mathcal{O}\left(\Delta^2\right), \tag{D.5}$$

avec V_I le volume du domaine Ω_I et x_I le vecteur contenant les coordonnées du nœud I.

Dans le cas d'un simplex (qui correspond à un segment en 1D, un triangle en 2D ou un tétraèdre en 3D), les intégrales précédentes peuvent s'écrire de façon générale par sommation sur les vertex du simplex par rapport à l'origine,

$$\mathbf{M}^1_O = \frac{1}{V}\int_\Omega \mathbf{x}\mathrm{d}V = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d+1}\mathbf{x}_i, \tag{D.6}$$

$$\mathbf{M}^2_O = \frac{1}{V}\int_\Omega \mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\mathrm{d}V = \frac{1}{(d+1)(d+2)}\left[\left(\sum_{i=1}^{d+1}\sum_{j=1}^{d+1}\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{x}_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{d+1}\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{x}_i\right)\right], \tag{D.7}$$

avec d la dimension du simplex. Les formules de translation suivantes permettent ensuite d'exprimer ces moments en n'importe quel point I du domaine,

$$\mathbf{M}^1_I = \mathbf{M}^1_O - \mathbf{x}_I, \tag{D.8}$$

$$\mathbf{M}^2_I = \mathbf{M}^2_O - \mathbf{x}_I\otimes\mathbf{M}^1_O - \mathbf{M}^1_O\otimes\mathbf{x}_I + \mathbf{x}_I\otimes\mathbf{x}_I. \tag{D.9}$$

Ainsi, pour évaluer les intégrales des Eqs. (D.4) et (D.5), il suffit de décomposer le volume nodal Ω_I en plusieurs simplex pour utiliser les formules de sommation précédentes. Cette décomposition est illustrée sur la Fig. D.1. Les carrés rouges correspondent aux centres de gravité des triangles en contact avec le nœud I et les croix vertes sont les demi-arrêtes de ces triangles. Chaque triangle ajoute ainsi deux simplex au calcul des moments associés au nœud I.

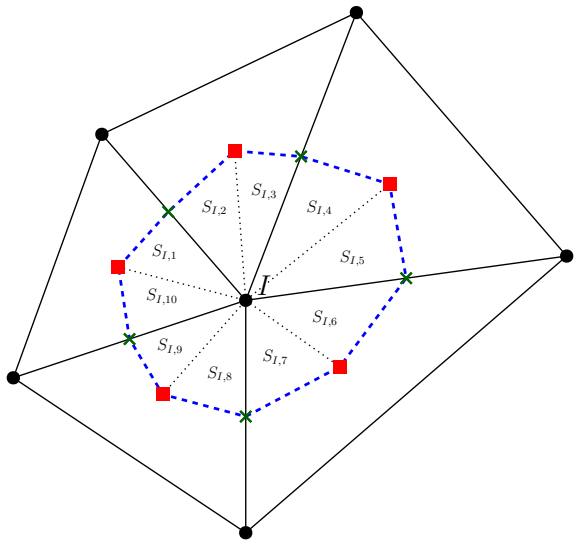


Figure D.1: Décomposition en simplex du volume dual associé au nœud I.

Par ailleurs, le calcul des termes de la matrice de convolution $C_I^{\mathcal{O}3}$ nécessite aussi l'introduction des opérateurs de gradient et Hessienne. Dans le formalisme décrit dans [32], ces opérateurs prennent la forme suivante,

$$\mathcal{G}_I(\phi) = \frac{1}{V_I} \sum_{J \in \mathcal{N}_1} \frac{\phi_I + \phi_J}{2} \times \mathbf{S}_{IJ}, \tag{D.10}$$

$$\mathcal{H}_I(\phi) = \frac{1}{V_I} \sum_{J \in \mathcal{N}_I} \left(\frac{\phi_J - \phi_I}{\|\mathbf{IJ}\|} \right) \times \frac{1}{2} \left(\mathbf{n}_{IJ} \otimes \mathbf{S}_{IJ} + \mathbf{S}_{IJ} \otimes \mathbf{n}_{IJ} \right), \tag{D.11}$$

avec $\mathcal{N}_I$ le nombre de vertex connectés au nœud I par une arrête du maillage, *i.e.* les voisins directs de I. $\mathbf{S}_{IJ}$ correspond au vecteur de la face entre les nœuds I et J et est calculé par sommation des deux vecteurs $\mathbf{s}_{IJ}^1$ et $\mathbf{s}_{IJ}^2$. Le vecteur $\mathbf{n}_{IJ}$ correspond au vecteur unité de la direction de l'arrête $[IJ]$. Ces notations sont représentées sur la Fig. D.2.

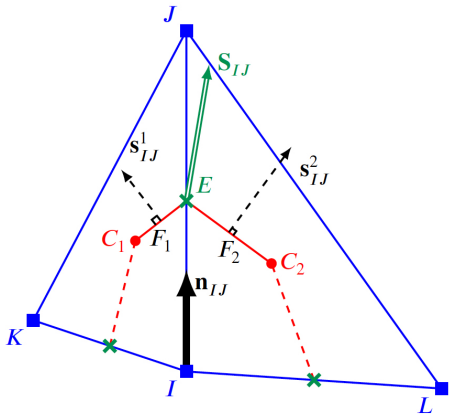


Figure D.2: Représentation des notations introduites pour un nœud I dont le voisinage est composé des nœuds J, K et L [32].

Avec toutes les notations précédentes, il est maintenant possible d'exprimer tous les termes de la matrice $C_I^{\mathcal{O}3}$. L'expression de ces termes est détaillée pour un cas 2D par les équations qui suivent. S_I correspond au nombre de simplex qui compose le volume dual du nœud I après la division décrite précédemment.

$$\overline{1}^{\Omega_I} = 1. \tag{D.12}$$

Le moment d'ordre 1 par rapport à l'origine se calcule grâce à la formule de sommation précédente,

$$\overline{\mathbf{\Delta}_O}^{\Omega_I} = \frac{1}{V_I} \sum_{k=1}^{S_I} \left(\frac{V_k}{3} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{x}_i^k \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{V_I} \sum_{k=1}^{S_I} \left(\frac{V_k}{3} \sum_{i=1}^{3} x_i^k \right) & \frac{1}{V_I} \sum_{k=1}^{S_I} \left(\frac{V_k}{3} \sum_{i=1}^{3} y_i^k \right) \end{array} \right), \tag{D.13}$$

puis par translation, le moment par rapport à I est obtenu,

$$\overline{\mathbf{\Delta}_I}^{\Omega_I} = \overline{\mathbf{\Delta}_O}^{\Omega_I} - \mathbf{x}_I. \tag{D.14}$$

De la même manière, le moment d'ordre 2 se calcule par,

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}_O \otimes \boldsymbol{\Delta}_O}^{\Omega_I} = \frac{1}{V_I}\sum_{k=1}^{S_I}\left(\frac{V_k}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{x}_i^k \otimes \mathbf{x}_j^k\right) + \left(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{x}_i^k \otimes \mathbf{x}_i^k\right)\right]\right), \tag{D.15}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{V_I}\sum_{k=1}^{S_I}\left(\frac{V_k}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i^k x_j^k\right) + \left(\sum_{i=1}^{3}x_i^k x_i^k\right)\right]\right) & \frac{1}{V_I}\sum_{k=1}^{S_I}\left(\frac{V_k}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i^k y_j^k\right) + \left(\sum_{i=1}^{3}x_i^k y_i^k\right)\right]\right) \\ \frac{1}{V_I}\sum_{k=1}^{S_I}\left(\frac{V_k}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_i^k x_j^k\right) + \left(\sum_{i=1}^{3}y_i^k x_i^k\right)\right]\right) & \frac{1}{V_I}\sum_{k=1}^{S_I}\left(\frac{V_k}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_i^k y_j^k\right) + \left(\sum_{i=1}^{3}y_i^k y_i^k\right)\right]\right) \end{pmatrix}, \tag{D.16}$$

puis par translation par rapport au nœud I,

$$\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} = \overline{\boldsymbol{\Delta}_O \otimes \boldsymbol{\Delta}_O}^{\Omega_I} - \mathbf{x}_I \otimes \overline{\boldsymbol{\Delta}_O}^{\Omega_I} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_O}^{\Omega_I} \otimes \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_I \otimes \mathbf{x}_I. \tag{D.17}$$

Une fois ces moments obtenus, les Eqs. D.10 et D.11 permettent de calculer les termes restants,

$$\mathcal{G}_I(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{D.18}$$

$$\mathcal{G}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,x} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,x} \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,y} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,y} \end{pmatrix}, \tag{D.19}$$

$$\mathcal{G}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,x} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,x} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,x} \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,y} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,y} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I}\frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_I} + \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_J}}{2}\cdot \mathrm{S}_{IJ,y} \end{pmatrix}, \tag{D.20}$$

$$\mathcal{H}_I(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{D.21}$$

$$\mathcal{H}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I\right) = \begin{pmatrix} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x} & \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} + \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x}) & & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} + \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x}) \\ & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_x^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} & \\ & & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}_y^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} \end{pmatrix}, \tag{D.22}$$

$$\mathcal{H}_I\left(\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I\right) =$$

$$\begin{pmatrix} & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x} & \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} + \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x}) & & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} + \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x}) \\ & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xx}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} & \\ & & \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{xy}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} \end{pmatrix} \tag{D.23}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x} \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{IJ,x} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} + \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,x}) \\ \frac{1}{V_I}\sum_{J\in\mathcal{N}_I} \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_J} - \overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}_{yy}^{\Omega_I}}{\Delta_{IJ}} \cdot \mathbf{n}_{IJ,y} \cdot \mathrm{S}_{IJ,y} \end{pmatrix}.$$

D.2 Implémentation dans AVBP

Pour permettre l'implémentation de cette méthode dans AVBP, plusieurs étapes sont nécessaires.

D.2.1 Pré-traitement

Tout d'abord, en pré-traitement, il faut,

- construire une connectivité nœud à nœud (qui n'est pas présente dans AVBP puisque le formalisme *cell-vertex* ne requiert pas cette connectivité),
- calculer le volume et les moments de chaque nœud en divisant le volume dual en plusieurs simplex,
- trouver les normales de chaque bord du volume nodal,
- calculer chaque terme de la matrice de convolution,
- inverser et stocker l'inverse de la matrice de convolution.

D.2.2 Calcul des flux

Pendant la boucle temporelle, il est maintenant possible de calculer les gradients et les Hessiennes avec les formules classiques. Ensuite, par un produit entre l'inverse de la matrice de convolution stockée en pré-traitement et le vecteur contenant les opérateurs calculés, les opérateurs ordre élevé sont obtenus. Ces opérateurs permettent donc de définir un polynôme pour chaque grandeur conservative au sein de chaque élément du domaine, de la forme,

$$\bar{\phi}^{\Omega_I} = \phi_I \overline{1}^{-\Omega_I} + (\boldsymbol{\nabla}\phi_I) \cdot \overline{\boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\phi_I) : \left(\overline{\boldsymbol{\Delta}_I \otimes \boldsymbol{\Delta}_I}^{\Omega_I} \right) + \mathcal{O}\left(\Delta^3\right). \tag{D.24}$$

Cela permet entre autres d'exprimer les grandeurs conservatives aux bords de chaque volume dual et donc de calculer les flux aux bords. Étant donné que les polynômes sont définis au sein de chaque élément du domaine, rien ne garantit la continuité des flux à l'interface entre deux éléments. Ce problème est bien connu dans les méthodes ordres élevés et dans ce cas, le calcul des flux numériques à l'interface se définit comme un problème de Riemann.

La solution la plus simple pour combiner les flux provenant de la gauche et de la droite du bord consiste à faire la moyenne des deux valeurs. Le flux moyen s'exprime alors comme,

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_{c,1/2} = \frac{1}{2} \left(\overline{\boldsymbol{F}}_L + \overline{\boldsymbol{F}}_R \right). \tag{D.25}$$

Cette formulation correspond à un schéma centré et est malheureusement instable. Pour stabiliser le schéma centré, l'option très couramment utilisée consiste à ajouter un terme dissipatif au flux centré précédent. Cela s'écrit,

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} + \tilde{\boldsymbol{F}}_d. \tag{D.26}$$

Pour exprimer le terme dissipatif, plusieurs expressions existent.

- Schéma de Roe classique [230].

  Le flux dissipatif s'exprime,

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_{d,1/2} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{R}_{1/2} \boldsymbol{\Lambda}_{1/2} \left(\boldsymbol{R}_{1/2} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L \right), \tag{D.27}$$

avec

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \tag{D.28}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1/2} = \begin{bmatrix} |U| & & & \\ & |U| & & \\ & & |U-c| & \\ & & & |U+c| \end{bmatrix}, \tag{D.29}$$

$$\boldsymbol{R}_{1/2} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 1 & 1 \\ n_x u & n_y u & u - n_x c & u + n_x c \\ n_x v & n_y v & v - n_y c & v + n_y c \\ \frac{V_M^2}{2} n_x & \frac{V_M^2}{2} n_y & H - cU & H + cU \end{bmatrix}, \tag{D.30}$$

où $V_M^2 = u^2 + v^2 + w^2$ et $U = n_x u + n_y v + n_z w$.

- Dans les cas tests présentés par la suite, le schéma de Roe classique s'est montré très dissipatif. Pour réduire le niveau de dissipation, une autre expression du flux dissipatif a été utilisée. Elle correspond au schéma *all-speed Roe* décrit dans [169]. Le flux dissipatif s'exprime,

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_{d,1/2} = -\frac{1}{2} \left\{ \xi \begin{bmatrix} \Delta\rho \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho w) \\ \Delta(\rho E) \end{bmatrix} + \delta p \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ U \end{bmatrix} + \delta U \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho H \end{bmatrix} \right\}, \tag{D.31}$$

avec, les β et ξ égaux à,

$$\beta = \frac{\Delta p}{c^2}, \tag{D.32}$$

$$\xi = \alpha_1 \left[1 + f^{\alpha_2}(M)\right] |U|, \tag{D.33}$$

δp qui s'exprime en deux termes,

$$\delta p = \delta p_u + \delta p_p, \tag{D.34}$$

$$\delta p_u = f^{\alpha_2}(M)\left[|U| - \frac{|U-c|+|U+c|}{2}\right][U\Delta\rho - \Delta(\rho U)], \tag{D.35}$$

$$\delta p_p = -\frac{|U-c|-|U+c|}{2}c\beta, \tag{D.36}$$

de même pour δU,

$$\delta U = \delta U_u + \delta U_p, \tag{D.37}$$

$$\delta U_u = \frac{|U-c|-|U+c|}{2\rho c}[U\Delta\rho - \Delta(\rho U)], \tag{D.38}$$

$$\delta U_p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{|U-c|+|U+c|}{2} - |U|\right)\beta. \tag{D.39}$$

La fonction $f(M)$ s'écrit,

$$f(M) = \min\left(M\frac{\sqrt{4+(1-M^2)^2}}{1+M^2}, 1\right), \tag{D.40}$$

et les paramètres α_1 et α_2 sont respectivement fixés à 0.5 et 4, conformément aux recommandations du papier décrivant la méthode [169].

D.2.3 Intégration temporelle

La méthode la plus courante pour réaliser l'intégration temporelle d'un schéma est la méthode de Runge-Kutta [128]. La forme générale de la méthode de Runge-Kutta à M étapes est la suivante,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n, \\
\mathbf{U}^{(2)} &= \mathbf{U}^n - \Delta t\alpha_2\mathbf{N}^{(1)}, \\
\mathbf{U}^{(3)} &= \mathbf{U}^n - \Delta t\alpha_3\mathbf{N}^{(2)}, \\
&\vdots \\
\mathbf{U}^{(M)} &= \mathbf{U}^n - \Delta t\alpha_M\mathbf{N}^{(M-1)}, \\
\mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n - \Delta t\sum_{p=1}^{M}\beta_p\mathbf{N}^{(p)},
\end{aligned} \tag{D.41}$$

avec $\mathbf{N}^{(m)}$ le vecteur contenant le résidu des grandeurs conservatives à l'étape m. Dans la suite, c'est la version des schémas de Runge-Kutta à faible stockage qui sera utilisée. Dans cette version, l'étape m de la méthode n'est obtenue qu'à partir de la solution de l'étape précédente $m-1$. Ainsi,

seules la solution au pas de temps n et la solution intermédiaire sont stockées. Les coefficients des schémas Runge-Kutta allant jusqu'à $M = 5$ sont présentés dans la Table D.1.

Schémas (M étapes)	α_2	α_3	α_4	α_5	β_M
1 (Euler)	0	0	0	0	1
2 (Heun)	1/2	0	0	0	1
3	1/3	1/2	0	0	1
4	1/4	1/3	1/2	0	1
5	1/5	1/4	1/3	1/2	1

Table D.1: Coefficients intervenant dans les différents schémas Runge-Kutta à faible stockage.

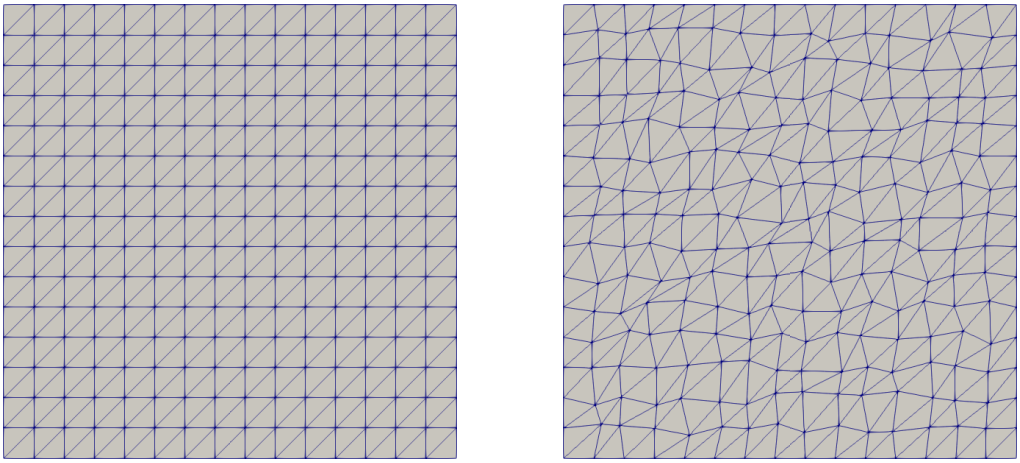
D.3 Résultats

Pour étudier les propriétés de convergence du schéma défini à partir de la reconstruction ordre élevé des flux convectifs, le cas test de la convection d'un vortex isentropique est de nouveau utilisé. Ce cas test est introduit dans le Chapitre 3. Dans la suite, le schéma correspondant à la reconstruction des flux d'ordre 3 avec un schéma d'avancement temporel Runge-Kutta d'ordre 3 sera noté RK3-HO3.

D.3.1 Convection d'un vortex isentropique sur maillages triangulaires

Cette première section s'intéresse aux résultats obtenus sur maillages triangulaires. Deux types de maillages sont étudiés, le premier est régulier avec $b_\Delta = 0$ et le deuxième est perturbé avec $b_\Delta = 0.75$ (Fig. D.3). Sur ces maillages, l'ordre de convergence du schéma RK3-HO3 est comparé aux schémas existants largement analysés dans le Chapitre 3. Comme le montre la Fig. D.4, l'ordre de convergence de RK3-HO3 reste égal à 3 même sur le maillage fortement perturbé, ce qui n'est pas le cas pour les schémas existants. Cela constitue une propriété intéressante qui est voulue par l'utilisation de la reconstruction quadratique des flux par la matrice de convolution. Néanmoins, le schéma présente un niveau important de dissipation qui est dû à deux facteurs principaux. Le premier est lié à la résolution du problème de Riemann à l'interface entre les arrêtes du maillage pour calculer les flux numériques aux discontinuités. Malgré l'utilisation du schéma *all-speed Roe*, mieux adapté à la LES car moins dissipatif, son niveau de dissipation reste important. Le deuxième facteur correspond au formalisme *node-centered* qui est différent des schémas existants définis par un formalisme *cell-vertex*.

Par ailleurs, la méthode décrite dans [32] offre également la possibilité de moduler l'ordre de la reconstruction. Pour le schéma RK3-HO3, la reconstruction était d'ordre 3, toutefois dans certains cas, en particulier quand le nombre de voisins de chaque nœud n'est pas suffisant, l'ordre de la matrice de convolution peut se retrouver diminué. La condition sur le voisinage des nœuds est expliquée dans [32]. Dans ce contexte, le schémas précédent RK3-HO3 est comparé à un schéma construit à partir d'une reconstruction d'ordre 2, noté RK3-HO2. L'ordre de convergence de ce schéma est de nouveau étudié sur le cas du vortex isentropique pour les deux niveaux de perturbations du maillage et comparé au schéma RK3-HO3 sur la Fig. D.5. Il est clair que logiquement, l'utilisation d'une reconstruction d'ordre 2 entraine une diminution de l'ordre de convergence pour le schéma RK3-HO2.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0$.

(b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.75$.

Figure D.3: Visualisation des maillages triangulaires pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = 1/16$).

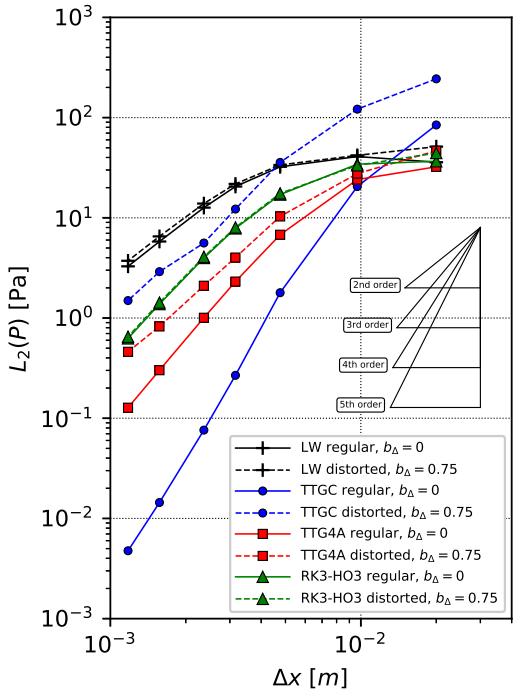


Figure D.4: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et RK3-HO3 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages triangulaires).

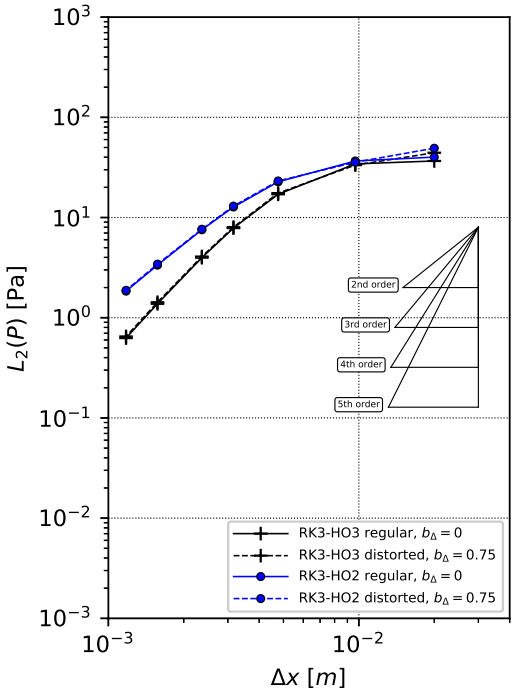
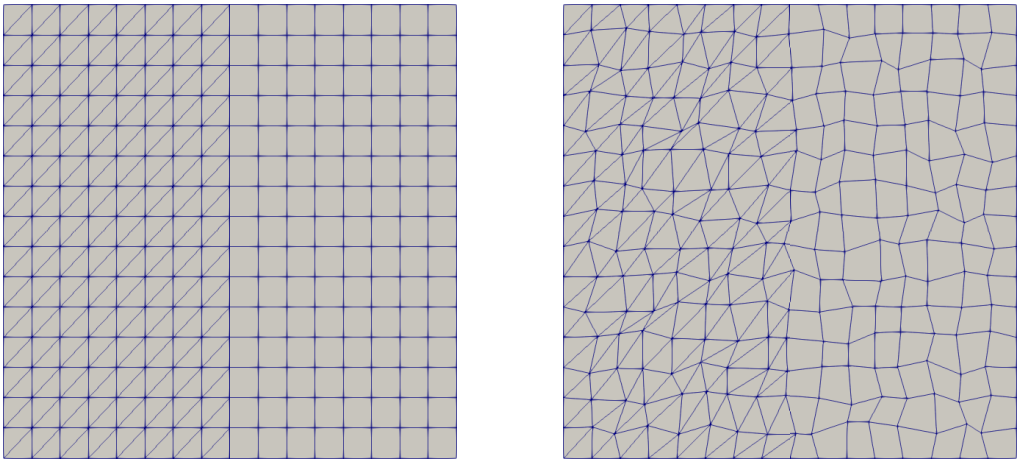


Figure D.5: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas RK3-HO3 et RK3-HO2 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages triangulaires).

D.3.2 Convection d'un vortex isentropique sur maillages hybrides

Pour finir, l'utilisation de maillages hybrides, *i.e.* composé de types d'éléments différents est aussi étudiée. Cet élément est notamment important pour la simulation de configurations complexes qui nécessite souvent l'utilisation d'éléments autres que des tétraèdres, en particulier des prismes dans la région proche paroi pour discrétiser cette région. Avec la méthode présentée, le calcul des moments du volume nodal associé à chaque nœud ne pose pas de problème particulier puisque la division en plusieurs simplex de ce dernier est toujours possible. Malgré tout, sur un maillage hybride composé de triangles et de quadrilatères comme ceux présentés en Fig. D.6, le nombre de voisins des nœuds de la région contenant des quadrilatères n'est pas suffisant pour assurer une reconstruction d'ordre 3 de la matrice de convolution (au minimum 5 voisins sont nécessaires [32]). Pour réaliser les simulations sur maillages hybrides avec le schéma RK3-HO3, la matrice de convolution est donc d'ordre 3 quand le voisinage de chaque nœud le permet, mais cet ordre est réduit à l'ordre 2 lorsque le nombre de voisins est insuffisant. Par conséquent, il est attendu que l'ordre de convergence du schéma RK3-HO3 sur maillages hybrides soit compris entre celui des schémas RK3-HO3 et RK3-HO2 sur maillages triangulaires. C'est effectivement ce qui est observé en traçant l'ordre de convergence sur le cas de la convection du vortex isentropique (Fig. D.5). L'ordre de convergence de RK3-HO3 se situe aux alentours de 2.5 mais de manière plus importante reste quasiment insensible à la qualité du maillage.



(a) Maillages réguliers, $b_\Delta = 0$.

(b) Maillages perturbés, $b_\Delta = 0.75$.

Figure D.6: Visualisation des maillages hybrides triangles/quadrilatères pour le raffinement le plus grossier ($\Delta x = 1/16$).

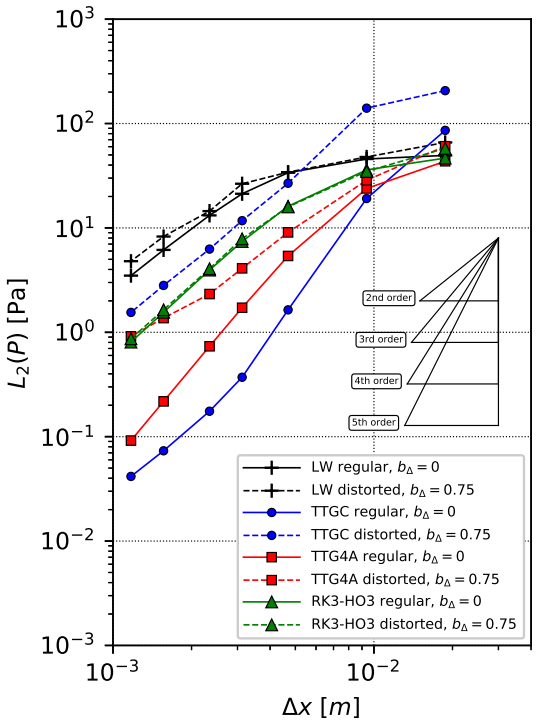


Figure D.7: Convergence en maillage de la convection d'un vortex isentropique pour les schémas LW, TTGC(0.01), TTG4A et RK3-HO3 pour deux niveaux de perturbations du maillage à $\nu = 0.7$ (maillages hybrides tri/quad).

D.4 Conclusion

Les travaux décrits dans cette annexe ont permis d'étudier la construction d'un schéma *node-centered* grâce au formalisme développé dans le papier de Bernard [32]. Ce formalisme rend possible la définition d'une matrice appelée matrice de convolution qui s'exprime uniquement à partir des propriétés géométriques du maillage. Une fois inversée, la matrice permet d'obtenir des opérateurs

d'ordre élevé qui servent à construire une expression polynomiale des grandeurs physiques de la simulation. Les schémas définis à partir de ce formalisme se sont montrés très robustes à la dégradation de la qualité du maillage, avec toutefois un niveau de dissipation assez important. Néanmoins, ces schémas n'ont pas fait l'objet davantage de recherche au cours de cette thèse puisqu'ils utilisent un formalisme complètement différent de celui d'AVBP. Certains choix ont motivé l'utilisation du formalisme *cell-vertex* dans AVBP et les qualités des schémas RK3-HO ne sont pas suffisantes pour remettre en question ces choix.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE
Doctorat de l'Université de Toulouse, spécialité Dynamiques des Fluides
13 décembre 2021
Benjamin MARTIN

Méthodes numériques et conditions limites pour la simulation aux grandes échelles du couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine

Résumé: La simulation aux grandes échelles (LES) de plusieurs composants d'une turbomachine est un outil présentant un grand potentiel pour étudier leur couplage et leurs performances dans une configuration réelle. Malheureusement, le coût de ce type de simulations est encore largement prohibitif pour être utilisées systématiquement dans la majorité des applications industrielles. Cette thèse présente donc plusieurs méthodes numériques pour réduire leur coût tout en conservant des résultats en adéquation avec les exigences de la LES. Le calcul des termes convectifs est un point crucial pour assurer la précision et la robustesse d'une LES. Après avoir décrit les schémas numériques de convection déjà disponibles dans le code AVBP, des améliorations et des optimisations sont proposées, en particulier pour améliorer leur comportement sur maillages non réguliers, utilisés pour la plupart des simulations industrielles. Le code AVBP est déjà utilisé en bureaux d'études chez Safran pour le dimensionnement de chambres de combustion modernes et son utilisation s'étend progressivement aux étages de turbomachines. Une amélioration de l'efficacité et de la robustesse du code permet donc d'avoir un impact direct sur son application en milieu industriel. Pour se faire, une nouvelle famille de schémas utilisant le formalisme de Petrov-Galerkin est introduite pour pallier aux problèmes de sensibilité des schémas existants, tout en permettant une montée en ordre. L'utilisation des méthodes de pas de temps local est aussi une option à considérer pour réduire le coût d'une simulation couplée. Une approche utilisant ce principe est validée sur des configurations académiques avant d'être appliquée à des configurations plus complexes pour démontrer ses gains potentiels. Enfin, pour reproduire le couplage entre plusieurs composants d'une turbomachine, l'utilisation de conditions limites plus réalistes peut également être envisagée. Ces nouvelles conditions limites issues de la décomposition modale d'une base de données enregistrée à l'interface chambre/turbine sont comparées à des conditions limites classiques dans le cas d'une simulation turbine isolée.

Mots-clés : simulation aux grandes échelles, turbomachine, couplage multi-composants, schémas numériques pour la convection, pas de temps local, conditions limites réalistes.

Numerical methods and boundary conditions for Large-Eddy Simulation of turbomachinery multi-component coupling

Abstract: Large-Eddy Simulation (LES) of multiple turbomachinery components is a powerful tool with considerable potential to study their coupling and performance in a real configuration. Unfortunately, the cost of such simulations is still highly prohibitive today to be used in the majority of industrial applications. This thesis presents different numerical methods to lower their cost while retaining results in adequacy with LES requirements. Computation of convective terms is a key issue to ensure the accuracy and robustness of a LES. After describing the numerical schemes for convection already available in the AVBP code, improvements and optimizations are suggested, especially to improve their behavior on perturbed meshes as commonly found in industrial simulations. The AVBP code is already used in Safran's design offices for the development of modern combustion chambers and its use is gradually being extended to turbomachinery stages. An improvement in the efficiency and robustness of the code can therefore have a direct impact on its application in an industrial environment. To this end, a new family of schemes using the Petrov-Galerkin formalism is introduced to overcome known problems regarding mesh sensitivity of the existing schemes, while allowing an increase of accuracy. The use of local time stepping methods is also an option to consider in order to reduce the cost of a coupled simulation. One of such approach is validated on academical configurations before being applied to more complex configurations to demonstrate its potential gains. Finally, more realistic boundary conditions can also be considered to reproduce the coupling between multiple components in a turbomachinery. This new type of boundary conditions, built from the modal decomposition of a database recorded at the chamber/turbine interface, is compared to typical boundary conditions in the case of an isolated turbine simulation.

Keywords: Large-Eddy Simulation, turbomachinery, multi-components coupling, convection numerical schemes, local time stepping, realistic boundary conditions.